Zeitschrift für Mathematik und Physik ...

Oskar Xaver Schlömilch, B. Witzschel, M. ...

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN.

56. BAND.

MIT DREI TAFELN UND 110 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Bücherschau.

Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.

Von H. Blasius in Göttingen.

Einleitung.

1. Die Wirbel, die in strömendem Wasser hinter festen Körpern entstehen, werden weder durch die Lösung der Potentialtheorie, noch durch die Helmholtzschen Strahlen richtig dargestellt: Der Potentialtheorie ist es unmöglich, die Bedingung zu erfüllen, daß das Wasser an den benetzten Körpern haftet; und ihre Lösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen stimmen nicht mit der Beobachtung überein, daß sich an einer bestimmten Stelle die Strömung vom Körper ablöst und eine stark wirbelnde Grenzschicht in die freie Strömung hinaussendet. Die Helmholtzsche Theorie der Strahlen versucht diesen letzteren Effekt in der Weise nachzubilden, daß sie längs einer Stromkurve zwei Potentialströmungen, Strahl und ruhendes Wasser, nichtanalytisch aneinandersetzt. Die Zulässigkeit dieses Verfahrens wird dadurch begründet, daß beim Drucke Null, der an der genannten Stromkurve herrschen soll, der Zusammenhang der Flüssigkeit und damit der Einfluß benachbarter Teile aufeinander aufgehoben ist. In Wirklichkeit aber ist an diesen Grenzen der Druck durchaus nicht Null, sondern kann sogar beliebig geändert werden. Überdies erfüllt die Helmholtzsche Theorie mit ihren Potentialströmungen nicht die Bedingung des Haftens und erklärt nicht die *Entstehung* der Wirbel, denn bei allen diesen Problemen ist nach dem Wirbelsatz die Berücksichtigung der Reibung prinzipiell erforderlich.

Wenn wir z. B. einen Zylinder in fließendes Wasser tauchen, so wird vor ihm die Strömung qualitativ dem bekannten Potential entsprechen: an der Zylinderwand dagegen bildet sich, da das Wasser am Zylinder haftet, eine Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeit vom Werte Null an der Wand zu dem durch die Potentialströmung gegebenen Wert ansteigt. In dieser Grenzschicht spielt wegen des starken Geschwindigkeitsgefälles die Reibung eine wesentliche Rolle, von ihr hängt es auch ab, wie weit sich der die Geschwindigkeit vermindernde Einfluß der Wand, der ja durch Schubkräfte vermittelt

werden muß, in die Flüssigkeit hineinerstreckt, d. h. wie dick die Grenzschicht wird. Daß sich an einer gewissen Stelle die äußere Strömung ablöst, und das an der Grenze in starke Rotation versetzte Wasser ins Freie hinausführt, muß aus den Vorgängen in der Grenzschicht zu erklären sein.

Die exakte Behandlung dieser Frage ist zuerst von Prandtl[1]) in Angriff genommen. Seine Erklärung der Ablösung ist unten (3) wiedergegeben. Da die Integration der hydrodynamischen Gleichungen mit Reibung ein zu schwieriges Problem ist, so ist in der genannten Arbeit die innere Reibung als klein vorausgesetzt, während die Bedingung des Haftens an der Grenzfläche beibehalten wird. In der vorliegenden Arbeit werden im Anschluß an die genannte Abhandlung auf Grund der so vereinfachten hydrodynamischen Gleichungen einige Probleme durchgerechnet, die sich auf die Ausbildung der Grenzschichten an festen Körpern und die Entstehung der Ablösung von Strahlen aus diesen Grenzschichten heraus beziehen. Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Prandtl.

2. Wir nehmen also mit Prandtl (l. c.) die Konstante der inneren Reibung als klein an; die Grenzschichten werden dann entsprechend dünn, die Flüssigkeit behält ihre normale (Potential) Geschwindigkeit bis nahe an die Grenzfläche heran bei. Trotzdem muß natürlich der Abfall der Geschwindigkeit bis zum Werte Null und, wie die Rechnung zeigen wird, die in dieser Grenzschicht stattfindende Ablösung bestehen bleiben, d. h. wir kommen auch bei beliebig kleiner Reibung nicht vollständig auf die Potentialströmung zurück, sondern die Ablösung und die durch sie bewirkte Umgestaltung der Strömung hinter dem Körper bleibt auch bei beliebig kleiner Reibung bestehen. — Wir beschränken uns auf zweidimensionale Probleme und verwenden Koordinaten, die parallel und senkrecht zur Grenze verlaufen (Bogenlänge und normaler Abstand). Trotz der Krümmung derselben wird sich der Typus der Grundgleichungen in dem kleinen Raum der Grenzschicht nicht merklich von dem für rechtwinklige Koordinaten entfernen. Die Größenordnung der Dicke der Grenzschicht sei ε, dann wird, da die Geschwindigkeit u auf dieser Strecke von Null zu normalen Werten ansteigen soll: $\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$, u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ haben normalen Wert, aus der Kontinuitätsgleichung

Fig. 1.



1) Verhdlg. d. intern. Math. Kongr. 1904.

folgt dann $\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1$, und durch Integration $v \sim \varepsilon$. Die Glieder in den Grundgleichungen erhalten hiernach folgende Größenordnung[1]):

$$\underset{1}{\varrho\Big(\frac{\partial u}{\partial t}} + \underset{1\cdot 1}{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}}{v\frac{\partial u}{\partial y}\Big)} = \underset{1}{-\frac{\partial p}{\partial x}} + k\Big(\underset{1}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \underset{\frac{1}{\varepsilon^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\Big)$$

$$\underset{\varepsilon}{\varrho\Big(\frac{\partial v}{\partial t}} + \underset{1\cdot\varepsilon}{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \underset{\varepsilon\cdot 1}{v\frac{\partial v}{\partial y}\Big)} = -\frac{\partial p}{\partial y} + k\Big(\underset{\varepsilon}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \underset{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\Big)$$

$$\underset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{1}{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0$$

Die Reibung gewinnt Einfluß, wenn wir $k \sim \varepsilon^2$ setzen; dies liefert uns den Zusammenhang der Dicke der Grenzschicht mit der Kleinheit der Reibungskonstante. In der ersten Gleichung fällt dann $\partial^2 u/\partial x^2$ gegen die übrigen Glieder fort; in der zweiten Gleichung bleibt allein stehen: $\partial p/\partial y \sim \varepsilon$ oder bei Berücksichtigung der Koordinatenkrümmung: (vergl. Fußnote) ~ 1. In beiden Fällen ist die Abhängigkeit des Druckes von y zu vernachlässigen, da in dem kleinen Raum der Grenzschicht die Integration von $\partial p/\partial y$ höchstens zu Druckunterschieden von der Größenordnung ε^2 oder ε Veranlassung geben kann, d. h. Druck und Druckgefälle $\partial p/\partial x$ sind von y unabhängig, werden also der Grenzschicht durch die äußere Strömung „eingeprägt." Die Geschwindigkeit der äußeren Strömung dicht an der Grenzschicht bezeichnen wir mit $\bar{u}$. $\bar{u}$ ist nur als Funktion von x zu betrachten, da die eigentlich vorhandene Abhängigkeit von y gegen die starken Variationen in der Grenzschicht selbst im Sinne obiger Vernachlässigungen ignoriert werden kann; v ist nach obigem $\sim \varepsilon = \sqrt{k}$, wird also mit k Null. Es bleiben uns also als Grundgleichungen für unsere Grenzschichten:

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \varrho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Grenzbedingungen sind:

für $y = 0$: $u = 0$ $v = 0$

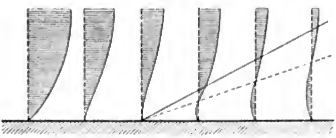
für $y = \infty$: $u = \bar{u}$.

1) Die Berücksichtigung der Koordinatenkrümmung liefert, wie man durch Umformung der Differentialquotienten erkennt, nur in der zweiten Gleichung ein nicht zu vernachlässigendes Glied $\varrho u^2/r$, wenn r der Krümmungsradius ist. Dies Glied ist von der Größenordnung 1.

Diese Gleichungen begründen gewissermaßen eine besondere *Mechanik der Grenzschichten*, da die äußere Strömung nur in „eingeprägter“ Weise eingeht.

3. Die qualitative Erklärung für die Ablösung der Strahlen ist nach Prandtl (l. c.) folgende: Das Druckgefälle und somit die Beschleunigung ist, vom Reibungsglied abgesehen, durch die Grenzschicht hindurch konstant, die Geschwindigkeit dagegen in der Nähe der Wand geringer. Daher wird hier bei Druckanstieg die Geschwindigkeit früher als draußen den Wert Null unterschreiten und so zur Rückströmung und Strahlbildung Veranlassung geben, wie die Geschwindigkeitsprofile in nebenstehender Figur (vergl. Prandtl l. c.) zeigen. Die Ablösungsstelle selbst ist hiernach durch

Fig. 2.



$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{für} \quad y = 0$$

charakterisiert. Diese Erklärung arbeitet nicht, wie die Helmholtzsche Strahlentheorie mit einer ad hoc gemachten Annahme, sondern nur mit den Vorstellungen, die unseren hydrodynamischen Gleichungen zugrunde liegen. Die Stromlinie, die den abgelösten Teil der Strömung begrenzt, geht unter einem gewissen Winkel von der Grenzfläche ab, da die Stromfunktion ψ sich um den Ablösungspunkt $[x]$ herum in folgender Weise entwickelt:

$$\psi = c_1 y^3 + c_2 (x - [x]) y^2 .$$

Als weniger wichtiger Effekt ist noch vorauszusehen, daß infolge der durch das Haften bewirkten Aufstauung des Wassers die Strömung vom Körper fortgedrängt wird. Hierdurch, sowie durch die hinter dem Körper eintretende Umgestaltung der Strömung wird natürlich auch die Strömung vor dem Körper beeinflußt, so daß die Annahme der Potentialströmung für quantitative Richtigkeit der Resultate nicht ausreicht, und etwa durch experimentelle Aufnahme des Druckverlaufs ersetzt werden muß.

I. Grenzschicht für die stationäre Bewegung an einer ebenen parallel den Stromlinien eingetauchten Platte.

Die Strömung fließe parallel der x-Achse. Die Platte beginnt im Koordinatenanfang und liegt in der positiven x-Achse.

In diesem einfachsten Falle ist kein Druckgefälle vorhanden, also auch Ablösung nicht zu erwarten. Wir wollen ihn trotzdem durch-

rechnen, schon um zunächst an diesem Fall die später zu benutzenden Rechenmethoden zu zeigen. Die Grundgleichungen lauten hier:

$$\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Die Kontinuitätsgleichung integrieren wir durch Einführung der Stromfunktion ψ:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Grenzbedingungen sind:

$$\text{für}\quad y=0:\qquad u=0\qquad v=0$$

$$\text{für}\quad y=\infty:\qquad u=\bar u,\quad \text{konstant.}$$

1. Nach dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit können wir unsere Gleichungen vereinfachen, wenn wir eine Ähnlichkeitstransformation kennen, welche Differentialgleichungen und Grenzbedingungen in sich überführt: Multiplizieren wir x, y, u, v, ψ mit den Faktoren x_0, y_0, u_0, v_0, ψ_0, so erhalten wir:

$$\frac{\varrho u_0}{x_0}=\frac{k}{y_0^2};\qquad v_0=\frac{u_0 y_0}{x_0};\qquad \psi_0=u_0 y_0;\qquad u_0=\bar u$$

als Bedingungen dafür, daß erstens das Problem und seine Lösung in sich übergeführt wird, und daß zweitens durch die Transformation ϱ, k, $\bar u=1$ geworden sind. Die vier soeben gewonnenen Gleichungen lassen uns noch einen Freiheitsgrad in der Auswahl der Faktoren x_0, y_0, u_0, v_0, ψ_0. Die drei letzten Gleichungen bestimmen die Faktoren, die u, v, ψ bei der Ähnlichkeitstransformation annehmen; die erste sagt aus, daß die gesuchte Lösung des Problems in sich übergeht, wenn nur: $\frac{\varrho\bar u}{k}\frac{y_0^2}{x_0}=1$ ist; d. h.: unter Rücksicht auf die Faktoren, die u, v, ψ annehmen, kann der Zustand nur von $\frac{\varrho\bar u}{k}\frac{y^2}{x}$ abhängen. Durch diese Überlegung haben wir die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen reduziert. Wir führen daraufhin ein:

$$\xi=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\varrho\bar u}{k}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x}}$$

$$\psi=\sqrt{\frac{k\bar u}{\varrho}}\sqrt{x}\cdot\zeta.$$

ζ wird dann allein Funktion von ξ und ferner ist:

$$u=\tfrac{1}{2}\bar u\zeta'$$

$$v=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k\bar u}{\varrho}}\frac{1}{\sqrt{x}}(\xi\zeta'-\zeta).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\zeta\zeta'' = -\zeta'''.$$

Grenzbedingungen:

für $\xi = 0$: $\zeta' = 0$ $\zeta = 0$ aus $u = 0$; $v = 0$;

für $\xi = \infty$: $\zeta' = 2$ aus $u = \bar{u}$.

2. Zur Integration dieser und späterer Gleichungen müssen wir Reihenentwicklungen benutzen: und zwar Potenzentwicklungen um $\xi = 0$, asymptotische Näherungen für $\xi = \infty$. Da Grenzbedingungen an beiden Stellen gegeben sind, so bleiben eine bez. zwei Integrationskonstanten in den beiderseitigen Entwicklungen stehen. Sie werden dadurch bestimmt, daß beide Entwicklungen an einem beliebigen Punkt im Funktionswert ζ, erstem und zweiten Differentialquotienten übereinstimmen müssen. Die Übereinstimmung in sämtlichen Differentialquotienten ist dann durch die Differentialgleichung gewährleistet.

3. Potenzentwicklung der Lösung obiger Gleichung:

$$\zeta\zeta'' = -\zeta'''$$

um $\xi = 0$ mit den Grenzbedingungen an dieser Stelle:

$$\zeta' = 0 \qquad \zeta = 0$$

geschieht durch den Ansatz:

$$\zeta = \sum_0^\infty {}_n (-1)^n \frac{c_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!} \xi^{3n+2}$$

der so gewählt ist, daß die zu bestimmenden Koeffizienten c_n ganze positive Zahlen werden, was ihre Berechnung vereinfacht. Der Faktor α^{n+1} bringt die Art des Eingehens der Integrationskonstante α zum Ausdruck: c_0, welches sonst als solche auftreten würde, kann nunmehr $= 1$ gesetzt werden. Es ergibt sich für die c_n die Rekursionsformel:

$$c_n = \sum_0^{n-1} {}_\nu \binom{3n-1}{3\nu} c_\nu c_{n-1-\nu}.$$

Die ersten so berechneten Koeffizienten sind:

$c_0 = 1$ $c_1 = 1$ $c_2 = 11$ $c_3 = 375$ $c_4 = 27\,897$

$c_5 = 3\,817\,137$ $c_6 = 865\,874\,115$ $c_7 = 298\,013\,289\,795$.[1])

Wegen der Konvergenz ist zu beachten, daß wir in obigen Ansatz als Nenner $(3n+2)!$ eingestellt haben. ζ' und ζ'' sind leicht zu bilden.

1) Die Koeffizienten c_6 und c_7 sind in meiner Dissertation falsch angegeben. Auf die Zahlen in Absatz 8 hat dieser Fehler erst in der vierten Dezimale Einfluß.

4. Bei der asymptotischen Näherung für ζ tritt eine Integrationskonstante additiv zu ξ, da

$$\text{für}\quad \xi = \infty: \quad \zeta' = 2$$
$$\text{also:}\quad \zeta = 2\xi + \text{const.} = 2\eta$$

ist, wodurch η als neue, gegen ξ verschobene Koordinate eingeführt ist.

Wir setzen nun, um eine erste Korrektion ζ_1 zu berechnen:

$$\zeta = 2\eta + \zeta_1$$

und erhalten unter Vernachlässigung der Quadrate der Korrektionen:

$$2\eta\zeta_1'' = -\zeta_1'''$$

und hieraus durch Integration:

$$\zeta_1 = \gamma\int_\infty^\eta d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\, d\eta = \gamma\eta\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\, d\eta + \frac{\gamma}{2}\, e^{-\eta^2}$$

$$\zeta_1' = \gamma\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta \qquad \zeta_1'' = \gamma e^{-\eta^2}.$$

Zur Berechnung weiterer Glieder der asymptotischen Näherung verfährt man allgemein so, daß man weitere kleine Korrektionen ζ_n hinzufügt und ihre Quadrate vernachlässigt. Man erhält so lineare Differentialgleichungen für die ζ_n, deren linke, homogene Seite stets die gleiche ist, während rechts als „eingeprägte Kraft“ der Fehler erscheint, den die Summe der vorhergehenden Näherungen, in die Differentialgleichung eingesetzt, übrig läßt.

5. Wir kommen hier schneller durch folgende Überlegung zum Ziel: Die Differentialgleichung für ζ_1:

$$2\eta\zeta_1'' = -\zeta_1'''$$

geht aus unserer ursprünglichen Gleichung:

$$\zeta\zeta'' = -\zeta'''$$

dadurch hervor, daß wir links für ζ die gröbste Näherung $\zeta = 2\eta$ einsetzen. Offenbar hat also ζ an dieser Stelle den geringsten Einfluß und wir wollen unsere Differentialgleichung formal so integrieren, als ob ζ an dieser Stelle bekannt wäre. Wir erhalten:

$$\zeta = \int^\eta d\eta \int^\eta d\eta\, e^{-\int^\eta \zeta\, d\eta}.$$

Die 3 Integrationskonstanten stecken in den beliebigen unteren Grenzen. Setzen wir rechts $\zeta = 2\eta$, so erhalten wir links, wie oben, ζ_1; setzen wir dagegen rechts $\zeta = 2\eta + \zeta_1$, so wird:

$$\zeta = \int^{\eta} d\eta \int^{\eta} d\eta\, e^{-\eta^2}\, e^{-\int^{\eta} \zeta_1 d\eta}$$

oder unter Rücksicht auf die Grenzbedingungen

$$\zeta = 2\eta + \gamma \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta\, e^{-\eta^2} \left(1 - \int_{\infty}^{\eta} \zeta_1 d\eta\right)$$

$$= 2\eta + \zeta_1 - \gamma \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta\, e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} \zeta_1 d\eta.$$

Es ist also die zweite asymptotische Näherung:

$$\zeta_2 = -\gamma^2 \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta \cdot e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Durch partielle Integrationen erhalten wir hieraus:

$$\zeta_2'' = -\frac{\gamma^2}{4}(2\eta^2 + 1)\, e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{\gamma^2}{4} \eta\, e^{-2\eta^2}$$

$$\zeta_2' = \frac{\gamma^2}{4} \eta\, e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{\gamma^2}{4} \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{\gamma^2}{8} e^{-2\eta^2}$$

$$\zeta_2 = -\frac{3\gamma^2}{8} e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{\gamma^2}{4} \eta \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{\gamma^2}{2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-2\eta^2} d\eta.$$

6. Über solche Integrationen läßt sich allgemein folgendes aussagen: Nach der durch partielle Integration zu gewinnenden Formel:

$$\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} \eta^n d\eta = -\tfrac{1}{2} \eta^{n-1} e^{-\eta^2} + \frac{n-1}{2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} \eta^{n-2} d\eta$$

läßt sich jedes Integral dieser Form zurückführen auf die beiden Funktionen $e^{-\eta^2}$ und $\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$, multipliziert mit Potenzen von η. Haben wir mehrere übereinandergeschachtelte Integrale, wie oben, so formen wir zunächst, wenn nötig, das innerste in der angegebenen Weise um: Unter dem vorletzten Integralzeichen steht dann als Integrand $e^{-\eta^2}$ oder $\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$ mit Potenzen multipliziert. Ersteres liefert keine neue

Schwierigkeit, letzteres können wir durch partielle Integration auf die beiden Funktionen $e^{-\eta^2}$ und $\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta$ zurückführen:

$$\int_\infty^\eta d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta = \eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \tfrac{1}{2} e^{-\eta^2}$$

$$\int_\infty^\eta \eta d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta = \tfrac{1}{2}\eta^2 \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \tfrac{1}{4}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \tfrac{1}{4}\eta e^{-\eta^2}$$

$$\int_\infty^\eta \eta^2 d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta = \tfrac{1}{3}\eta^3 \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \tfrac{1}{6}\eta^2 e^{-\eta^2} + \tfrac{1}{6} e^{-\eta^2} \quad \text{usw.}$$

Kann, wie oben, der Integrand quadratisch in $e^{-\eta^2}$ sein, so haben wir folgende vier Typen zu unterscheiden:

$$e^{-2\eta^2}, \quad e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta, \quad \left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2, \quad \int_\infty^\eta e^{-2\eta^2} d\eta$$

multipliziert mit Potenzen von η. Der erste und vierte Typus liefert nichts Neues. Für den zweiten schaffen wir uns durch partielle Integration die Formel:

$$\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta = \left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 - \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

oder:

$$\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta = \tfrac{1}{2}\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2$$

und weiter:

$$\int_\infty^\eta \eta e^{-\eta^2} d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta = -\tfrac{1}{2} e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \tfrac{1}{2}\int_\infty^\eta e^{-2\eta^2} d\eta$$

$$\int_\infty^\eta \eta^2 e^{-\eta^2} d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta = -\tfrac{1}{2}\eta e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \tfrac{1}{4}\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 - \tfrac{1}{8} e^{-2\eta^2}$$

usw.

Ebenso für den dritten Typus:

$$\int_\infty^\eta \left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 d\eta = \eta\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 + e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \int_\infty^\eta e^{-2\eta^2} d\eta$$

$$\int_\infty^\eta \left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 \eta d\eta = \tfrac{1}{2}\eta^2\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 + \tfrac{1}{2}\eta e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$
$$- \tfrac{1}{4}\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 + \tfrac{1}{8} e^{-2\eta^2} \quad \text{usw.}$$

Da durch diese Formeln neue Typen für Integranden nicht hinzugekommen sind, so beherrschen wir mit den angedeuteten Formeltafeln alle Integrale, in denen $e^{-\eta^2}$ nicht mehr als zweimal vorkommt. Wir können über solche Funktionen beliebig viele aufeinanderfolgende Integrationen ausführen; die eingehenden Potenzen von η sind unbeschränkt. — In dieser Weise sind die Formeln für ζ_2 in (5) gewonnen. Auch später werden uns diese Integrationen begegnen. — Da der Typus des Integrationsresultates hiermit bekannt ist, kann zur Durchführung der Rechnung auch ein Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten benutzt werden.

7. Es gelingt bei dieser Differentialgleichung auch, den *Fehler* zu bestimmen, mit dem infolge der geschehenen Vernachlässigungen unsere Lösung behaftet ist. Leicht läßt sich feststellen, daß 2η, $2\eta + \zeta_1$, $2\eta + \zeta_1 + \zeta_2$ *unter* dem wahren Wert von ζ bleiben; um nun auch eine obere Grenze zu finden, benutzen wir die, in obiger (vgl. 5), etwas abgeänderter Form:

$$\zeta = 2\eta + \gamma \int_\infty^\eta d\eta \int_\infty^\eta d\eta e^{-\eta^2} e^{-\int_\infty^\eta (\zeta - 2\eta) d\eta}$$

gegebene Möglichkeit, aus einer groben Annäherung eine feinere zu berechnen: Wir setzen rechts für $\zeta - 2\eta$ eine ziemlich willkürlich gewählte obere Grenze, z. B. das erste Glied der semikonvergenten Entwicklung von ζ_1, — haben also die Gleichung:

$$\zeta - 2\eta < \frac{\gamma}{4} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^2}$$

und berechnen aus dieser *Annahme* eine asymptotisch feinere obere Grenze für ζ'', ζ', ζ. Solange letztere unterhalb der angenommenen bleibt, ist sie garantiert. Die Ausrechnung ergibt [nach der allgemeinen Formel:

$$\int_\eta^\infty e^{-\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^\nu} = \frac{1}{2} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^{\nu+1}} - \frac{\nu+1}{2} \int_\eta^\infty e^{-\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^{\nu+2}}$$

$$< \frac{1}{2} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^{\nu+1}} \Big]$$

$$\int_\eta^\infty (\zeta - 2\eta) d\eta < \frac{\gamma}{8} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^3} = \vartheta$$

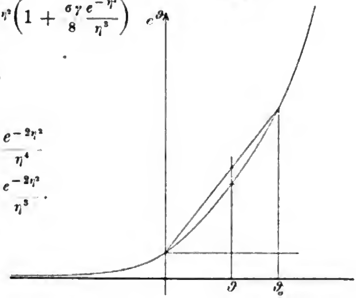
$$e^{-\int_\infty^\eta (\zeta - 2\eta) d\eta} < e^\vartheta$$

Für e^ϑ finden wir nach nebenstehender Figur als obere Grenze:

$$e^\vartheta < 1 + \sigma\vartheta \qquad \sigma = \frac{e^{\vartheta_0} - 1}{\vartheta_0},$$

wobei ϑ_0 der größte vorkommende Wert von ϑ ist, also dem Koordinatenwert η, für den ζ gerade berechnet werden soll, entspricht. Wir erhalten so:

Fig. 3.



$$\zeta < 2\eta + \gamma \int_\eta^\infty d\eta \int_\eta^\infty d\eta e^{-\eta^2}\left(1 + \frac{\sigma\gamma}{8}\frac{e^{-\eta^2}}{\eta^3}\right)$$

$$< 2\eta + \zeta_1 + \frac{\sigma\gamma^2}{128}\frac{e^{-2\eta^2}}{\eta^5}.$$

Analog für ζ' und ζ'':

$$\zeta' > 2 + \zeta_1 - \frac{\sigma\gamma^2}{32}\frac{e^{-2\eta^2}}{\eta^4}$$

$$\zeta'' < \zeta_1'' + \frac{\sigma\gamma^2}{8}\frac{e^{-2\eta^2}}{\eta^3}.$$

Durch genauere Ausführung der Integrale kann das Resultat leicht verschärft werden.

8. Der Anschluß der beiden Entwicklungen und die Bestimmung der Integrationskonstanten (α, γ und $\eta - \xi$) vollzieht sich nun in folgender Weise: In die Potenzentwicklung (3) führen wir ein, um die Integrationskonstante α herauszuheben:

$$Z = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\zeta \qquad X = \sqrt[3]{\alpha}\,\xi$$

und erhalten so:

$$Z = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\zeta = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n \frac{c_n}{(3n+2)!} X^{3n+2}$$

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{\alpha^{\frac{2}{3}}}\zeta' = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n \frac{c_n}{(3n+1)!} X^{3n+1}$$

$$\frac{d^2Z}{dX^2} = \frac{1}{\alpha}\zeta'' = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n \frac{c_n}{(3n)!} X^{3n}.$$

Die Verschiebung von η gegen ξ bringen wir durch Einführung der Integrationskonstanten β:

$$\sqrt[3]{\alpha}\cdot\eta = X - \beta$$

zum Ausdruck. Wenn wir jetzt noch von der asymptotischen Näherung her aus (4) und (5):

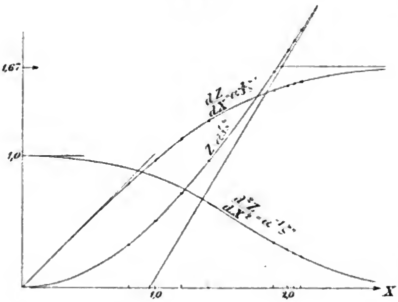
$$\zeta = 2\eta + \zeta_1 + \zeta_2$$
$$\zeta' = 2 + \zeta_1' + \zeta_2'$$
$$\zeta'' = \zeta_1'' + \zeta_2''$$

aufschreiben, so haben wir den ganzen Formelapparat beisammen. — Wir stellen uns nun für Z und seine Differentialquotienten untenstehendes Kurvenbild her, von dem folgende Werte angegeben sein mögen:

$X =$	0	0,8	1,0	1,2	1,4	1,9	2,0	2,05	2,1
$Z =$	0	0,317	0,492	0,701	0,938	1,63	1,79	1,8561	1,94
$\frac{dZ}{dX} =$	0	0,784	0,961	1,121	1,257	1,50	1,53	1,5479	1,56
$\frac{d^2Z}{dX^2} =$	1	—	—	—	0,639	0,34	0,28	0,2582	0,23

Die Glieder der Potenzreihe wurden bis $\frac{c_7 X^{23}}{23!}$ berechnet; weitere Glieder wurden z. T. aus den Differenzenreihen der Logarithmen der Koeffizienten extrapoliert. Die Lage der Asymptoten ist in der Figur 4 bereits gut zu erkennen; da nun wegen $\zeta = 2\eta$ asymptotisch: $Z = \frac{1}{\alpha^{\frac{2}{3}}}(X - \beta)$ ist, so kann man bereits aus der Zeichnung rohe Näherungswerte für α und β ablesen: $\alpha = 1{,}30$, $\beta = 0{,}96$. Zu $\eta = 1{,}00$ gehört dann als Anschlußkoordinate ungefähr $X = 2{,}05$. Für γ ergibt sich aus den entsprechenden Werten von $\frac{d^2Z}{dX^2}$ bez. $\zeta'' : \gamma = 0{,}92$. Die genauere Berechnung geschieht, indem wir α, γ und die zu $\eta = 1$ gehörige Anschlußkoordinate X durch kleine Korrektionen variieren und diese dann aus linearen Gleichungen berechnen.

Fig. 4.



Um ein Urteil über die Genauigkeit zu geben, sei mitgeteilt, daß ich für $X = 2{,}05$ berechnete:

$$Z = 1{,}8561, \quad \frac{dZ}{dX} = 1{,}5479, \quad \frac{d^2Z}{dX^2} = 0{,}2582, \quad \frac{d^3Z}{dX^3} = -0{,}479,$$

wobei die vierte Dezimale nicht mehr sicher ist. Aus der asymptotischen Näherung ergab sich für $\eta = 1$: (unter Benutzung von Markoff: $\int_t^\infty e^{-t^2} dt$).

$$\zeta = 2 + 0{,}04454 \cdot \gamma + \begin{Bmatrix} 0{,}00012 \\ 0{,}00106 \end{Bmatrix} \gamma^2$$

$$\zeta' = 2 - 0{,}13940 \cdot \gamma - \begin{Bmatrix} 0{,}00076 \\ 0{,}00423 \end{Bmatrix} \gamma^2$$

$$\zeta'' = 0{,}36788 \cdot \gamma + \begin{Bmatrix} 0{,}00462 \\ 0{,}01692 \end{Bmatrix} \gamma^2.$$

wobei in den { } die obere Zahl von ζ_2, die untere von der in (7) bestimmten oberen Grenze herstammt. (Letztere ist, wie oben erwähnt, ziemlich roh. Die „vorläufige Annahme" über die obere Grenze von ζ ergibt: $\zeta < 2 + 0{,}092 \cdot \gamma$. Die oberen Grenzen sind also garantiert vergl. [7]). Es ergibt sich als Resultat:

$$\alpha = 1{,}3266, \quad X = 2{,}0494, \quad \gamma = 0{,}9227, \quad (\beta = 0{,}9508).$$

Als gesichert können wir annehmen:

α liegt zwischen 1,326 und 1,327.

9. Wir können z. B. hieraus berechnen, welchen Zug eine Platte der Breite b und der Länge l erleidet, wenn sie parallel zu den Stromlinien in eine mit der Geschwindigkeit $\bar{u}$ fließende Strömung eingetaucht wird. Pro Flächeneinheit ist derselbe:

$$X_y = k\frac{\partial u}{\partial y} = k \tfrac{1}{2} \bar{u} \zeta'' \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\varrho \bar{u}}{k}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{\alpha}{4} \sqrt{k \varrho \bar{u}^3} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Durch Integration über die Platte erhalten wir:

$$b \cdot \int_0^l X_y \, dx = \frac{\alpha}{2} b \sqrt{k \varrho l \bar{u}^3},$$

also, wenn das Wasser auf beiden Seiten der Platte strömt:

$$\text{Zug} = 1{,}327 \cdot b \sqrt{k \varrho l \bar{u}^3}$$

II. Berechnung der Ablösungsstelle hinter einem in eine stationäre Strömung eingetauchten Körper.

1. Wir behandeln folgendes Problem: In eine sonst parallele Strömung werde ein zur Stromrichtung symmetrischer zylindrischer Körper eingetaucht. Unsere Grenzschichtenkoordinaten rechnen wir

vom Teilungspunkt der Strömung an. $\bar{u}$ sei als Funktion von x in eine Potenzreihe entwickelt. Zur Integration unserer Grundgleichungen:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{k}{\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

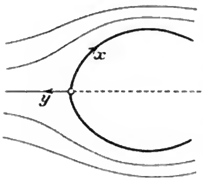
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} = \sum_0^\infty{}^l q_l x^{2l+1}$$

benutzen wir unter Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse für die Stromfunktion ψ den Ansatz:

$$\psi = \sum_0^\infty{}^l \chi_l(y) x^{2l+1}.$$

Fig. 5.



u und v erhalten wir hieraus durch Differentiation. Den allgemeinen Grenzbedingungen gemäß müssen dann die Funktionen $\chi_l(y)$ den Grenzbedingungen:

für $y = 0$: $\quad \chi_l' = 0 \qquad \chi_l = 0$

für $y = \infty$: $\quad \chi_l' = q_l$

also $\quad \chi_l = q_l y + r_l$

genügen, wobei r_l Integrationskonstante ist. Durch Einsetzen in die erste Grundgleichung ergeben sich dann noch als Differentialgleichungen für die χ:

$$\sum_0^l{}^\lambda (2\lambda + 1)(\chi_\lambda' \chi_{l-\lambda}' - \chi_\lambda \chi_{l-\lambda}'') = \sum_0^l{}^\lambda (2\lambda + 1) q_\lambda q_{l-\lambda} + \frac{k}{\varrho}\chi_l''',$$

die für $l = 0$ quadratisch, für $l > 0$ linear in der zu bestimmenden Funktion χ_l ist. Zur Lösung dieser Gleichung können wir, wie beim vorigen Problem, um $y = 0$ nach Potenzen entwickeln, bei $y = \infty$ asymptotisch annähern und beides aneinander anschließen. Wir werden nachher sehen, daß wir uns die asymptotische Näherung ersparen können, da bereits die Potenzreihe, wie vorhin, die Asymptote und damit die eine Integrationskonstante mit genügender Genauigkeit erkennen läßt. Wir beschränken uns auf die Berechnung von χ_0 und χ_1, d. h. auf die erste und dritte Potenz von x. Da nämlich die entsprechenden Koeffizienten q_0 und q_1 in $\bar{u}$ bereits eine erst zu-, nachher abnehmende Geschwindigkeit ergeben, — der Fall, in dem voraussichtlich Ablösung eintritt, ist durch $q_0 > 0$, $q_1 < 0$ charakterisiert, — so ist der in der Einleitung (3) verlangte Typus der Druckverteilung bereits durch die ersten beiden Potenzen geliefert; es ist daher zu erwarten, daß auch χ_0

und χ_1, wenn auch nicht quantitativ genau, bereits den Effekt der Ablösung darstellen werden. Bei einem der nachher in ähnlicher Weise zu behandelnden Probleme ist auch noch die nächste Näherung berechnet, und es hat sich dort die Zulässigkeit der Beschränkung auf die ersten beiden Potenzen in x herausgestellt.

2. Für χ_0 und χ_1 haben wir die Gleichungen:

$$\chi_0'^2 - \chi_0\chi_0'' = q_0^2 + \frac{k}{\varrho}\chi_0''',$$

$$\chi_0'\chi_1' - \chi_0\chi_1'' + 3(\chi_1'\chi_0' - \chi_1\chi_0'') = 4q_0q_1 + \frac{k}{\varrho}\chi_1'''.$$

Die Art, wie q_0 q_1 k ϱ eingehen, können wir hier noch durch mechanische Ähnlichkeit feststellen. Auch hierin zeigen die beiden ersten Glieder gewissermaßen universelle Bedeutung. Wir schreiben also:

$$\bar{u} = q_0x \pm q_1x^3 \qquad \psi = \chi_0x \pm \chi_1x^3$$

und führen folgende Größen für x, y, χ_0, χ_1 ein:

$$\xi = \sqrt{\frac{q_1}{q_0}}\,x \qquad \eta = \sqrt{\frac{\varrho q_0}{2k}}\,y \qquad \zeta_0 = \sqrt{\frac{2\varrho}{kq_0}}\,\chi_0 \qquad \zeta_1 = \sqrt{\frac{2\varrho q_0}{kq_1^2}}\,\chi_1.$$

Wir erhalten dann:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{q_0^3}{q_1}}(\xi \pm \xi^3)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{kq_0^2}{2\varrho q_1}}(\zeta_0\xi \pm \zeta_1\xi^3)$$

$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{q_0^3}{q_1}}(\zeta_0'\xi \pm \zeta_1'\xi^3) \quad \text{usw.}$$

ζ_0 und ζ_1 genügen als Funktionen von η den Differentialgleichungen:

$$\zeta_0'^2 - \zeta_0\zeta_0'' = 4 + \zeta_0'''$$

$$4\zeta_0'\zeta_1' - 3\zeta_0''\zeta_1 - \zeta_0\zeta_1'' = 16 + \zeta_1'''.$$

Grenzbedingungen:

für $\eta = 0$:	$\zeta_0 = 0$	$\zeta_0' = 0$	$\zeta_1 = 0$	$\zeta_1' = 0$
für $\eta = \infty$:		$\zeta_0' = 2$		$\zeta_1' = 2$

3. Für ζ_0 setzen wir die Potenzreihe an:

$$\zeta = \sum_2^\infty{}^\mu \frac{\alpha^{\mu+1}b_\mu}{\mu!}\,\eta^\mu.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

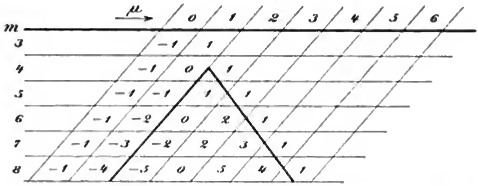
b_2 willkürlich $= 1$: da α bereits Integrationskonstante;

$\alpha^4\beta_3 = -4$: da wir im Ansatz der Integrationskonstante α auf die Inhomogenität der Gleichung für ζ_0 keine Rücksicht genommen haben, so erscheint α ungewöhnlicherweise auch in dieser Gleichung;

$b_4 = 0$: die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils ändert sich zunächst nicht, da die Reibung in ihrer Wirkung der Trägheit um zwei Glieder voraus ist; von $m = 5$ an ist:

$$b_m = \sum_{2}^{m-3} \mu \left[\binom{m-3}{\mu-1} - \binom{m-3}{\mu} \right] b_\mu b_{m-1-\mu}.$$

Die Koeffizienten dieser Rekursionsformeln können, wie alle in dieser Weise aus Binomialkoeffizienten zusammengesetzten Zahlen, aus einem Schema ähnlich dem Pascalschen Dreieck berechnet werden, dessen Anfang der folgende ist:



und in dem jedes Glied die Summe der darüberstehenden ist. Nur der eingerahmte Teil kommt gemäß obiger Summengrenzen in Betracht. Die 13 ersten Koeffizienten sind (z. T. s. o.)

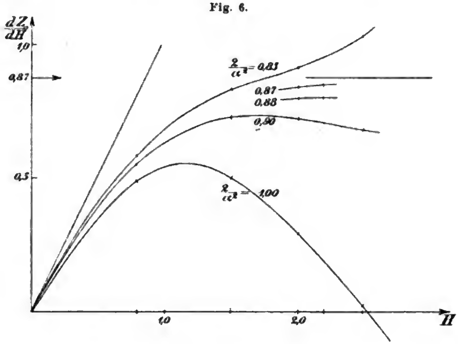
$b_2 = 1$	$b_3 = -\frac{4}{\alpha^4}$	$b_4 = 0$
$b_5 = 1$	$b_6 = 2b_3$	$b_7 = 2b_3^2$
$b_8 = -1$	$b_9 = -4b_3$	$b_{10} = -16b_3^2$
$b_{11} = 27 - 16b_3^3$	$b_{12} = 181b_3$	$b_{13} = 840b_3^2.$

4. Außer α kommen noch zwei Integrationskonstanten durch die asymptotische Näherung hinein, die wir, wie beim vorigen Problem, an die hier berechnete Potenzreihe anschließen müßten. Für unsere Zwecke (Berechnung des Ablösungspunktes) genügt es jedoch, α zu kennen, und wir werden, wie oben bemerkt, sehen, daß sich α mit genügender Genauigkeit bereits allein mit Hilfe der Potenzreihe berechnen läßt.

Wir setzen $Z_0 = \frac{1}{\alpha}\zeta_0$, $H = \alpha\eta$ und zeichnen $\frac{dZ_0}{dH}$ als Funktion von H nach der Potenzreihe auf. Es hängt selbst noch von $b_3 = -\frac{4}{\alpha^4}$ ab, und soll sich für den richtigen Wert von α der Asymptote: $\frac{dZ_0}{dH} = \frac{2}{\alpha^2}$ nähern. Für andere Werte von α nähert es sich überhaupt

keiner Asymptote, und dadurch wird, wie beiliegende Figur 6 zeigt, diese Methode zur Bestimmung von α sogar ziemlich empfindlich. Wir erhalten $\alpha = 1{,}515$, die letzte Ziffer nicht mehr sicher.

Fig. 6.



5. Die Berechnung von ζ_1 nach obiger linearer Gleichung und den Grenzbedingungen geschieht in analoger Weise: Potenzansatz:

$$\zeta_1 = \delta \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_{\mu} \frac{c_\mu}{\mu!} \eta^\mu$$

$c_2 = 1$, weil δ bereits Integrationskonstante; $\delta c_3 = -16$; $c_4 = 0$; und für $m \geqq 5$:

$$c_m = \sum_{2}^{m-3}{}_{\mu} \left[-3\binom{m-3}{\mu-2} + 4\binom{m-3}{\mu-1} - \binom{m-3}{\mu}\right] \alpha^{\mu+1} b_\mu c_{m-1-\mu}.$$

Wie oben, so können auch hier die Koeffizienten in diesen Formeln aus einem Schema berechnet werden, dessen erste Zeile ($m = 3$) aus den Zahlen -1, $+4$, -3 besteht, während die anderen durch Addition folgen:

m \ μ →	0	1	2	3	4	5	6	7
3	−1	+4	−3					
4	−1	3	1	−3				
5	−1	2	4	−2	−3			
6	−1	1	6	2	−5	−3		
7	−1	0	7	8	−3	−8	−3	
8	−1	−1	7	15	5	−11	−11	−3

Die ersten Koeffizienten werden:

$c_2 = 1$; $\delta c_3 = -16$; $c_4 = 0$; $c_5 = 4\alpha^3$; $c_6 = 6\alpha^3 c_3 - 8$; $c_7 = -32\, c_3$;
$c_8 = 17\,\alpha^6$; $c_9 = 30\,\alpha^6 c_3 - 224\,\alpha^3$; $c_{10} = -576\,\alpha^3 c_3 - 256$;
$c_{11} = 2048\, c_3 + 294\,\alpha^9$, $c_{12} = 783\,\alpha^9 c_3 - 5092\,\alpha^6$;
$c_{13} = -17392\,\alpha^6 c_3 + 59648\,\alpha^3$; $c_{14} = 221\,952\,\alpha^3 c_3 - 315\,\alpha^{12} - 136\,192$;
$c_{15} = -11025\,\alpha^{12} c_3 - 1024000\, c_3 - 54864\,\alpha^9$;
$c_{16} = 174168\,\alpha^9 c_3 - 221296\,\alpha^6$.

6. Auch hier brauchen wir die asymptotische Näherung nicht, sondern bestimmen die Integrationskonstante δ daraus, daß ζ_1' die Asymptote $\zeta_1' = 2$ haben muß. In Figur 7 sind zunächst als Kurven A und B die von c_3 freien und die mit c_3 multiplizierten Glieder der Potenzreihe für ζ_1' aufgetragen, so daß:

$$\zeta_1' = \delta \cdot A - 16 \cdot B \quad .$$

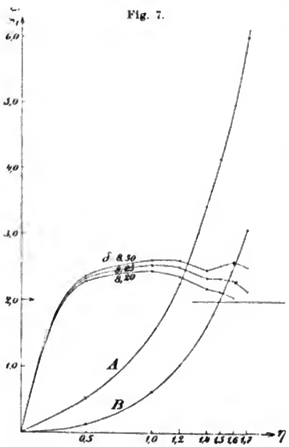


Fig. 7.

ist. Für verschiedene Werte von δ ist dann ζ_1' gezeichnet, und man erkennt aus dieser Kurve, daß bereits bei $\eta = 1{,}6$ die Konvergenz unserer Reihen trotz der großen Anzahl der berechneten Koeffizienten c ziemlich schlecht ist; immerhin zeigen die Glieder, wenn man gleiche Potenzen von α zusammenfaßt, einen befriedigenden Gang, so daß die Reihen trotzdem brauchbar sind. Wir vermögen noch zu erkennen, daß der richtige Wert von δ zwischen 8,20 und 8,30 liegt. Die Kurve steigt zunächst sehr stark an und nähert sich dann von oben ihrer Asymptote. Dieser starke Einfluß auf u in der Nähe von $\eta = 0$ im Vergleich zu $\eta = \infty$ erlaubt es auch, daß u im Ablösungsfalle an der Grenze eher als draußen ein Zeichen wechselt.

7. Wir kommen nun zur Berechnung des Ablösungspunktes und erinnern dabei an die Bemerkung (1), daß die Resultate quantitativ nicht genau sind, da wir nur die erste und dritte Potenz von x berücksichtigt haben. Der Ablösungspunkt $[\xi]$ ist bestimmt durch:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\frac{\varrho q_0^4}{8 k q_1}}\,(\zeta_0''[\xi] \pm \zeta_1''[\xi]^3) \qquad \text{für } \eta = 0$$

oder nach (3) und (5):

$$\alpha^3 \pm \delta [\xi]^2 = 0.$$

Nach (4) bez. (6) ist $\alpha = 1{,}515$, $\delta = 8{,}25$; es ist also im Falle des unteren Vorzeichens, der uns hier allein interessiert, die Koordinate des Ablösungspunktes:

$$[\xi] = 0{,}65$$

also:

$$[x] = 0{,}65 \sqrt{\frac{q_0}{q_1}}.$$

Dabei war:

$$\bar{u} = q_0 x - q_1 x^3.$$

Das Maximum der Geschwindigkeit (Minimum des Druckes) liegt daher bei:

$$x = 0{,}577 \sqrt{\frac{q_0}{q_1}},$$

während die Geschwindigkeit Null in der äußeren Strömung erst bei $x = 1 \cdot \sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$ erreicht würde. Der Ablösungspunkt liegt also hiernach um 12% der Gesamtlänge der Grenzschicht hinter dem Druckmaximum. Die gewonnenen Zahlen sind von Reibungskonstante, Dichte und einer proportionalen Vergrößerung aller Geschwindigkeiten unabhängig.

8. Nach der bei Prandtl gegebenen Zeichnung (vgl. Einleitung 3) geht die Stromlinie $\psi = 0$ unter einem bestimmten Winkel von der Grenze ab. Wir berechnen diesen in folgender Weise: In der Umgebung des Ablösungspunktes lautet die Entwicklung des in (2) gegebenen Ausdruckes für ψ:

$$\psi = \sqrt{\frac{k q_0^3}{2 \varrho q_1}} \cdot \frac{1}{3!}\left(\left(\zeta_0''' [\xi] - \zeta_1''' [\xi]^3\right) \eta^3 + 3 \left(\zeta_0'' - 3 \zeta_1'' [\xi]^2\right) (\xi - [\xi]) \eta^2\right)$$

$\psi = 0$ liefert nun für die abzweigende Stromlinie:

$$\frac{\eta}{\xi - [\xi]} = 3 \frac{3 \delta [\xi]^2 - \alpha^3}{16 [\xi]^3 - 4 [\xi]} = 11{,}5$$

oder in den nicht-reduzierten Koordinaten:

$$\frac{y}{x - [x]} = 11{,}5 \cdot \sqrt{\frac{2 k q_1}{\varrho q_0^3}}.$$

Diese Formeln sind mit ziemlicher Unsicherheit behaftet, da wir erstens nur zwei Glieder der Entwicklung von ψ berechnet haben, und weil zweitens die höheren Differentialquotienten, die ja auch subtilere Vorgänge darstellen, stets ungenauer als die früheren berechnet werden.

III. Entstehung der Grenzschicht und der Ablösungsstelle beim plötzlichen Beginn der Bewegung aus der Ruhe.

1. Die beiden vorhergehenden Probleme behandelten stationäre Strömungen. Wir wenden uns nunmehr dem Problem der Entstehung der Grenzschichten zu: Ein Zylinder von beliebigem Querschnitt werde in einer ruhenden Flüssigkeit plötzlich in Bewegung gesetzt und von $t = 0$ an dauernd auf konstanter Geschwindigkeit erhalten. Zunächst wird sich unter der alleinigen Wirkung der durch den Stoß hergestellten Druckverteilung der Zustand der Potentialströmung einstellen; die Dicke der Grenzschicht ist im Anfang Null, soweit überhaupt die plötzliche Geschwindigkeitserteilung ausgeführt werden kann. Die Ausbildung der Grenzschicht geschieht in erster Linie unter der Wirkung der Reibung, sodann durch die konvectiven Glieder. Als Resultat werden wir erhalten, daß nach einer gewissen Zeit die Ablösung an der Rückseite des Körpers beginnt und von dort aus langsam fortschreitet. Da unsere Grundgleichungen sich nur auf dünne Grenzschichten beziehen, so wird natürlich nur der Beginn des Ablösungsprozesses von ihnen dargestellt, ebenso wie die vorigen Probleme die Grenzschicht nur bis zur Ablösungsstelle betrafen.

2. Die jetzt zu benutzenden Gleichungen sind:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\varkappa$ steht hier der Einfachheit halber für $\frac{k}{\varrho}$.

Die Potentialströmung, die sich zunächst einstellt, liefert uns den Randwert $\bar{u}$ als Funktion von x. Da der Vorgang für $t = 0$ singulär ist, so ist uns vorläufig die Art der Entwicklung noch unbekannt, sie ist erst durch sukzessive Näherung festzustellen. Den Haupteinfluß auf die Änderungen hat zunächst (bei kleinem t) die Reibung und wir schreiben daher für die erste Näherung u_0:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung,

$$u_0 = \frac{2\bar{u}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\,d\eta$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}$$

genügt unseren Bedingungen, eine für $t=0$ verschwindende Grenzschicht zu liefern, und sich für $y=\infty$ an die äußere Strömung $u_0=\bar{u}$ anzuschließen. Die folgende Näherung werden wir erhalten, indem wir u_0 in die konvektiven Glieder einsetzen, während Zeit- und Reibungsglied $u=u_0+u_1$ erhält. Es kommt so folgende Gleichung für u_1 heraus:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\cdot[\text{Funktion von } \eta.]$$

Nach mechanischer Ähnlichkeit genügen wir dieser Gleichung durch den Ansatz:

$$u_1=t\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\cdot f(\eta)$$

der auch der Grenzbedingung $u_1=0$ für $y=0$ und $y=\infty$ nicht widerspricht.

Nach weiteren Überlegungen, die insbesondere das Eingehen von x betreffen, gelangen wir dazu, u darzustellen in einer Reihe nach Potenzen von t, deren Koeffizienten Funktionen von η sind, also auch noch t enthalten. Von x hängen diese Funktionen auch noch ab, doch geht diesmal x nur als Parameter in die Differentialgleichungen ein.

3. Als Ansatz für ψ ergibt sich hiernach:

$$\psi=2\sqrt{\varkappa t}\cdot\sum_0^\infty{}^{\nu}\, t^\nu\chi_\nu(x\eta)$$

$$\eta=\frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}$$

$$u=\sum_0^\infty{}^{\nu}\, t^\nu\frac{\partial\chi_\nu}{\partial\eta}$$

und hieraus für die χ die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^3\chi_\mu}{\partial\eta^3}+2\eta\frac{\partial^2\chi_\mu}{\partial\eta^2}-4\mu\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta}=4\sum_0^{\mu-1}{}^{\nu}\left(\frac{\partial\chi_{\mu-1-\nu}}{\partial\eta}\frac{\partial^2\chi_\nu}{\partial x\,\partial\eta}-\frac{\partial\chi_\nu}{\partial x}\frac{\partial^2\chi_{\mu-1-\nu}}{\partial\eta^2}\right)$$

für $\mu=1$ tritt zur rechten Seite noch $-4\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}$.

Wir beschränken uns, wie im vorigen Abschnitt, auf die beiden ersten Glieder und setzen:

$$\chi_0=\bar{u}\zeta_0(\eta)\qquad \chi_1=\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\zeta_1(\eta),$$

so daß also:

$$u=\bar{u}\zeta_0'+t\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\zeta_1'.$$

Für ζ_0 und ζ_1 erhalten wir dann die Gleichungen:

$$\zeta_0''' + 2\eta\zeta_0'' = 0$$

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0\zeta_0'' - 1).$$

Grenzbedingungen:

für $\eta = 0$: $\zeta_0 = 0 \quad \zeta_0' = 0$

$\zeta_1 = 0 \quad \zeta_1' = 0$

für $\eta = \infty$: $\zeta_0' = 1 \quad \zeta_1' = 0.$

4. Die Lösungen obiger Differentialgleichungen, die wir auch beim folgenden Problem brauchen werden, sind durch Quadratur zu gewinnen, wenn die homogenen Gleichungen integriert sind. Letztere Integrale erhielt ich durch folgende Überlegung: Die homogenen Teile unserer Gleichungen stammen aus dem Zeit- und Reibungsglied, die zusammen die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

bilden. Von dieser Gleichung existieren, wie man aus Ähnlichkeitsüberlegungen erkennt, Integrale der Form:

$$u_n = t^n f_n(\eta)$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{kt}},$$

wobei f_n der Differentialgleichung:

$$f_n'' + 2\eta f_n' - 4n f_n = 0,$$

die also obige Form besitzt, genügt.

So ist z. B. (s. o.)

$$u_0 = f_0 = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

Für $\eta = 0$ ist $u_0 = 1 \quad \text{wenn} \quad t > 0$

$u_0 = 0 \quad \text{wenn} \quad t < 0.$

u_n ist für $\eta = 0$, d. h. für $y = 0$, proportional zu t^n, es muß sich also durch Superposition von Lösungen u_0 in folgender Form darstellen lassen:

$$u_n = n \cdot \int_0^\infty u_0\left(\frac{y}{2\sqrt{k(t-t_0)}}\right) \cdot t_0^{n-1} dt_0 = n\int_0^t u_0\left(\frac{y}{2\sqrt{k(t-t_0)}}\right) \cdot t_0^{n-1} dt_0.$$

denn für $y = 0$ ist dies

$$= n\int_0^t t_0^{n-1}\,dt_0 = t^n.$$

Zur Auswertung dieses Integrals setzen wir $t - t_0 = \tau$,

$$u_n = -n\int_t^0 u_0\left(\frac{y}{2\sqrt{k\tau}}\right)\cdot(t-\tau)^{n-1}\,d\tau.$$

Führen wir hierin ein:

$$\frac{y}{2\sqrt{kt}} = \eta; \qquad \frac{y}{2\sqrt{k\tau}} = \zeta;$$

$$t = \frac{1}{4k}\frac{y^2}{\eta^2}; \qquad \tau = \frac{1}{4k}\frac{y^2}{\zeta^2};$$

$$d\tau = -\frac{1}{2k}\frac{y^2}{\zeta^3}\,d\zeta;$$

so wird schließlich:

$$u_n = \frac{4n}{\sqrt{\pi}}\,t^n\eta^{2n}\int_\infty^\eta \frac{1}{\zeta^3}\left(\frac{1}{\eta^2}-\frac{1}{\zeta^2}\right)^{n-1}d\zeta\int_\infty^\zeta e^{-\vartheta^2}\,d\vartheta.$$

Ausrechnung dieser Integrale nach dem binomischen Satze und dem früher erwähnten Verfahren der partiellen Integration liefert schließlich:

$$f_n = \sum_0^n{}^{\mu}\,\frac{2^\mu\binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\cdots 3\cdot 1}\,\eta^{2\mu}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta$$

$$+\sum_1^n{}^{\nu}\left\{\sum_\nu^n{}^{\mu}\,(-1)^{\mu+\nu}\,\frac{2^{\nu-1}\binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\cdots(2\mu-2\nu+1)}\right\}\eta^{2\nu-1}e^{-\eta^2}.$$

Das andere Integral ist algebraisch und zwar gleich obigem Faktor von $\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta$:

$$f_n = \sum_0^n{}^{\mu}\,\frac{2^\mu\binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\cdots 3\cdot 1}\,\eta^{2\mu}.$$

5. ζ_0 wird hiernach in folgender Weise bestimmt:
Unter Rücksicht auf die Grenzbedingungen ist:

$$\zeta_0 = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta.$$

Hieraus durch Integration:

$$\zeta_0 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\eta\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta + \tfrac{1}{2}e^{-\eta^2}\right).$$

Wir brauchen noch:

$$\zeta_0'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\eta^2}.$$

Die zweite Differentialgleichung (zweiter Ordnung für ζ_1') erhält dann die Form:

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = \frac{16}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta - \frac{8}{\sqrt{\pi}}\,\eta e^{-\eta^2}$$

$$+\frac{16}{\pi}\left[\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right\}^2 - \eta e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta - \tfrac{1}{2}e^{-2\eta^2} + \tfrac{1}{2}e^{-\eta^2}\right].$$

Das Integral der homogenen Gleichung für ζ_1' ist nach (4):

$$f_1 = \alpha(2\eta^2 + 1) + \beta\left[\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2 + 1)\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right].$$

Das Integral der inhomogenen Gleichung wäre nunmehr durch Quadratur zu erhalten. Wir können aber auch den Umstand verwenden, daß durch zweimalige Differentiation die Differentialgleichung schließlich in

$$\zeta''''' + 2\eta\zeta'''' = \text{Funktion von } \eta$$

übergeht, welche als Gleichung von wesentlich erster Ordnung leichter zu integrieren ist. Es wird dann:

$$\zeta'''' = e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{+\eta^2}.\ [\text{Funktion von } \eta]\cdot d\eta.$$

Da nach zweimaliger Differentiation die eingeprägte Kraft unserer Differentialgleichung in jedem Gliede $e^{-\eta^2}$ enthält, so fällt $e^{+\eta^2}$ hiergegen fort, und wir können erst ζ'''' und schließlich ζ ausintegrieren. Denn unter den Integralen stehen nur Funktionen, die höchstens zweimal $e^{-\eta^2}$ und außerdem Potenzen von η enthalten und die mehrmals zu integrieren sind, was sich nach den früher I. 6. angegebenen Methoden erledigen läßt. Das Resultat der sehr umfangreichen Rechnung lautet:

$$\zeta_1' = \frac{6}{\pi}\eta e^{-\eta^2}\int\limits_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta + \frac{2}{\pi}(2\eta^2-1)\left\{\int\limits_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta\right\}^2 + \frac{2}{\pi}e^{-2\eta^2}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int\limits_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta - \frac{4}{3\pi}e^{-\eta^2}$$

$$+\alpha(2\eta^2+1) + \beta\left[\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2+1)\int\limits_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta\right],$$

$$\zeta_1'' = -\frac{2}{\pi}(2\eta^2-1)e^{-\eta^2}\int\limits_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta + \frac{8}{\pi}\eta\left\{\int\limits_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta\right\}^2 - \frac{2}{\pi}\eta e^{-2\eta^2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2\eta^2+3)e^{-\eta^2} + \frac{8}{3\pi}\eta e^{-\eta^2}$$

$$+4\alpha\eta + \beta\left[2e^{-\eta^2} + 4\eta\int\limits_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta\right].$$

Daß hier die Gleichung trotz ihrer Verwandtschaft mit obigen stationären Problemen in geschlossener Form integriert werden konnte, hat seine Ursache darin, daß $\frac{\partial u}{\partial t}$ einfacher als $u\frac{\partial u}{\partial x}$ ist, trotzdem beide der Ordnung des Differentialquotienten gemäß „Wärmeleitungscharakter" besitzen.

Die Bestimmung von α und β aus den Grenzbedingungen $\zeta_1' = 0$ für $\eta = 0$ nnd $\eta = \infty$ liefert:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\pi^{3/2}}.$$

6. Zur Berechnung der Ablösungsstelle haben wir:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}\left(\bar{u}\zeta_0'' + [t]\,\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\zeta_1''\right) \quad \text{für} \quad \eta = 0.$$

Nun ist

$$\zeta_0'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad \zeta_1'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{8}{3\pi^{3/2}}.$$

Als Bedingung für die Ablösungszeit $[t]$ erhalten wir:

$$1 + \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)[t]\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0.$$

Es muß also $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ negativ sein. Wo $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ absolut am größten ist, geschieht die Ablösung am frühesten. Das Resultat gilt für zylindrische Körper von beliebigem Querschnitt. $\bar{u}$ ist die entsprechende Potentialströmung.

IV. Entstehung der Ablösungsstelle aus der Ruhe bei gleichförmig beschleunigter Bewegung.

1. Gegen die physikalischen Grundlagen des vorigen Problems kann als Bedenken geltend gemacht werden, daß bei dem plötzlichen Stoße der Zusammenhang der Flüssigkeit aufgehoben werden könnte. Es sei deshalb hier die Lösung des Problems gegeben, daß von der Zeit $t = 0$ an der eingetauchte Körper konstanter Beschleunigung unterworfen sei. Es ist dann:

$$\bar{u} = t\,w(x),$$

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = w + t^2 w \frac{\partial w}{\partial x}.$$

2. Aus ähnlichen Überlegungen heraus wie vorhin machen wir für die Lösung unserer Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

den Ansatz:

$$\psi = 2\sqrt{\varkappa t}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, t^{2\nu+1}\chi_{2\nu+1}(x\eta),$$

$$u = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, t^{2\nu+1}\frac{\partial \chi_{2\nu+1}}{\partial \eta},$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}.$$

Durch Einsetzen in die Grundgleichung erhalten wir:

$$\frac{\partial^3 \chi_{2\lambda+1}}{\partial \eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2 \chi_{2\lambda+1}}{\partial \eta^2} - 4(2\lambda+1)\frac{\partial \chi_{2\lambda+1}}{\partial \eta}$$

$$= 4\sum_{0}^{\lambda-1}{}_{\mu}\left[\frac{\partial \chi_{2\mu+1}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \chi_{2\lambda-2\mu-1}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \chi_{2\lambda-2\mu-1}}{\partial x}\frac{\partial^2 \chi_{2\mu+1}}{\partial \eta^2}\right],$$

für $\lambda = 0$ tritt zur rechten Seite $-4w$, für $\lambda = 1$ tritt $-4w\frac{\partial w}{\partial x}$ hinzu.

Auch hier beschränken wir die Ausrechnung des Zustandes auf die beiden ersten Glieder, wobei zu erwähnen ist, daß durch diese beiden Glieder auch gerade die beiden Glieder des Druckes $w + t^2 w \frac{\partial w}{\partial x}$ berücksichtigt sind. Die eingeprägte Kraft der nächsten Gleichungen enthält nur noch frühere Entwicklungskoeffizienten. Für die Schlußgleichung, die uns die Ablösungsstelle liefert, werden wir jedoch auch

noch den Koeffizienten des nächsten Gliedes berechnen. Für χ_1 und χ_3 können wir die Abhängigkeit von x in folgender Weise einführen:

$$\chi_1 = w\,\zeta_1(\eta), \qquad \chi_3 = w\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\zeta_3(\eta).$$

Die Differentialgleichungen für die ζ sind dann:

$$\frac{\partial^3 \zeta_1}{\partial \eta^3} + 2\eta\,\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2} - 4\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} = -4,$$

$$\frac{\partial^3 \zeta_3}{\partial \eta^3} + 2\eta\,\frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial \eta^2} - 12\,\frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta} = -4 + 4\left[\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\right)^2 - \zeta_1\,\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2}\right],$$

Grenzbedingungen:

$$\text{für } \eta = 0: \quad \left.\begin{array}{ll} \zeta_1 = 0, & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} = 0 \\ \zeta_3 = 0, & \dfrac{\partial \zeta_3}{\partial \eta} = 0 \end{array}\right\} \text{ aus } \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0, \end{array}$$

$$\text{für } \eta = \infty: \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} = 1, \quad \frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta} = 0 \quad \text{aus } u = tw.$$

3. Nach den in III (4) angegebenen allgemeinen Lösungen des vorliegenden Typus von Differentialgleichungen können wir $\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}$ sofort hinschreiben, da das inhomogene Glied -4 durch $\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} = 1$ erledigt wird. ζ_1 erhalten wir durch Integration nach den schon mehrfach angewandten Methoden (I 6):

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\eta^2} + 2\eta\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right],$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\eta e^{-\eta^2} + (1 + 2\eta^2)\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right],$$

$$\zeta_1 = \eta + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left[-1 + (1 + \eta^2)\,e^{-\eta^2} + (3\eta + 2\eta^3)\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right].$$

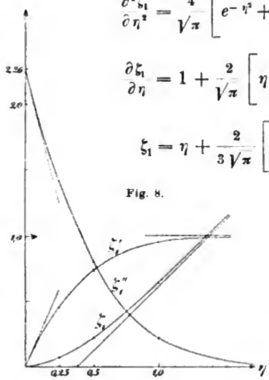


Fig. 8.

Diese Funktionen sind in nebenstehender Figur quantitativ gezeichnet. Eine Tabelle der Werte befindet sich weiter unten (6.). Die eingeprägte Kraft auf der rechten Seite der zweiten Gleichung ist hiernach:

$$\frac{16}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta + \frac{16}{3\pi}\left[4\eta\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta + 2e^{-\eta^2}\right]$$
$$+\frac{16}{3\pi}\left[(-2+\eta^2)e^{-2\eta^2} + (-4\eta+4\eta^3)e^{-\eta^2}\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta \right.$$
$$\left. + (3+4\eta^4)\left\{\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta\right\}^2\right].$$

4. Die Integration der zweiten Gleichung gelingt auch hier in geschlossener Form nach denselben Methoden, die in III 5 zum Ziele führten. Speziell für den in $e^{-\eta^2}$ quadratischen Teil der eingeprägten Kraft ist ein Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten:

$$(a+b\eta^2+c\eta^4)e^{-2\eta^2}$$
$$+(d\eta+e\eta^3+f\eta^5)e^{-\eta^2}\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta$$
$$+(g+h\eta^2+i\eta^4+k\eta^6)\left\{\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta\right\}^2$$

empfehlenswert. Dieser Ansatz versagt, wenn die eingeprägte Kraft Glieder enthält, die über $\eta^6 e^{-2\eta^2}$, $\eta^5 e^{-\eta^2}\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta$, $\eta^4\left\{\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta\right\}^2$ hinausgehen (vgl. III 5). Die Koeffizienten sind aus linearen Gleichungen zu bestimmen. Leichter sind die übrigen Anteile von $\frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta}$ zu berechnen. ζ_3 und $\frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial \eta^2}$ ergeben sich dann durch Integration und Differentiation. Als Resultat erhalten wir schließlich, wenn auch noch die Integrationskonstanten richtig bestimmt werden:

$$\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial\eta^2} = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2} - \frac{32}{15\pi}\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta$$
$$+\frac{2}{3\pi}\left[(-\eta+2\eta^3)e^{-2\eta^2}\right.$$
$$+(1+2\eta^2+8\eta^4)e^{-\eta^2}\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta$$
$$\left.+(6\eta+8\eta^3+8\eta^5)\left\{\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta\right\}^2\right]$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6\sqrt{\pi}} - \frac{16}{45\sqrt{\pi^3}}\right)\left[(16+36\eta^2+8\eta^4)e^{-\eta^2}\right.$$
$$\left.+(60\eta+80\eta^3+16\eta^5)\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta\right],$$

$$\frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta} = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta$$

$$-\frac{16}{15\pi}\left[e^{-\eta^2} + 2\eta\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right]$$

$$+\frac{1}{9\pi}\Bigg[(8 + \eta^2 + 2\eta^4)e^{-2\eta^2}$$

$$+ (24\eta + 8\eta^3 + 8\eta^5)e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta$$

$$+ (-9 + 18\eta^2 + 12\eta^4 + 8\eta^6)\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right\}^2\Bigg]$$

$$+\frac{1}{15}\left(\frac{5}{6\sqrt{\pi}} - \frac{16}{45\sqrt{\pi}^3}\right)\Bigg[(33\eta + 28\eta^3 + 4\eta^5)e^{-\eta^2}$$

$$+(15+90\eta^2+60\eta^4+8\eta^6)\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\Bigg]$$

und hieraus durch Integration:

$$\zeta_3 = -\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left[e^{-\eta^2} + 2\eta\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$-\frac{8}{15\pi}\left[\eta e^{-\eta^2} + (1 + 2\eta^2)\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta\right]$$

$$+\frac{1}{315\pi}\Bigg[(49\eta + 11\eta^3 + 10\eta^5)\,e^{-2\eta^2} + 768\int_\infty^\eta e^{-2\eta^2}d\eta$$

$$+ (-537 + 198\eta^2 + 64\eta^4 + 40\eta^6)\,e^{-\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta$$

$$+ (-315\eta + 210\eta^3 + 84\eta^5 + 40\eta^7)\left\{\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta\right\}^2\Bigg]$$

$$+\frac{1}{105}\left(\frac{5}{6\sqrt{\pi}} - \frac{16}{45\sqrt{\pi}^3}\right)\Bigg[(24 + 87\eta^2 + 40\eta^4 + 4\eta^6)e^{-\eta^2}$$

$$+(105\eta + 210\eta^3 + 84\eta^5 + 8\eta^7)\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}d\eta\Bigg]$$

$$+\left(\frac{128}{1575\sqrt{\pi}^3} + \frac{128}{105\sqrt{2\pi}} - \frac{9}{14\sqrt{\pi}}\right)$$

Diese drei Funktionen sind in umstehender Figur gezeichnet, sie genügen streng den Differentialgleichungen und Grenzbedingungen für die Entwicklungskoeffizienten χ.

5. Die Bedingung für die Ablösungsstelle hat die Form:

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{\varkappa}}\, w \left[\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2} + t^2 \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0}$$

wobei sich aus obigen Formeln ergibt:

$$\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\eta^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \qquad \frac{\partial^2\zeta_3}{\partial\eta^2} = \frac{31}{15\sqrt{\pi}} - \frac{256}{225\sqrt{\pi}^3},$$

Wir würden also folgende Gleichung für die Ablösungszeit $[t]$ erhalten:

$$1 + \left(\frac{31}{60} - \frac{64}{225\pi}\right)[t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Das nächste Glied in der Ablösungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ würde lauten: $\frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}\, t^5 \frac{\partial^2 \chi_5}{\partial\eta^2}$, und um dieses noch berücksichtigen zu können, wollen wir zwar nicht den ganzen Verlauf von χ_5, aber doch den Koeffizienten in dieser Ablösungsgleichung berechnen.

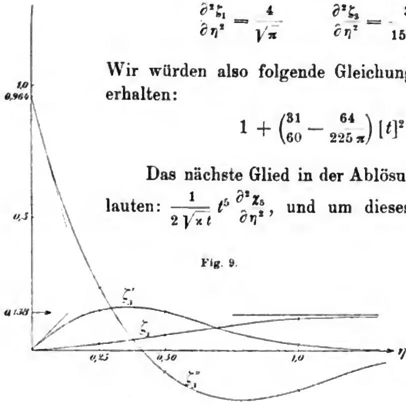


Fig. 9.

Das Entwicklungsglied χ_5 genügt der Gleichung:

$$\frac{\partial^3\chi_5}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\chi_5}{\partial\eta^2} - 20\frac{\partial\chi_5}{\partial\eta} = 4\left[\frac{\partial\chi_3}{\partial\eta}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\,\partial\eta} - \frac{\partial\chi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\chi_3}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\chi_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2\chi_3}{\partial x\,\partial\eta} - \frac{\partial\chi_3}{\partial x}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\eta^2}\right].$$

Das Eingehen von x in χ_1 und χ_3 ist bekannt, und durch Ausrechnen der rechten Seite überzeugt man sich, daß χ_5 die Form:

$$\chi_5 = w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \zeta_5 + w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\zeta_{5a}$$

erhält.

Wir erhalten als Bedingung der Ablösung, da sich tw (s. oben) heraushebt:

$$\left[\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\eta^2}\right]_{\eta=0} + t^2\frac{\partial w}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial\eta^2}\right]_{\eta=0} + t^4\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial^2\zeta_5}{\partial\eta^2}\right]_{\eta=0} + t^4\, w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2\zeta_{5a}}{\partial\eta^2}\right]_{\eta=0} = 0.$$

6. Zu leisten ist noch die Berechnung der Koeffizienten $\left[\frac{\partial^2\zeta_5}{\partial\eta^2}\right]_{\eta=0}$ und $\left[\frac{\partial^2\zeta_{5a}}{\partial\eta^2}\right]_{\eta=0}$:

Für ζ_5 haben wir die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^3\zeta_5}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\zeta_5}{\partial\eta^2} - 20\frac{\partial\zeta_5}{\partial\eta} = \underbrace{8\frac{\partial\zeta_1}{\partial\eta}\frac{\partial\zeta_3}{\partial\eta} - 4\zeta_1\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial\eta^2} - 4\zeta_3\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\eta^2}}_{=f(\eta)}$$

und die Grenzbedingungen:

$$\zeta_5 = 0, \ \frac{\partial \zeta_5}{\partial \eta} = 0 \ \text{für} \ \eta = 0; \qquad \frac{\partial \zeta_5}{\partial \eta} \ \text{für} \ \eta = \infty.$$

Die eingeprägte Kraft $f(\eta)$ ist aus den oben angeschriebenen Funktionen bekannt. Den gesuchten Koeffizienten $\left[\frac{\partial^2 \zeta_5}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0}$ berechnen wir nach dem Greenschen Verfahren in folgender Weise:

$$\int_0^\infty \vartheta \left(\frac{\partial^3 \zeta_5}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \zeta_5}{\partial \eta^2} - 20 \frac{\partial \zeta_5}{\partial \eta}\right) d\eta = \left[\vartheta \frac{\partial^2 \zeta_5}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \zeta_5}{\partial \eta} + 2\eta \vartheta \frac{\partial \zeta_5}{\partial \eta}\right]_0^\infty$$
$$+ \int_0^\infty \frac{\partial \zeta_5}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \eta \vartheta}{\partial \eta} - 20 \vartheta\right) d\eta$$

Lassen wir nun ϑ der adjungierten Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} - 22 \vartheta = 0$$

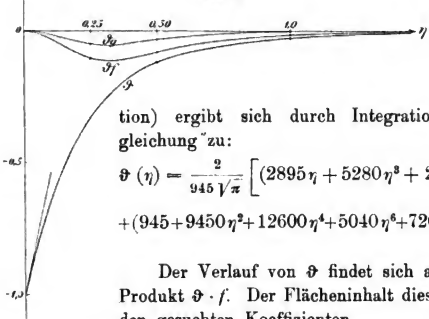
und den Grenzbedingungen:

$$\vartheta(0) = -1 \qquad \vartheta(\infty) = 0$$

genügen, so erhalten wir:

$$\left[\frac{\partial^2 \zeta_5}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} = \int_0^\infty \vartheta \cdot f \cdot d\eta$$

Fig. 10.



$f(\eta)$ ist schon oben angegeben; der Einflußkoeffizient ϑ (Greensche Funktion) ergibt sich durch Integration seiner Differentialgleichung zu:

$$\vartheta(\eta) = \frac{2}{945\sqrt{\pi}} \Big[(2895\eta + 5280\eta^3 + 2352\eta^5 + 352\eta^7 + 16\eta^9)$$
$$+ (945 + 9450\eta^2 + 12600\eta^4 + 5040\eta^6 + 720\eta^8 + 32\eta^{10}) e^{\eta^2} \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta\Big].$$

Der Verlauf von ϑ findet sich auf Fig. 10, ebenso das Produkt $\vartheta \cdot f$. Der Flächeninhalt dieser letzten Kurve liefert den gesuchten Koeffizienten.

Ebenso haben wir zur Berechnung von $\left[\frac{\partial^2 \zeta_{5a}}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0}$ die Gleichungen:

$$\frac{\partial^3 \zeta_{5a}}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \zeta_{5a}}{\partial \eta^2} - 20 \frac{\partial \zeta_{5a}}{\partial \eta} = 4\left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} \frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta} - \zeta_3 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2}\right] = g(\eta)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \zeta_{5a}}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} = \int_0^\infty \vartheta \cdot g \cdot d\eta$$

$\vartheta \cdot g$ ist den unten angegebenen Werten nach auf Fig. 10 gezeichnet.

Die berechneten Werte sind folgende:

η	0	0,25	0,50	1,00	1,50	∞
ζ_1	0	0,061	0,211	0,638	—	$\eta - 0{,}376$
$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}$	0	0,450	0,720	0,943	—	1
$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2}$	2,26	1,396	0,799	0,201	0,035	0
ζ_3	0	0,022	0,060	0,115	—	0,138
$\frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta}$	0	0,137	0,150	0,020	—	0
$\frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial \eta^2}$	0,964	0,231	— 0,092	— 0,156	— 0,05	0
$f(\eta)$	0	0,315	0,750	0,457	—	0
$\vartheta(\eta)$	— 1	— 0,327	— 0,112	— 0,018	—	0
$\vartheta \cdot f$	0	— 0,103	— 0,084	— 0,008	—	0
$g(\eta)$	0	0,124	0,240	— 0,016	—	0
$\vartheta \cdot g$	0	— 0,041	— 0,027	0,0003	—	0

Der Flächeninhalt der beiden Kurven ist ungefähr:

$$\left[\frac{\partial^2 \zeta_5}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} = -0{,}058\,; \quad \left[\frac{\partial^2 \zeta_{5a}}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} = -0{,}023\,.$$

7. Als Ablösungsgleichung erhalten wir daher:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} + [t]^2 \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{31}{15\sqrt{\pi}} - \frac{256}{225\sqrt{\pi^3}}\right) - [t]^4 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \cdot 0{,}058 - [t]^4 w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot 0{,}023 = 0$$

oder:

$$1 + 0{,}427 \cdot [t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} - 0{,}026 \cdot [t]^4 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 0{,}01 \cdot [t]^4 w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,.$$

Da das neu hinzutretende Korrektionsglied sogar negativ ist, so scheint die Existenz der Nullstelle sicher zu sein.

Die Lage und Zeit der Ablösung folgt nach der früheren Näherung (ohne das zuletzt noch berechnete Glied) zu:

$$[t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = -2{,}34\,.$$

Mit der neu berechneten Korrektion erhalten wir für den Fall eines zur Stromrichtung symmetrischen Zylinders, wo für den hinteren Punkt, in dem die Ablösung beginnt, $w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ ist:

$$[t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = -2{,}08\,.$$

Also ungefähr 10% Fehler. Hiernach läßt sich die Güte der Annäherung wohl auch bei den anderen Problemen, bei denen wir nur die ersten beiden Potenzen mitgenommen haben, beurteilen.

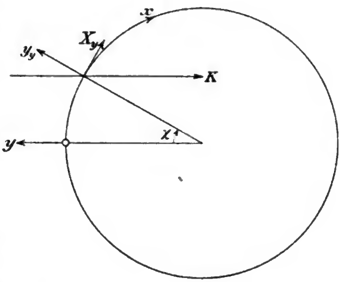
V. Anwendung der Resultate der Ablösungsprobleme auf den Kreiszylinder.

1. Beim Kreiszylinder ist:

$$\bar{u} = 2V \sin \frac{x}{R}.$$

$\frac{x}{R}$ sei als reduzierte Koordinate X genannt, V ist die Geschwindigkeit, mit der die parallele Strömung nach rechts fließt, bez. der Zylinder nach links bewegt wird.

Fig. 11.



Im stationären Fall tritt nach II (7) die Ablösung ein bei $x_{Abl} = 0{,}65 \sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$, das Maximum der Geschwindigkeit liegt bei:

$$x_{Max} = 0{,}577 \sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$$

wobei:

$$\bar{u} = q_0 x - q_1 x^3.$$

Nimmt man die gewöhnliche Potenzentwicklung des Sinus, so wird $q_0 = \frac{2V}{R}$, $q_1 = \frac{2V}{6R^3}$

$$x_{Abl} = 1{,}59 \cdot R, \quad X_{Abl} = 91\tfrac{1}{4}^0; \qquad x_{Max} = 1{,}41 \cdot R, \quad X_{Max} = 81^0.$$

Nähert man dagegen den Sinus im Intervall $0 - \pi$ nach der Methode der kleinsten Quadrate an, so wird:

$$q_0 = \frac{2V}{R} \cdot 0{,}856, \qquad q_1 = \frac{2V}{R^3} \cdot 0{,}093$$

$$x_{Abl} = 1{,}97 \cdot R, \qquad X_{Abl} = 113^0$$

$$x_{Max} = 1{,}75 \cdot R, \qquad X_{Max} = 101^0.$$

Jedenfalls liegt der Ablösungspunkt nach unserer Rechnung um 11—12% des ganzen Weges der Grenzschicht hinter dem Maximum der Geschwindigkeit. Auf Genauigkeit macht diese Angabe freilich keinen Anspruch, da nur die beiden ersten Potenzen von x berücksichtigt sind. Außerdem zeigen experimentelle Aufnahmen des Druckgefälles, daß der Zustand in der Nähe der Ablösung überhaupt schwerlich durch

Entwicklung vom Anfangspunkt der Grenzschicht aus erreichbar ist, da er zu stark durch die Druckverteilung der Wirbelkörper hinter dem Zylinder beeinflußt ist. Vorstehende Rechnungen haben daher lediglich den Zweck, zu zeigen, daß tatsächlich durch die hydrodynamischen Gleichungen Ablösung geliefert wird. Die weitere Ausbildung der Rechenmethoden, insbesondere für die wichtigeren Probleme der Rotationskörper, verspricht daher Erfolg.

2. Wird der Zylinder mit konstanter Geschwindigkeit plötzlich in Bewegung gesetzt, so ist:

$$u = 2V \sin X \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2V}{R} \cos X.$$

Die Ablösungszeit $[t]$ ist nach III (6) gegeben durch:

$$\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)[t]\frac{\partial u}{\partial x} = -1$$

$$[t] = -0{,}35 \frac{R}{V\cos X}.$$

Die Ablösung beginnt bei $X = \pi$, $\cos X = -1$ zur Zeit:

$$t_0 = 0{,}35 \frac{R}{V}.$$

Der Zylinder hat also bis dahin einen Weg

$$S = Vt_0 = 0{,}35 \cdot R$$

zurückgelegt. Alles dies ist von Geschwindigkeit, Dichte, Reibungskoeffizient unabhängig (natürlich kleine Reibung vorausgesetzt).

3. Bei konstanter Beschleunigung ist:

$$\bar{u} = tw(x) = 2Vt \sin \frac{x}{R}$$

wo jetzt V die Beschleunigung des Zylinders in der Strömung ist. Die Ablösungszeit ist (IV 7) für den Beginn der Ablösung:

$$[t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = -2{,}34 \quad \text{bez.} \quad = -2{,}08$$

oder:

$$[t]^2 = -1{,}17 \frac{R}{V\cos X} \quad \text{bez.} \quad = -1{,}04 \frac{R}{V\cos X}.$$

Vom Zylinder zurückgelegter Weg:

$$S = \tfrac{1}{2} Vt^2$$

beim Beginn der Ablösung ($X = \pi$)

$$S = 0{,}59 \cdot R \quad \text{bez.} \quad = 0{,}52 \cdot R.$$

4. Wir berechnen noch den Widerstand, den bei konstanter Beschleunigung der Zylinder erfährt. — Die Spannungskomponenten sind:

$$Y_y = -p + 2k\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$X_y = k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Infolge der Kleinheit der Reibung fallen $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ gegen $\frac{\partial u}{\partial y}$ fort, und es bleibt als Kraft in Richtung der äußeren Strömung:

$$K = 2 \cdot B\int_0^\pi \left(p\cos X + k\frac{\partial u}{\partial y}\sin X\right) \cdot R\,d\,X$$

wobei B die Breite der Schicht (Höhe des eingetauchten Zylinderteiles) ist.

Den Anteil des Druckes berechnen wir so:

$$K_{\text{Druck}} = 2BR\int_0^\pi p\cos X\,d\,X = -2BR^2\int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial x}\sin X\,d\,X.$$

Nun ist:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) \qquad \bar{u} = tw$$

$$= \varrho\left(w + t^2 w\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad w = 2V\sin X.$$

Das zweite Glied fällt bei der Integration fort, das erste liefert:

$$K_{\text{Druck}} = 2\pi\varrho BR^2 V$$

also eine Vermehrung der Trägheit um den doppelten Betrag der verdrängten Flüssigkeit. Der Anteil der Reibung ist,

$$K_{\text{Reibung}} = \frac{2kBR}{2\sqrt{\varkappa t}}\int_0^\pi \left(tw\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\eta^2} + t^3 w\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial\eta^2}\right)\sin X\,d\,X.$$

Hierbei war $\varkappa = k/\varrho$. Auch hier fällt das zweite Glied fort, denn $\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\eta^2}$ und $\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial\eta^2}$ sind ja nur Konstanten, und wir erhalten:

$$K_{\text{Reibung}} = 4\sqrt{\pi\varrho k t} \cdot BRV.$$

5. Um ein Bild von den Strömungsverhältnissen zu geben, die unseren Formeln entsprechen, sollen zum Schluß für ein bestimmtes

Bewegungsstadium des gleichförmig beschleunigten Zylinders die Stromkurven gezeichnet werden. Die Parameter R, V, $\varkappa$ sind willkürlich, wir müssen daher für x, y, t, ψ, u reduzierte Größen einführen, so daß R, V, $\varkappa$ aus unseren Formeln herausfallen. Dies geschieht durch:

$$x = RX, \quad t = \sqrt{\frac{R}{V}}\,T, \quad y = \sqrt[4]{\frac{R\varkappa^2}{V}}\,Y,$$

$$\psi = \sqrt[4]{R^3\varkappa^2 V}\,\Psi, \qquad u = \sqrt{RV}\,U,$$

wodurch aus den Formeln (vergl. IV 2 und V 3):

$$\psi = 2\sqrt{\varkappa}\,t^{3/2} w\left(\zeta_1 + t^2 \frac{\partial w}{\partial x}\zeta_3\right),$$

$$u = tw\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} + t^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta}\right),$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}},$$

$$w = 2V\sin\frac{x}{R},$$

$$t^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 2\,\frac{Vt^2}{R}\cos\frac{x}{R}$$

folgende reduzierte Gleichungen entstehen:

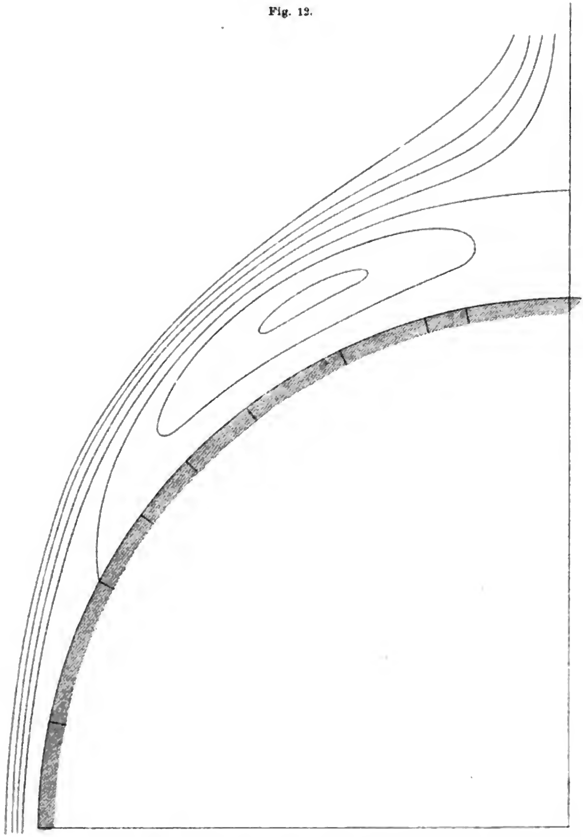
$$\Psi = 4T^{3/2}\sin X \cdot (\zeta_1 + 2T^2\cos X \cdot \zeta_3)$$

$$U = 2T\sin X \cdot \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} + 2T^2\cos X \cdot \frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta}\right),$$

$$\eta = \frac{Y}{2\sqrt{T}},$$

aus denen wir zunächst für eine feste Zeit T für eine Reihe von Koordinatenwerten X die Kurve Ψ als Funktion von $Y = 2\sqrt{T}\cdot\eta$ konstruieren müssen, um dann die Lage der Werte $\Psi = \text{const}$ aus diesen Kurven ablesen zu können. In Fig. 12 ist der Zylinder von $X = \pi/2$ bis $X = \pi$ gezeichnet. Die Ablösungszeit ist gegeben durch $2T^2\cos X = -2{,}34$, also der Beginn der Ablösung durch $T = 1{,}08$. In nebenstehender Figur ist $2T^2 = 5$, also $T = 1{,}58$ gewählt. Für die gewählte Zeit ist der Ablösungspunkt bereits bis über 60^0 am Zylinder fortgeschritten, trotzdem ist die Grenzschicht noch ziemlich dünn, die Größenverhältnisse entsprechen den Werten $R = 10$ cm, $\varkappa = 0{,}01\,\frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}$ (Wasser), $V = 0{,}1\,\frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$, also einer sehr kleinen Beschleunigung. Hiernach ist dann: $t = 15{,}8$ sek.

Fig. 12.



Für $V = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$ erhielte man nach obigen Reduktionsformeln vorstehendes Bild nach 1,58 sek. Die Dicke der Grenzschicht wäre im Verhältnis $1 : \sqrt{10}$ verkleinert.

Die Grundgleichungen der Kinetostatik der Körperketten mit Anwendungen auf die Mechanik der Maschinen.

Von Karl Heun in Karlsruhe (Baden).

Der Begriff der Actio und Reactio zweier aufeinander wirkender Körper geht zurück auf Newton. Doch fehlt bei ihm eine klare mathematische Definition dieses Begriffs, sobald allgemeine Systeme, ja selbst sobald starre Körper in Betracht kommen. Im Jahre 1686 hat Jakob Bernoulli das erste kinetostatische Problem[1]) bei zeitlich wirkenden Kräften in einem sehr speziellen Falle in Angriff genommen. Er behandelt die Schwingungsdauer des physischen Pendels, die bereits von Huyghens auf Grund des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kraft (1658) vollständig richtig gefunden war, auf Grund der Gleichgewichtsbedingung, welchen die Reaktionen der einzelnen Massenpunkte genügen müssen. Ein Irrtum in der rechnerischen Ausführung macht das Resultat illusorisch, aber bereits im Jahre 1690 berichtigt de l'Hospital in dem Journal de Rotterdam dieses Versehen und ermöglicht es dadurch Jakob Bernoulli in den Act. eruditor. für 1691 den allgemeinen Fall (d. h. bei beliebiger Massenverteilung) zu erledigen.

Ein halbes Jahrhundert mußte dahingehen, ehe diese Keime einer Mechanik gebundener Systeme und insbesondere eine klare Erfassung des Spannungszustandes der einfachen Systeme die allgemeine Formulierung gewann. Dies ist erst durch D'Alemberts „Traité de Dynamique" im Jahre 1743 ausgeführt. Allerdings betrachtet D'Alembert in diesem grundlegenden Werke die Reaktionen nur, um diejenigen statischen Reduktionskomponenten zu finden, deren Nullsetzung die *Bewegungsgleichungen* des gebundenen Systems liefert. Direkte kinetostatische Interessen treten erst später bei Euler und Lagrange auf.

In der vorliegenden Arbeit sind die elementaren Methoden der Kinetostatik auf eine bestimmte Gruppe von Systemen angewendet. Diese betreffen verhältnismäßig einfache Systeme aus starren Körpern, die miteinander durch Gelenke verbunden sind, so daß sie eine *Kette* bilden.

Es erschien vorteilhaft, zwischen zwei wesentlich verschiedenen Arten von Reaktionen zu unterscheiden, welche hier als *spezifische* und

---

1) Für Momentankräfte (Centrum percussionis) war dies bereits 1646 von Cartesius geschehen.

absolute bezeichnet sind, und von denen die letzteren bisher am meisten behandelt wurden. Auf sie beziehen sich auch die Anwendungen, welche hier von den kinetostatischen Grundgleichungen auf die in der Maschinenmechanik wichtigen Körperketten (Kurbelgetriebe, Wattscher Regulator) ausgeführt oder nur skizziert sind.

Bei allen diesen Untersuchungen kann man die Vektoren der Systembeschleunigung durch Einführung der *Fischerschen Hauptpunkte*[1]) umformen und gewinnt dadurch eine durchsichtigere Gestaltung der Formeln sowohl in der Eulerschen[2]) als in der Lagrangeschen Darstellungsweise.

Als Grenzfälle der Körperketten wurden in der zweiten Hälfte der vorliegenden Untersuchungen unelastische, bandförmige Kontinua behandelt, deren Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen sich in sehr einfacher, und wie ich glaube, natürlicher Weise an die Körperketten anschließen.

Von der ebenfalls in dieses Gebiet gehörenden Theorie elastischer Drähte mit kleinem aber endlichem Querschnitt konnte hier abgesehen werden, da gerade dieser Teil der Mechanik der Kontinua bisher die weitgehendste Ausbildung erfahren hat.

1. *Der D'Alembertsche Ansatz und das D'Alembertsche Prinzip.* Nach dem zweiten Newtonschen Grundgesetz der Bewegung: „*Mutationem motus* proportionalem esse *vi motrici impressae* et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur" gilt für die Beschleunigung eines *frei* beweglichen Punktes von der Masse μ die fundamentale Gleichung[3])

(I) $$\bar{k} = \frac{d(\mu \bar{v})}{d\tau},$$

wenn $\bar{k}$ die „*eingeprägte*" Kraft, $\bar{v}$ den Vektor der Geschwindigkeit und $d\tau$ das konstante Zeitelement bedeutet. Setzen wir also *konstante* Massen voraus, und bezeichnen wir die Beschleunigung $\frac{d\bar{v}}{d\tau}$ mit $\bar{w}$, so nimmt die vorstehende Gleichung die Form an

(I′) $$\bar{k} = \mu \bar{w}.$$

Sobald jedoch der bewegliche Massenpunkt durch Beschränkungen irgend welcher Art verhindert wird, die *freie* Bahn einzuschlagen, muß

1) O. Fischer. Theoretische Grundlagen der Mechanik lebender Körper, Leipzig 1906.

2) Man vergl. meine *Kinematik*, Leipzig 1906, S. 309—314. In der Folge ist diese Schrift einfach als „Kinematik" mit Seitenangabe zitiert.

3) Alle gerichteten Größen sind durch einen übergesetzten Strich bezeichnet.

diese Grundformel eine wesentliche Modifikation erleiden. Es tritt eine Zusatzkraft $\bar{r}$ — die *Elementarreaktion* — zur eingeprägten Kraft derart hinzu, daß die Resultante $(\bar{k}+\bar{r})$ derjenigen Massenbeschleunigung $\mu\bar{w}$ gleich wird, die der Punkt auch besäße, wenn er die ihm aufgezwungene Bahn als *freie* Bahn durchliefe. Es besteht also jetzt die Grundformel:

$$\text{(A)} \qquad \bar{k}+\bar{r}=\mu\bar{w},$$

welche wir den D'Alembertschen *Ansatz* nennen wollen, da sie zuerst in seinem „Traité de Dynamique" (1743) *allgemein* formuliert ist. Diese Gleichung drückt nur aus, daß die eingeprägte Kraft $\bar{k}$, die Elementarreaktion $\bar{r}$ und die mit entgegengesetztem Vorzeichen versehene Massenbeschleunigung $-\mu\bar{w}$, die sogenannte *Trägheitskraft*, ein geschlossenes Kräftepolygon bilden. Da aber hierin $\mu\bar{w}$ vorläufig unbekannt ist, so muß noch eine weitere Bestimmung zu Gleichung (A) hinzutreten. Diese gibt uns das D'Alembertsche *Prinzip*. Es lautet in präziser Form: Die Elementarreaktionen $\bar{r}$ bilden an dem materiellen gebundenen System ein Kräftesystem, welches während der Bewegung des materiellen Systems beständig im Gleichgewicht ist. Gelingt es also durch diese Eigenschaft der Elementarreaktionen, die *Elementarbeschleunigungen* $\bar{w}$ aller Punkte des gebundenen Systems eindeutig und für die explizite Auswertung ausreichend zu bestimmen, dann sind nach Gleichung (A) *alle* Elementarreaktionen bekannt. Die Ausführung dieses Gedankens verlangt zwei vollständig getrennte Schritte, nämlich erstens die Aufstellung der *Bewegungsgleichungen* des gebundenen Systems durch die Einführung bestimmter kinematischer und dynamischer[1]) *Systemgrößen* und zweitens die Aufstellung von Gleichungen, welche *alle* Elementarbeschleunigungen $\bar{w}$ eindeutig durch die kinetischen Systemgrößen ausdrücken. Das zweite Problem gehört speziell der Kinetostatik an.

2. *Die kinetischen Gleichungen in der Langrangeschen Form.* Wir beziehen jeden Punkt (X) des gebundenen Systems auf einen festen Punkt O des Raumes und bezeichnen die Strecke OX nach Größe und Richtung mit $\bar{x}$, die mit der Bewegungsmöglichkeit des Systems verträgliche virtuelle Verrückung des Angriffspunktes einer Kraft mit $\delta\bar{x}$. Dann ist die virtuelle Arbeit der Elementarreaktion $\bar{r}$ gleich

$$r\cdot\cos(\bar{r}/\delta\bar{x})\cdot\delta x\equiv\bar{r}\,\delta\bar{x}.$$

Das Symbol $\bar{r}\,\delta\bar{x}$ kann man in der Mechanik das *Arbeitsprodukt* der

1) Die Worte „dynamisch" und „kinetisch" gebrauche ich in demselben Sinne, wie W. Thomson und Tait in ihrem Treatise on natural philosophy.

Strecken $\bar{r}$ und $\delta\bar{x}$ nennen. Der analytische Ausdruck für das Prinzip der virtuellen Arbeiten ist im gegenwärtigen Falle[1])

$$(B)\qquad S\bar{r}\delta\bar{x} = 0$$

und gleichbedeutend mit der Formulierung des D'Alembertschen Prinzips. Mit Rücksicht auf Gleichung (A) schreibt man die letzte Gleichung auch in der Form

$$(C)\qquad S\mu\bar{w}\delta\bar{x} = S\bar{k}\delta\bar{x}.$$

Sie zerfällt unter der Annahme, daß alle $\bar{x}$ Funktionen einer gewissen Anzahl (ν) Koordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_\nu$ sind, welche die Lage und Gestalt des gebundenen Systems eindeutig festlegen, wegen der Beziehungen:

$$(1)\qquad \delta\bar{x} = \frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_1}\delta\vartheta_1 + \frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_2}\delta\vartheta_2 + \cdots + \frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_\nu}\delta\vartheta_\nu \equiv \sum_\iota \frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_\iota}\delta\vartheta_\iota$$

in die folgenden

$$(D)\qquad \begin{cases} S\mu\frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_1}\bar{w} = S\frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_1}\bar{k} \\ S\mu\frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_2}\bar{w} = S\frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_2}\bar{k} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ S\mu\frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_\nu}\bar{w} = S\frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_\nu}\bar{k}. \end{cases}$$

Dies sind die *kinetischen* Gleichungen des gebundenen holonomen Systems von ν Freiheitsgraden. Durch Einführung der kinetischen Energie des ganzen Systems

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}S\mu v^2$$

und der Bezeichnung $\dot{\vartheta}_\iota = \frac{d\vartheta_\iota}{d\tau}$ wird nach Lagrange:

$$(2)\qquad S\mu\frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_\iota}\bar{w} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathsf{E}}{\partial\dot{\vartheta}_\iota}\right) - \frac{\partial\mathsf{E}}{\partial\vartheta_\iota} \equiv \mathsf{Q}_\iota.$$

Setzt man also auch

$$(3)\qquad S\frac{\partial\bar{x}}{\partial\vartheta_\iota}\bar{k} = \mathsf{K}_\iota,$$

dann lassen sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen durch Benutzung der kinematischen Systemgrößen Q_ι und der dynamischen Systemgrößen K_ι in der Form

$$(II)\qquad \mathsf{K}_1 = \mathsf{Q}_1,\quad \mathsf{K}_2 = \mathsf{Q}_2,\quad \ldots \mathsf{K}_\nu = \mathsf{Q}_\nu$$

1) Das Summationszeichen S bezieht sich hier und im Folgenden auf alle Punkte des gebundenen Systems.

schreiben, welche wir im Folgenden gleichzeitig mit der Abkürzung

(4) $$\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}_\iota} = \mathsf{P}_\iota$$

verwenden wollen.

Die Gleichungen (II) entsprechen in gewissem Sinne der Newtonschen Grundgleichung (I′) für die Bewegung eines *freien* Massenpunktes.

3. *Ausdruck der Elementarreaktionen durch die Systemgrößen in den kinetischen Gleichungen.* Nach Gleichung (1) ist die Geschwindigkeit für einen beliebigen Punkt des gebundenen Systems

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{v} = \sum_\iota \frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_\iota} \cdot \frac{d\vartheta_\iota}{d\tau} \equiv \sum_\iota \bar{e}_\iota \cdot \dot{\vartheta}_\iota .$$

Aus Gleichung (4) folgt dabei, da E eine homogene Funktion zweiten Grades der Koordinatengeschwindigkeiten $\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \ldots \dot{\vartheta}_\nu$ ist, daß P_ι die lineare Form

$$\mathsf{P}_\iota = \sum_\iota a_\iota \cdot \dot{\vartheta}_\iota$$

besitzt. Nach diesen Gleichungen lassen sich die $\dot{\vartheta}_\iota$ linear durch die P_ι ausdrücken und man sieht, daß man die Geschwindigkeit in der Form

(5) $$\bar{v} = \sum_\iota \bar{\mathfrak{f}}_\iota \cdot \mathsf{P}_\iota$$

darstellen kann. Es ist also die Beschleunigung

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \sum_\iota \bar{\mathfrak{f}}_\iota \cdot \dot{\mathsf{P}}_\iota + \sum_\iota \dot{\bar{\mathfrak{f}}}_\iota \cdot \mathsf{P}_\iota .$$

Die Größen $\bar{\mathfrak{f}}_\iota$ sind Funktionen der Koordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_\nu$. Mithin wird

$$\frac{d\bar{\mathfrak{f}}}{d\tau} = \sum_\lambda \frac{\partial \bar{\mathfrak{f}}_\iota}{\partial \vartheta_\lambda} \cdot \dot{\vartheta}_\lambda$$

und

$$\sum_\iota \dot{\bar{\mathfrak{f}}} \cdot \mathsf{P}_\iota = \sum_\iota \sum_\lambda \frac{\partial \bar{\mathfrak{f}}_\iota}{\partial \vartheta_\lambda} \mathsf{P}_\iota \dot{\vartheta}_\lambda .$$

Ferner ist nach der Gleichung (2)

$$\dot{\mathsf{P}}_\iota = \mathsf{Q}_\iota + \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta_\iota} .$$

Der obige Ausdruck für die Elementarbeschleunigung wird also

$$\bar{w} = \sum_\iota \mathsf{Q}_\iota \cdot \bar{\mathfrak{f}}_\iota + \sum_\iota \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta_\iota} \cdot \bar{\mathfrak{f}}_\iota + \sum_\iota \sum_\lambda \frac{\partial \bar{\mathfrak{f}}_\iota}{\partial \vartheta_\lambda} \mathsf{P}_\iota \dot{\vartheta}_\lambda .$$

Hiervon lassen sich alle $\dot{\vartheta}_\lambda$ wieder linear durch die P ausdrücken, und man erkennt sofort, daß der auf $\sum_\iota \mathsf{Q}_\iota \bar{\mathfrak{f}}_\iota$ folgende Bestandteil von $\bar{w}$ auf die Form

$$\sum_\iota \sum_\lambda \bar{\Gamma}_{\iota\lambda} \cdot \mathsf{P}_\iota \mathsf{P}_\lambda$$

gebracht werden kann. Die ν^2 gerichteten Größen $\bar{\Gamma}_{\iota\lambda}$ sind nur von den Koordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_\nu$ abhängig. Wir erhalten jetzt endgültig den Ausdruck[1])

$$\text{(III)} \qquad \bar{w} = \sum_\iota \mathsf{K}_\iota \cdot \bar{\mathfrak{f}}_\iota + \sum_\iota \sum_\lambda \bar{\Gamma}_{\iota\lambda} \cdot \mathsf{P}_\iota \mathsf{P}_\lambda .$$

In demselben lassen sich nun auch umgekehrt alle P durch die $\dot{\vartheta}$ ausdrücken, so daß man auch erhält

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \bar{w} = \sum_\iota \mathsf{K}_\iota \cdot \bar{\mathfrak{f}}_\iota + \sum_\iota \sum_\lambda \bar{c}_{\iota\lambda} \cdot \dot{\vartheta}_\iota \dot{\vartheta}_\lambda .$$

Die hier auftretenden Strecken $\bar{c}_{\iota\lambda}$ sind lineare Funktionen der gerichteten Größen $\bar{\Gamma}_{\iota\lambda}$.

Wegen der geometrischen Bedeutung der gerichteten Größen $\bar{c}_{\iota\lambda}$, $\bar{\mathfrak{f}}_\iota$ kann man sich in J. Sommoffs Kinematik, 1878 deutsch von A. Ziwet Kapitel 8 orientieren.

Da jetzt die Elementarreaktionen nach der Gleichung

$$\bar{r} = \mu \bar{w} - \bar{k}$$

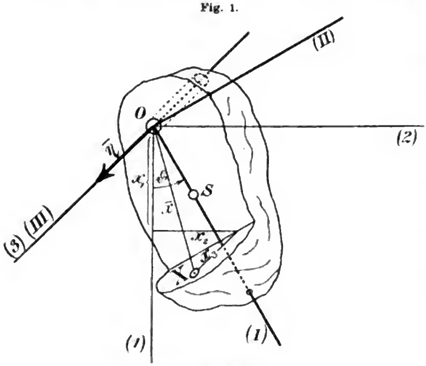
für jeden Punkt des gebundenen Systems bekannt sind, so steht theoretisch nichts im Wege, mit diesen Kräften alle jene statischen Reduktionen vorzunehmen, welche zur Beurteilung der Beanspruchung an einer beliebigen Stelle (Zapfen, Querschnitt eines starren Gliedes des Mechanismus, Auflager) des Systems nach den üblichen Methoden erforderlich sind. In allen — nicht gerade extrem einfachen — Fällen der angewandten Mechanik ist der eben geschilderte Rechnungsgang, der bis zu den Ausdrücken (III) oder (III′) ganz in den Ideen der Lagrangeschen Mechanik verläuft, verhältnismäßig mühsam und wegen der gehäuften Eliminationsprozesse nur für denjenigen in den einzelnen Schritten anschaulich, der sich sehr eingehend mit dieser Auffassung der Mechanik vertraut gemacht hat. Wir werden deshalb im Folgenden diese abstrakte Methode durch eine ganz elementare ersetzen, welche freilich die Gesamtarbeit, die bei der Durchführung eines kinetostatischen Problems zu leisten ist, nicht wirklich herabdrückt, aber durchsichtiger gestaltet.

---

1) Man vgl. Kinematik. S. 139.

4. *Beispiel. Anwendung auf das physische Pendel.* Das körperliche Pendel schwinge um die Achse O (3) [Fig. 1], auf deren positiv gerichteter Seite die Einheitsstrecke $\bar{\eta}$ aufgetragen ist. Wir definieren nun als das Momentprodukt $\overline{ab}$ diejenige Strecke $\bar{c}$, welche auf den beiden Faktoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ senkrecht steht und die Länge $ab \sin(\bar{a}, \bar{b})$ hat. Dann ist im vorliegenden Falle, wenn wir annehmen, daß die Schwerpunktslinie OS sich um den Winkel ϑ gegen die Ruhelage gedreht hat, offenbar

Fig. 1.



$OS = a^*$.

$$\bar{v} = \overline{\eta x} \cdot \dot{\vartheta}.$$

Folglich

$$v^2 = x^2 \cdot \dot{\vartheta}^2,$$
$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}[S\mu x^2] \cdot \dot{\vartheta}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathsf{T} \cdot \dot{\vartheta}^2,$$

wenn T das *Trägheitsmoment* um seine Drehachse bedeutet. Demnach wird

$$\mathsf{P} = \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \dot{\vartheta}} = \mathsf{T} \cdot \dot{\vartheta}, \quad \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial \vartheta} = 0, \quad \dot{\mathsf{P}} = \mathfrak{Q} = \mathsf{K} = [S\overline{xk}]\bar{\eta}.$$

Man hat also

$$\dot{\vartheta} = \frac{\mathsf{P}}{\mathsf{T}}, \quad \bar{v} = \frac{\overline{\eta x}}{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{P},$$

$$\bar{w} = \frac{\overline{\eta x}}{\mathsf{T}} \cdot \dot{\mathsf{P}} + \frac{\overline{\eta v}}{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{P},$$

$$\overline{\eta v} = \overline{\eta(\overline{\eta x})} \cdot \dot{\vartheta} = [(\bar{\eta}\bar{x}) \cdot \bar{\eta} - \bar{x}] \cdot \dot{\vartheta},$$

Hieraus folgt

$$\bar{w} = \frac{\overline{\eta x}}{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{K} + \frac{1}{\mathsf{T}^2}[(\bar{x}\bar{\eta}) \cdot \bar{\eta} - \bar{x}] \cdot \mathsf{P}^2$$

oder

$$\bar{w} = \frac{\overline{\eta x}}{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{K} + [(\bar{\eta}\bar{x}) \cdot \bar{\eta} - \bar{x}] \cdot \dot{\vartheta}^2.$$

Es ist also

$$\bar{\mathfrak{f}} = \frac{\overline{\eta x}}{\mathsf{T}}, \quad \bar{c} = (\bar{\eta}\bar{x}) \cdot \bar{\eta} - \bar{x}.$$

Ohne weiteres findet man

$$\mathsf{K} = -\mu^* g \sin\vartheta \cdot a^*,$$

wo g die Beschleunigung der Erdschwere, μ^* die Masse des Pendels und a^* den Schwerpunktsabstand von der Drehachse bedeutet. Das im Raume ruhende Koordinatensystem ist in der Figur gekennzeichnet durch $O_{(1)(2)(3)}$. Wir legen ein im Körper ruhendes Achsenkreuz $O_{(\mathrm{I})(\mathrm{II})(\mathrm{III})}$ fest durch die Bedingung, daß der Schwerpunkt S in der Richtung $O_{(\mathrm{I})}$ liegen soll. Die Zerlegung nach dem ruhenden Achsenkreuz gibt

$$w_1 = -\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{T}} x_2 - x_1 \cdot \dot{\vartheta}^2, \quad w_2 = \frac{\mathsf{K}}{\mathsf{T}} x_1 - x_2 \cdot \dot{\vartheta}^2, \quad w_3 = 0.$$

Hierin ist

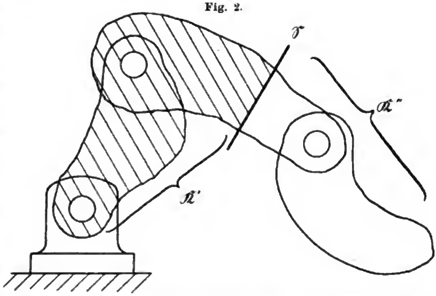
$$x_1 = x_{\mathrm{I}} \cos\vartheta - x_{\mathrm{II}} \sin\vartheta, \quad x_2 = x_{\mathrm{I}} \sin\vartheta + x_{\mathrm{II}} \cos\vartheta.$$

Es ergeben sich also die Komponenten der Elementarreaktion aus den Gleichungen

$$r_1 = \mu w_1 - \mu g, \quad r_2 = \mu w_2,$$

in denen alle Größen bekannt sind. μ ist die infinitesimale Masse in dem betreffenden Punkt $(x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{III}})$.

Fig. 2.



5. *Spezifische Reaktionen.* Wir legen durch ein beliebiges System, dessen Lage und Gestalt bekannt ist, sobald die Koordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_\nu$ gegebene Werte besitzen, irgendwo [Figur 2] einen Schnitt 𝔖. Hierdurch zerfällt das System in zwei Teile, denen die *statischen Reduktionen* nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$S'\bar{r}\,\delta\bar{x} = \sum_\iota \mathsf{R}'_\iota \delta\vartheta_\iota, \quad S''\bar{r}\,\delta\bar{x} = \sum_\iota \mathsf{R}''_\iota \delta\vartheta_\iota$$

entsprechen. Die Indizes an den Summenzeichen S beziehen sich auf die beiden durch den Schnitt entstehenden Systemteile. Nach Gleichung (B) ist aber

$$\mathsf{R}'_\iota + \mathsf{R}''_\iota = 0 \quad \text{für} \quad \iota = 1, 2, \ldots \nu.$$

Führt man nur die Summation über die virtuellen Arbeiten der Elementarreaktionen über den ersten Systemteil (𝔎′) aus, dann wird nach Gleichung (A):

(IV) $$\mathsf{K}'_\iota + \mathsf{R}'_\iota = \mathsf{Q}'_\iota. \qquad \iota = 1, 2, \ldots \nu.$$

Die Systemgrößen $\mathbf{Q}'_\iota$ sind definiert durch die Gleichung

$$S'\mu\bar{w}\delta\bar{x} = \sum \mathbf{Q}'_\iota \cdot \delta\vartheta_\iota,$$

wobei man allerdings beachten muß, daß die in den $\mathbf{Q}'_\iota$ vorkommenden Koordinatenbeschleunigungen $\ddot{\vartheta}_1, \ddot{\vartheta}_2, \ldots \ddot{\vartheta}_\nu$ aus den Differentialgleichungen für die Bewegung des *ganzen* Systems:

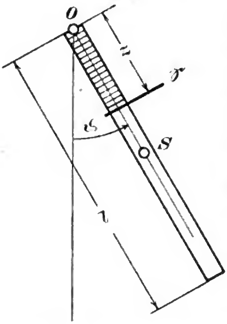
$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{K}_2, \quad \ldots \mathbf{Q}_\nu = \mathbf{K}_\nu$$

zu entnehmen sind, wenn man sich nicht von vornherein der Gleichung (III′) bedienen will. Jedenfalls sind die $\mathbf{Q}'_\iota$ in diesem Sinne vollständig bestimmte Systemgrößen. Sie treten als die Lagrangeschen Komponenten der Beschleunigung des dem Schnitte $\mathfrak{S}$ *vorangehenden* Teilsystems ($\mathfrak{K}'$) auf. Den so bestimmten Beschleunigungszustand würde das Teilsystem $\mathfrak{K}'$ tatsächlich besitzen, wenn es seine erzwungene Bewegung *frei*, d. h. ohne Verbindung mit dem auf den Schnitt $\mathfrak{S}$ *folgenden* Teilsystem $\mathfrak{K}''$ ausführte. Dies kann jedoch nicht unter der Einwirkung der dynamischen Systemkomponenten $\mathbf{K}'_1, \mathbf{K}'_2, \ldots \mathbf{K}'_\nu$, welche durch die Gleichung

$$S'\bar{k}\delta\bar{x} = \sum_\iota \mathbf{K}'_\iota \cdot \delta\vartheta_\iota$$

definiert sind, geschehen, sondern es müssen noch die Reaktionskomponenten $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2, \ldots \mathbf{R}'_\nu$ einzeln *hinzutreten*, wie es den ν Gleichungen (IV) entspricht. Damit ist aber die mechanische Bedeutung dieser Reaktionskomponenten erkannt. Sie bestimmen in ihrer Gesamtheit eine dem Schnitte $\mathfrak{S}$ zugehörige Reaktion, welche wir die *spezifische Schnittreaktion* nennen wollen. Trennt der Schnitt $\mathfrak{S}$ zwei aufeinander folgende starre Glieder des Systems, welche gelenkig miteinander verbunden sind, so sprechen wir im besonderen von einer *spezifischen Gelenkreaktion.* Das Wesentliche dieser kinetostatischen Begriffe erkennt man am leichtesten an einem ganz einfachen Beispiel, zu welchem wir jetzt übergehen.

Fig. 3.



6. *Die spezifische Schnittreaktion am Stabpendel.* Der gerade, homogene pendelnde Stab sei von der Länge l und besitze einen unendlich kleinen Querschnitt. Der Schnitt $\mathfrak{S}$ werde in der Entfernung z vom Aufhängepunkt O geführt. Jetzt wird mit Rücksicht auf die Bezeichnung in Nr. 4:

$$S'\mu\bar{w}\delta\bar{x} = S'\mu\bar{w}\,\overline{\delta\vartheta\cdot x} = \delta\vartheta\cdot S'\mu\overline{xw}.$$

$S'\mu \overline{xw}$ ist die Summe der Momente der einzelnen Massenbeschleunigungen, also mit $\delta\vartheta$ gleichgerichtet. Demnach hat man $\mathbf{Q}' = \mathbf{T}'\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} \equiv \mathbf{T}'\frac{d\omega}{d\tau}$, wenn $\mathbf{T}'$ das Trägheitsmoment von $\mathfrak{K}'$ in bezug auf O bedeutet. Ferner ist $\mathbf{K}' = -\mu' g \sin\vartheta \cdot z^*$. Hier bezeichnet μ' die ganze Masse von $\mathfrak{K}'$ und $z^* = \frac{z}{2}$ den Schwerpunktsabstand. Dieselbe Größe für den ganzen Körper ist $\frac{l}{2} = a^*$. Für diesen gilt die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{T}\frac{d\omega}{d\tau} = -\mu g \sin\vartheta \cdot a^*.$$

Nun ist nach Gleichung (IV)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{T}'\frac{d\omega}{d\tau} + \mu' g \sin\vartheta \cdot z^* \tag{1}$$

oder nach Elimination von $\frac{d\omega}{d\tau}$

$$\mathbf{R}' = \mu g \sin\vartheta \left(\frac{\mu'}{\mu} z^* - \frac{\mathbf{T}'}{\mathbf{T}} a^*\right). \tag{2}$$

Nun hat man aber die Beziehungen

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{z}{l}, \quad \frac{\mathbf{T}'}{\mathbf{T}} = \frac{z^3}{l^3},$$

also wird

$$\mathbf{R}' = \tfrac{1}{2}\mu\frac{g}{l}\sin\vartheta\left(z^2 - \frac{z^3}{l}\right). \tag{3}$$

Diese Größe ist ihrer statischen Bedeutung nach das Moment aller Elementarreaktionen $\bar{r}$ in bezug auf den Drehpunkt O. Jetzt können wir in den Reaktionsprozeß bei der Pendelbewegung klar hineinblicken. Würde der obere Teil der Pendelstange für sich *frei* schwingen, dann wäre seine Schwingungsdauer[1])

$$\tau'_{00} = 2\pi\sqrt{\frac{T'}{\mu' g z^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\mu' z^2}{\frac{1}{2}\mu' g z}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}z}{g}},$$

während die Schwingungsdauer des ganzen Pendels gegeben ist durch die Formel

$$\tau_{00} = 2\pi\sqrt{\frac{T}{\mu g a^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\mu l^2}{\frac{1}{2}\mu' g l}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}l}{g}},$$

wie man auch ohne dies weiß.

1) Es genügt hier, die Schwingungsdauer bei unendlich kleiner Amplitude zu betrachten, da in dieser Voraussetzung keine Einschränkung für die gezogenen Schlußfolgerungen liegt.

Wir betrachten jetzt die Schwingungsdauer des oberen Stangenteiles, wenn zu den auf ihn wirkenden eingeprägten Kräften noch die spezifische Reaktion hinzukommt, die Bewegung also nach Gleichung IV verläuft. Dementsprechend lautet die Differentialgleichung der Bewegung für $\mathfrak{K}'$:

$$\mathbf{T}'\frac{d\omega}{d\tau} = -\mu' g \sin\vartheta \cdot z^* + \tfrac{1}{2}\frac{\mu g}{l}\sin\vartheta\left(z^2 - \frac{z^3}{l}\right)$$

oder

$$\mathbf{T}'\frac{d\omega}{d\tau} = -g\sin\vartheta\left[\mu'\frac{z}{2} - \tfrac{1}{2}\frac{\mu}{l}\left(z^2 - \frac{z^3}{l}\right)\right]$$

$$= -\mu' g \sin\vartheta\left[\frac{z}{2} - \tfrac{1}{2}\left(z - \frac{z^2}{l}\right)\right]$$

d. h.

$$\mathbf{T}'\frac{d\omega}{d\tau} = -\mu' g \sin\vartheta \cdot \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{l}.$$

Hieraus folgt die Schwingungsdauer dieser Bewegung unter dem Einfluß des dynamischen *Zusatzmomentes* $\mathbf{R}'$:

$$\tau_{00}^{(+)} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\mu' z^2}{\mu' g\cdot\frac{1}{2}\frac{z^2}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}l}{g}} = \tau_{00}.$$

Fügt man also zu dem Kräftemoment $\mathbf{K}'$, welches direkt auf das Teilsystem $\mathfrak{K}'$ wirkt, das Reaktionsmoment $\mathbf{R}'$ hierzu, so erfolgt die Pendelbewegung von $\mathfrak{K}'$ *isochron* mit derjenigen des ganzen Körpers.

Um den Verlauf des Momentes $\mathbf{R}'$ im vorliegenden Falle näher zu verfolgen, bildet[1]) man den Differentialquotienten

$$\frac{d\mathbf{R}'}{dz} = \mu\frac{g}{l}\sin\vartheta\left(z - \tfrac{3}{2}\frac{z^2}{l}\right) \tag{4}$$

und trägt die einzelnen Werte desselben als Ordinaten auf dem Stabe auf. Die Parabel, deren Segmente $\mathbf{R}'$ unmittelbar zur Anschauung bringen, beginnt im Punkte O, erreicht ihr Maximum bei $z = \frac{l}{3}$, durchschneidet den Stab im Punkte $z = \frac{2}{3}l$ und endet mit der negativen Ordinate (vgl. Fig. 4)

$$\frac{d\mathbf{R}'}{dz} = -\tfrac{1}{2}\mu g \sin\vartheta.$$

1) Auf den Vorzug dieser Flächendarstellung von $\mathbf{R}'$ hat mich Herr v. Sanden, welcher in diesem Winter am hiesigen mechanischen Seminar teilnahm, aufmerksam gemacht. Man umgeht damit die Konstruktion der kubischen Kurve, deren Ordinaten $\mathbf{R}'$ sind. Ihm verdanke ich auch die Vereinfachung der Reaktionsbestimmung am Kurbelmechanismus sowie eine sorgfältige Durchsicht der ganzen Arbeit.

Ihre Gesamtfläche ist natürlich gleich Null. Nun zeigt ein Blick auf die Gleichung (1), daß man in den Ausdrücken für $\mathbf{R}'$ und $\frac{d\mathbf{R}'}{dz}$ die Bestandteile, welche von den Trägheitskräften bzw. von den eingeprägten Kräften einzeln herrühren, sofort trennen kann. Setzen wir also

$$\mathbf{R}' = \mathbf{F} + \mathbf{G}$$

und

$$\frac{d\mathbf{R}'}{dz} = \frac{d\mathbf{F}}{dz} + \frac{d\mathbf{G}}{dz},$$

so wird dementsprechend

$$\mathbf{F} = -\tfrac{1}{2}\frac{\mu g}{l}\sin\vartheta\,\frac{z^3}{l},$$

$$\mathbf{G} = \tfrac{1}{2}\frac{\mu g}{l}\sin\vartheta\cdot z^2.$$

Man hat also

$$\frac{d\mathbf{F}}{dz} = -\tfrac{3}{2}\mu\,\frac{g}{l}\sin\vartheta\cdot\frac{z^2}{l}$$

und

$$\frac{d\mathbf{G}}{dz} = \mu\,\frac{g}{l}\sin\vartheta\cdot z$$

Fig. 4.

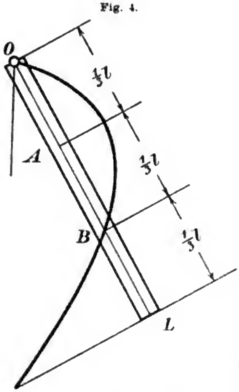
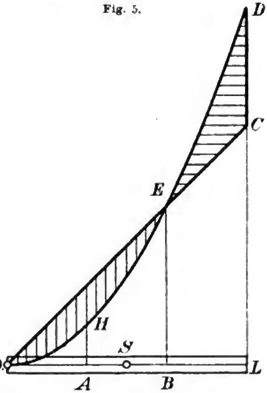


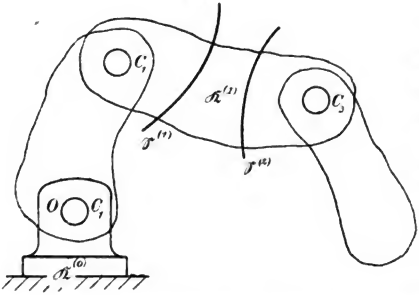
Fig. 5.



Konstruiert man jetzt Fig. 5 dieser Zerlegung entsprechend als Differenzdiagramme, so sind die Grenzen die Gerade OC und die Parabel $OHED$. Die Fläche OHE ist positiv (vertikal schraffiert), während die ihr gleiche Fläche ECD das negative Vorzeichen (horizontal schraffiert) hat. Die Gleichheit dieser Flächenstücke ist der *geometrische* Ausdruck des D'Alembertschen Prinzips d. h. das Sinnbild

der Bewegungsgleichung in dem vorgelegten Fall. Selbstverständlich zeigt auch Fig. 5. die spezifische Reaktion für jeden Querschnitt des Pendelstabes OL. Besonders bemerkenswert ist der Umstand, daß der Reaktionsfluß $\frac{d\mathbf{R}'}{dz}$ in dem Centrum oscillationis B (Fig. 4) verschwindet. An dieser Stelle erreicht die spezifische Reaktion $\mathbf{R}'$ ihr Maximum.

Fig. 6.



7. *Die spezifischen Ausschnitt-Reaktionen (Doppelschnitt).* Wir schneiden jetzt einen Mechanismus d. h. etwa eine Körperkette (wie in Fig. 6) durch zwei Flächen $\mathfrak{S}^{(1)}$ und $\mathfrak{S}^{(2)}$ und nennen den dazwischen liegenden Systemteil $\mathfrak{K}^{(1)}$. Die beiden in Betracht zu ziehenden Reduktionen der Elementarreaktionen $\bar{r}$ beginnen links in O und erstrecken sich bis $\mathfrak{S}^{(1)}$ bezw. bis $\mathfrak{S}^{(2)}$. Dies deuten wir durch entsprechende Indizes an den folgenden Reduktionsgleichungen an:

(1) $$S^{(1)}\,\bar{r}\,\delta\bar{x} = \sum_{\iota} \mathbf{R}_{\iota}^{(1)} \cdot \delta\vartheta_{\iota},$$

(2) $$S^{(2)}\,\bar{r}\,\delta\bar{x} = \sum_{\iota} \mathbf{R}_{\iota}^{(2)} \cdot \delta\vartheta_{\iota},$$

wodurch die Reaktionskomponenten $\mathbf{R}_{\iota}^{(1)}$ und $\mathbf{R}_{\iota}^{(2)}$ für $\iota = 1, 2, \ldots \nu$ definiert sind. Es seien nun $\mathbf{R}_{\iota}^{(I)}$ die Reduktionskomponenten für den System-Ausschnitt $\mathfrak{K}^{(1)}$, dann ist offenbar

$$\mathbf{R}_{\iota}^{(2)} - \mathbf{R}_{\iota}^{(1)} = \mathbf{R}_{\iota}^{(I)}.$$

Übertragen wir also dieselbe Bezeichnung auf die Systemgrößen $\mathbf{K}$ und $\mathbf{Q}$, so hat man die Beziehung:

(V) $$\mathbf{K}_{\iota}^{(1)} + \mathbf{R}_{\iota}^{(I)} = \mathbf{Q}_{\iota}^{(I)}, \quad \iota = 1, 2, \ldots \nu.$$

oder

(VI) $$-\mathbf{R}_{\iota}^{(1)} + \mathbf{K}_{\iota}^{(I)} - \mathbf{Q}_{\iota}^{(I)} + \mathbf{R}_{\iota}^{(2)} = 0, \quad \iota = 1, 2, \ldots \nu.$$

Die Betrachtung wenden wir im besonderen (vgl. Fig. 6) auf eine *einfach ausgedehnte* Körperkette an. Bei einer solchen ist der einzelne

Körper nur mit *zwei* Nachbarkörpern verbunden, also durch den Doppelschnitt aus einem Verbande lösbar. Außerdem wollen wir noch die Voraussetzung machen, das erste Glied der Kette sei etwa durch ein Kugelgelenk oder auch durch einen zylindrischen Zapfen mit einem ruhenden Körper (Fundament) $\mathfrak{K}^{(0)}$ verbunden. Die Schnittflächen $\mathfrak{S}^{(1)}$, $\mathfrak{S}^{(2)} \cdots$ legen wir so, daß sie alle Gelenkverbindungen zwischen den Gliedern der Kette lösen. Sie sind also jetzt *Gelenkschnitte.* Bezeichnet man die Glieder der Reihe nach mit $\mathfrak{K}^{(\mathrm{I})}$, $\mathfrak{K}^{(\mathrm{II})}$, $\mathfrak{K}^{(n)}$, so gelten nach Gleichungen VI die Beziehungen

$$(\mathrm{VII}) \quad \begin{cases} \mathbf{K}_\iota^{(\mathrm{I})} - \mathbf{Q}_\iota^{(\mathrm{I})} + \mathbf{R}_\iota^{(2)} = 0, \\ -\mathbf{R}_\iota^{(2)} + \mathbf{K}_\iota^{(\mathrm{II})} - \mathbf{Q}_\iota^{(\mathrm{II})} + \mathbf{R}_\iota^{(3)} = 0, \\ -\mathbf{R}_\iota^{(3)} + \mathbf{K}_\iota^{(\mathrm{III})} - \mathbf{Q}_\iota^{(\mathrm{III})} + \mathbf{R}_\iota^{(4)} = 0, \quad \iota = 1, 2, \cdots \nu. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\mathbf{R}_\iota^{(n)} + \mathbf{K}_\iota^{(n)} - \mathbf{Q}_\iota^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Es ist gleichgültig ob das letzte Glied der Körperkette entweder *nur* mit dem vorangehenden verbunden ist (wie in Fig. 6) oder auch selbst wieder an ein Fundament beweglich geknüpft gedacht wird. (Beispiel Kurbelmechanismus).

Die Aufstellung der Gleichungen (VII) erfolgte natürlich nicht zur Berechnung der spezifischen Gelenkreaktionen, da diese ohne weiteres durch die Definitionsgleichungen (1), (2) gegeben sind, sondern zur Klarstellung der Analogien, welche zwischen dieser Gattung von Reaktionen und den gleich zu betrachtenden *absoluten* Reaktionen bestehen.

8. *Einführung der absoluten Reaktionen.* Indem man die Komponenten $\mathbf{R}_\iota$ der spezifischen Reaktionen zu den Komponenten $\mathbf{K}_\iota$ der eingeprägten Kräfte hinzufügt, macht man den betreffenden Systemteil in *gewissem* Sinne frei, wie wir es an dem einfachen Beispiele des Stabpendels gesehen haben. Aber bereits hier erkennt man deutlich, daß wir von den möglichen statischen Reduktionen der Elementarreaktionen $\bar{r}$ nur eine einzige ausgeführt haben. Der abgeschnittene oder ausgetrennte Teil des materiellen Systems ist also, wenn wir ihn als starren Körper annehmen, keineswegs im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum *absolut* frei, sondern nur in dem Lagrangeschen Bewegungsraum[1]) des ganzen Systems. Die vollständigen oder *absoluten* Reaktionen müssen demnach anderer Natur sein, als die spezifischen. In dem trivialen Pendelbeispiel sind die fehlenden Reaktionskomponenten gegeben durch die Größe

$$\bar{\mathbf{r}}' = S'\bar{r}' = S'\mu\bar{w} - S'\bar{k}.$$

1) Man vgl. *Kinematik.* S. 144.

Zerlegen wir also hier (wie in Nr. 4) nach einem ruhenden rechtwinkligen Achsenkreuz $O_{(1)(2)(3)}$, so sind (cf. No. 4)

$$\mathbf{R}_1', \mathbf{R}_2', \mathbf{R}_3', \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'$$

die 5 Komponenten der absoluten Reaktion in bezug auf den Pendelteil vom Aufhängepunkt O bis zum Schnitte $\mathfrak{S}$ (in Fig. 3). In diesem Sinne hat man den Reaktionsbegriff viel häufiger gebraucht als in dem oben auseinandergesetzten. Man hat jetzt auch absolute Reaktionskomponenten für den ganzen Pendelkörper, nämlich die vier Größen

$$\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2,$$

welche in den Elementarbüchern der Mechanik ausgeführt[1]) sind. Die Übertragung derartig einfacher Vorstellungen auf ein beliebiges starres Glied einer einfachen Körperkette hat keinerlei Schwierigkeit. Dennoch kann die Durchführung der Rechnung selbst bei Ketten aus nur drei oder vier Gliedern, wie sie in der angewandten Mechanik häufig vorkommen, recht mühsam werden.

Wir greifen aus einer einfachen Körperkette $\mathfrak{K}^{(1)} - \mathfrak{K}^{(2)} - \mathfrak{K}^{(3)} - \cdots - \mathfrak{K}^{(n)}$ ein starres Glied $\mathfrak{K}^{(2)}$ heraus, (Fig. 7). Dasselbe war mit dem vorhergehenden Glied $\mathfrak{K}^{(1)}$ sowie mit dem folgenden $\mathfrak{K}^{(3)}$ durch je ein zylindrisches Zapfengelenk verbunden. Ein Gleiten längs der Zapfenachsen $C''A''$ und $C'''A'''$ sei ausgeschlossen. In diesen Achsen nehmen wir die Punkte C'', C''' zunächst willkürlich an und beziehen Lage und Bewegung des Körperteils auf einen festen Punkt O des ruhenden Raumes, also auch die Koordinaten der Punkte und die Komponenten der Kräfte auf ein Koordinatenkreuz $O_{(1)(1)(3)}$, welches in der Figur nicht eingetragen ist.

Die Resultante der eingeprägten Kräfte für $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist

$$\overline{\mathbf{k}}^{(2)} = S^{(2)} \bar{k},$$

die Resultante der Massenbeschleunigungen

$$\overline{\mathbf{q}}^{(2)} = S^{(2)} \mu \bar{w}$$

und das Moment derselben in bezug auf Pol C''

$$\overline{\mathbf{W}}^{(2)} = S^{(2)} \mu \overline{(x - c'') w}\,.$$

Dasselbe Moment in bezug auf den festen Pol O wird also

$$S^{(2)} \mu \overline{x w} = \overline{c'' \mathbf{q}^{(2)}} + \overline{\mathbf{W}}^{(2)}$$

Das Moment der eingeprägten Kräfte für denselben Pol ist

$$\overline{\mathbf{K}}_0^{(2)} = S^{(2)} \overline{x k}\,.$$

1) z. B. bei Routh, Rigid dynamics. Bd. I. S. 92.

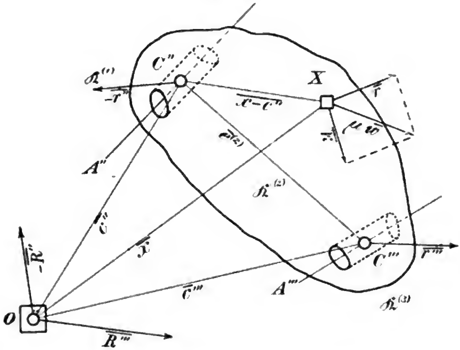
$\mathfrak{K}^{(1)}$ überträgt auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine Einzelkraft $-\bar{r}''$ als Reaktion, deren Angriffspunkt C'' sein soll und ein auf O bezogenes Reaktionsmoment $-\bar{R}''$. Die entsprechenden Größen für das folgende Gelenk seien, $\bar{r}'''$ und $\bar{R}'''$. Sie sind aber auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ und nicht auf $\mathfrak{K}^{(3)}$ zu beziehen.

Die gewöhnlichen statischen Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers in Anwendung auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ lauten jetzt:

I) $$-\bar{r}'' + \bar{\mathbf{k}}^{(2)} - \bar{\mathbf{q}}^{(2)} + \bar{r}''' = 0.$$

II) $$-\bar{R}'' + \bar{\mathbf{K}}_0^{(2)} - \bar{\mathbf{W}}^{(2)} - \overline{c''\mathbf{q}^{(2)}} - \overline{c''r''} + \overline{c'''r'''} + \bar{R}''' = 0.$$

Fig. 7.



Für die aufeinanderfolgenden Kettenglieder hat man also die beiden Gleichungssysteme

A) $$\begin{cases} -\bar{r}' + \bar{\mathbf{k}}^{(1)} - \bar{\mathbf{q}}^{(1)} + \bar{r}'' = 0, \\ -\bar{r}'' + \bar{\mathbf{k}}^{(2)} - \bar{\mathbf{q}}^{(2)} + \bar{\mathfrak{p}}''' = 0, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\bar{r}^{[n]} + \bar{\mathbf{k}}^{(n)} - \bar{\mathbf{q}}^{(n)} + \bar{r}^{[n+1]} = 0. \end{cases}$$

B) $$\begin{cases} -\bar{R}' + \mathbf{K}_0^{(1)} - \bar{\mathbf{W}}^{(1)} - \overline{c'\mathbf{q}^{(1)}} - \overline{c'r'} + \overline{c''r''} + \bar{R}'' = 0, \\ -\bar{R}'' + \mathbf{K}_0^{(2)} - \bar{\mathbf{W}}^{(2)} - \overline{c''\mathbf{q}^{(2)}} - \overline{c''r''} + \overline{c'''r'''} + \bar{R}''' = 0, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\bar{R}^{[n]} + \mathbf{K}_0^{(n)} - \bar{\mathbf{W}}^{(n)} - \overline{c^{[n]}\mathbf{q}^{(n)}} - \overline{c^{[n]}r^{[n]}} + \overline{c^{[n+1]}r^{[n+1]}} + \bar{R}^{[n+1]} = 0 \end{cases}$$

Durch Addition der Gleichungen (A) folgt

III) $$-\bar{r}' + \bar{r}^{[n+1]} + \sum_1^n \bar{\mathbf{k}} - \sum_1^n \bar{\mathbf{q}} = 0.$$

Sobald die Körperkette am Anfang und am Ende gestützt ist, und beide Stützen demselben starren Fundamentkörper angehören, ist die Größe $-\bar{r} + \bar{r}^{[n+1]}$ die Resultante der *totalen* Auflagerreaktion des Mechanismus (Kette). Man sieht also aus diesem bekannten Resultat, daß die Bedingungen der Einzelreaktionen ($\bar{r}$) und der Momentreaktionen ($\bar{R}$) von vorn herein so gewählt sind, daß das Newtonsche Prinzip der Gleichheit von Actio und Reactio erfüllt ist. Dasselbe gilt auch für die Gleichungen (B).

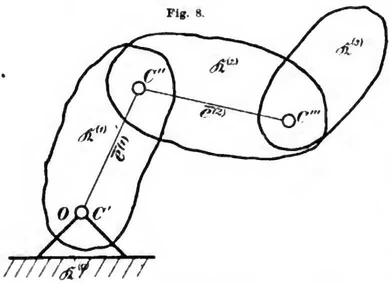
Als unbekannte (gerichtete) Größen haben wir

$$\bar{r}', \bar{r}'', \ldots \bar{r}^{[n+1]}$$

$$\bar{R}', \bar{R}'', \ldots \bar{R}^{[n+1]}.$$

Der Leser wird sofort die Frage aufwerfen: „Sind denn diese unbekannten Vektoren eindeutig aus den Gleichungssystemen (A) und (B) bestimmbar"? Und nicht minder berechtigt ist die weitere Frage: „Wie gewinnt man aus dieser elementaren Auffassung des Reaktionsprozesses die eigentlichen Bewegungsgleichungen des ganzen Systems, die uns sonst die Lagrangeschen Gleichungen unmittelbar liefern"?

Fig. 8.



Diese Fragen sollen zunächst in zwei verhältnismäßig einfachen Fällen beantwortet werden.

9. *Die einseitig freie Kugelgelenk-Kette.* Mehrere aufeinander folgende starre Körper $\mathfrak{K}^{(1)}$, $\mathfrak{K}^{(2)}$, $\ldots \mathfrak{K}^{(n)}$ seien durch Kugelgelenke mit einander einfach (Fig. 8) verbunden und ebenso mit einem starren, ruhenden Fundament an einem Ende verknüpft. Der letzte Körper soll nicht gelagert sein. Jetzt verschwinden in den Gleichungen (B) alle Reaktionsmomente $\bar{R}'$ bis $\bar{R}^{[n+1]}$ und aus den Gleichungen (A) folgt:

$$\bar{r}'' = \bar{r}' - \bar{\mathfrak{k}}^{(1)} + \mathfrak{q}^{(1)}, \quad \bar{r}''' = \bar{r}' - (\bar{\mathfrak{k}}^{(1)} + \bar{\mathfrak{k}}^{(2)}) + \bar{\mathfrak{q}}^{(1)} + \bar{\mathfrak{q}}^{(2)}, \ \ldots$$

Ferner ist nach Gleichung III in Nr. 8:

$$\bar{r}' = \sum_1^n \bar{\mathfrak{k}} - \sum_1^n \bar{\mathfrak{q}},$$

womit die Auflagerreaktion eindeutig bestimmt ist. Führt man diesen Wert in den vorangehenden Gleichungen ein, so wird

$$\bar{r}'' = \sum_2^n \bar{\mathsf{k}} - \sum_2^n \bar{\mathsf{q}},$$

$$\bar{r}''' = \sum_3^n \bar{\mathsf{k}} - \sum_3^n \bar{\mathsf{q}}, \ldots$$

Die Gleichungen (B) gehen, wenn $\bar{\mathsf{K}}^{(\iota)}$ auf $C^{(\iota)}$ bezogen wird, über in:

$$(\mathrm{B}')\qquad \begin{cases} \bar{\mathsf{K}}^{(1)} - \bar{\mathsf{W}}^{(1)} + \overline{e^{(1)} \cdot \sum_2^n \mathsf{k}} - \overline{e^{(1)} \cdot \sum_2^n \mathsf{q}} = 0, \\ \bar{\mathsf{K}}^{(2)} - \bar{\mathsf{W}}^{(2)} + \overline{e^{(2)} \cdot \sum_3^n \mathsf{k}} - \overline{e^{(2)} \cdot \sum_3^n \mathsf{q}} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot = 0 \\ \bar{\mathsf{K}}^{(n-1)} - \bar{\mathsf{W}}^{(n-1)} + \overline{e^{(n)}\mathsf{k}^{(n)}} - \overline{e^{(n)}\mathsf{q}^{(n)}} = 0, \\ \bar{\mathsf{K}}^{(n)} - \bar{\mathsf{W}}^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Dies sind die *Bewegungsgleichungen* der Kugelgelenkkette. Man kann sie als eine Erweiterung der Eulerschen Gleichungen für die Rotation des starren Körpers auffassen und in gleichem Sinne weiter behandeln. Dementsprechend wird man in jedes Glied der Kette ein mit ihm fest verbundenes Achsenkreuz $C_{\mathrm{I,\,II,\,III}}$ legen, etwa C_{III} mit der Verbindungslinie der Gelenkpunkte (C, C') zusammenfallen lassen und die C_{I}-Achse je nach der Gestalt des Gliedes passend wählen. Zur Festlegung der Lage jedes einzelnen Gliedes im ruhenden Raum $[O_{1,2,3}]$ benutzt man die Eulerschen Winkel α, β, γ (Kinematik S. 219 und S. 299). Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ sind dann (mit Weglassung der Indizes für die einzelnen Glieder)

$$\omega_{\mathrm{I}} = \frac{d\gamma}{d\tau} - \sin\beta\,\frac{d\alpha}{d\tau}, \quad \omega_{\mathrm{II}} = \cos\beta\,\sin\gamma\,\frac{d\alpha}{d\tau} + \cos\gamma\,\frac{d\beta}{d\tau},$$

$$\omega_{\mathrm{III}} = \cos\beta\,\cos\gamma\,\frac{d\alpha}{d\tau} - \sin\gamma\,\frac{d\beta}{d\tau}.$$

Für die Komponenten von $\bar{\mathsf{q}}$ und W hat man die bekannten Ausdrücke[1])

$$\mathsf{q}_{\mathrm{I}} = \mu\Big[\frac{dt_{\mathrm{I}}}{d\tau} + \dot{\omega}_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}} - \dot{\omega}_{\mathrm{III}} a_{\mathrm{II}} + \omega_{\mathrm{II}} t_{\mathrm{III}} - \omega_{\mathrm{III}} t_{\mathrm{II}} + \omega_{\mathrm{II}}(\omega_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} - \omega_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{I}}) - \omega_{\mathrm{III}}(\omega_{\mathrm{III}} a_{\mathrm{I}} - \omega_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{III}})\Big],$$

---

1) Kinematik S. 271. Die dort vorkommenden falschen Vorzeichen sind hier berichtigt.

$$\mathfrak{q}_{\rm II} = \mu\Big[\frac{dt_{\rm II}}{d\tau} + \dot\omega_{\rm III} a_{\rm I} - \dot\omega_{\rm I} a_{\rm III} + \omega_{\rm III} t_{\rm I} - \omega_{\rm I} t_{\rm III} + \omega_{\rm III}(\omega_{\rm II} a_{\rm III} - \omega_{\rm III} a_{\rm II})$$
$$- \omega_{\rm I}(\omega_{\rm I} a_{\rm II} - \omega_{\rm II} a_{\rm I})\Big],$$

$$\mathfrak{q}_{\rm III} = \mu\Big[\frac{dt_{\rm III}}{d\tau} + \dot\omega_{\rm I} a_{\rm II} - \dot\omega_{\rm II} a_{\rm I} + \omega_{\rm I} t_{\rm II} - \omega_{\rm II} t_{\rm I} + \omega_{\rm I}(\omega_{\rm III} a_{\rm I} - \omega_{\rm I} a_{\rm III})$$
$$- \omega_{\rm II}(\omega_{\rm II} a_{\rm III} - \omega_{\rm III} a_{\rm II})\Big].$$

und

$$\mathfrak{W}_{\rm I} = T_{\rm I}\dot\omega_{\rm I} - D_{\rm III}\dot\omega_{\rm II} - D_{\rm II}\dot\omega_{\rm III} - (T_{\rm II} - T_{\rm III})\omega_{\rm II}\omega_{\rm III} + D_{\rm III}\omega_{\rm III}\omega_{\rm I}$$
$$- D_{\rm II}\omega_{\rm I}\omega_{\rm II} - D_{\rm I}(\omega_{\rm II}^2 - \omega_{\rm III}^2) + \mu\Big[a_{\rm II}(\omega_{\rm I} t_{\rm II} - \omega_{\rm II} t_{\rm I})$$
$$- a_{\rm III}(\omega_{\rm III} t_{\rm I} - \omega_{\rm I} t_{\rm III}) + a_{\rm II}\frac{dt_{\rm III}}{d\tau} - a_{\rm III}\frac{dt_{\rm II}}{d\tau}\Big],$$

$$\mathfrak{W}_{\rm II} = T_{\rm II}\dot\omega_{\rm II} - D_{\rm I}\dot\omega_{\rm III} - D_{\rm III}\dot\omega_{\rm I} - (T_{\rm III} - T_{\rm I})\omega_{\rm III}\omega_{\rm I} + D_{\rm I}\omega_{\rm I}\omega_{\rm II}$$
$$- D_{\rm III}\omega_{\rm II}\omega_{\rm III} - D_{\rm II}(\omega_{\rm III}^2 - \omega_{\rm I}^2) + \mu\Big[a_{\rm III}(\omega_{\rm II} t_{\rm III} - \omega_{\rm III} t_{\rm II})$$
$$- a_{\rm I}(\omega_{\rm I} t_{\rm II} - \omega_{\rm II} t_{\rm I}) + a_{\rm III}\frac{dt_{\rm I}}{d\tau} - a_{\rm I}\frac{dt_{\rm III}}{d\tau}\Big],$$

$$\mathfrak{W}_{\rm III} = T_{\rm III}\dot\omega_{\rm III} - D_{\rm II}\dot\omega_{\rm I} - D_{\rm I}\dot\omega_{\rm II} - (T_{\rm I} - T_{\rm II})\omega_{\rm I}\omega_{\rm II} + D_{\rm II}\omega_{\rm II}\omega_{\rm III}$$
$$- D_{\rm I}\omega_{\rm III}\omega_{\rm I} - D_{\rm III}(\omega_{\rm I}^2 - \omega_{\rm II}^2) + \mu\Big[a_{\rm I}(\omega_{\rm III} t_{\rm I} - \omega_{\rm I} t_{\rm III})$$
$$- a_{\rm II}(\omega_{\rm II} t_{\rm III} - \omega_{\rm III} t_{\rm II}) + a_{\rm I}\frac{dt_{\rm II}}{d\tau} - a_{\rm II}\frac{dt_{\rm I}}{d\tau}\Big].$$

In diesen Gleichungen bedeutet μ die Masse des Kettengliedes, $a_{\rm I}$, $a_{\rm II}$, $a_{\rm III}$ die Koordinaten des Schwerpunktes, $t_{\rm I}$, $t_{\rm II}$, $t_{\rm III}$ die Geschwindigkeitskomponenten des Gelenkpunktes C; $T_{\rm I}$, $T_{\rm II}$, $T_{\rm III}$ die Trägheitsmomente um die Achsen $C_{\rm I}$, $C_{\rm II}$, $C_{\rm III}$ und $D_{\rm I}$, $D_{\rm II}$, $D_{\rm III}$ die entsprechenden Deviationsmomente. Da C nicht mit dem Schwerpunkt und $C_{\rm III} = CC'$ nicht mit einer Hauptachse des Gliedes zusammenfallen wird, so sind die bei dem Rotationsproblem des einzelnen starren Körpers[1]) fast immer zulässigen Vereinfachungen $a_{\rm I} = 0$, $a_{\rm II} = 0$, $a_{\rm III} = 0$; $D_{\rm I} = 0$, $D_{\rm II} = 0$, $D_{\rm III} = 0$ hier im allgemeinen nicht statthaft. In jedem konkreten Anwendungsfalle wird man selbstverständlich alle diejenigen Vereinfachungen von vornherein einführen, welche er ermöglicht.

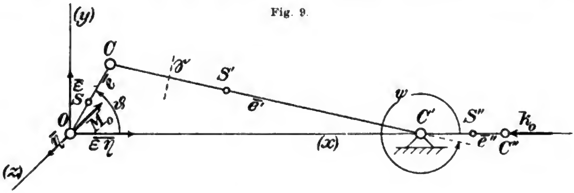
10. *Auflager- und Gelenkreaktionen am ebenen Kurbelmechanismus.* Die Beschränkung auf die Ebene, welche wir bei diesem Problem zur Vereinfachung der Rechnung machen, muß für die Zwecke der An-

1) In der Lehrbuchliteratur, welche die Kinetik der Körperketten bisher nur angedeutet oder gar nicht berücksichtigt hat, konnte man die obigen *allgemeinen* Formeln für die Komponenten der Systembeschleunigung daher meistens entbehren.

wendungen meist aufgegeben werden. Unsere Aufgabe ist also zunächst eine rein theoretische, als solche aber wohl geeignet, für verwickeltere Untersuchungen der angewandten Mechanik als Vorbereitung zu dienen.

Um den Punkt O rotiert der Körper $\mathfrak{K}$ (Welle, Kurbel, Schwungrad). An ihn schließt sich der Verbindungskörper $\mathfrak{K}'$ (Lenkstange) mit der Achse CC'. Der Gelenkpunkt C' fällt dementsprechend in die Mitte des Kreuzkopfzapfens, mit welchem das dritte Glied der Kette $\mathfrak{K}''$ verbunden ist. Es besitzt eine Prismenführung. Auf alle Glieder wirke die Schwere. Ferner wirke auf $\mathfrak{K}$ eine Kräftepaar mit dem Moment $-\mathbf{M}_0$ um die Achse $\bar{\eta}$ und auf $\mathfrak{K}''$ eine Kraft $-k_0$ in der Achse $C'C''$, wie in der Figur angegeben. Auch in bezug auf die

Fig. 9.



Schwerpunktlagen der Glieder machen wir eine spezielle Vorraussetzung. Alle Schwerpunkte sollen in den Achsen der betreffenden Glieder liegen. Wir setzen also

$$\bar{a} = \lambda \cdot \bar{e}, \quad \bar{a}' = \lambda' \cdot \bar{e}', \quad \bar{a}'' = \lambda'' \cdot \bar{e}''.$$

Die kinetostatischen Grundgleichungen lauten jetzt:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} -\bar{r} + \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}} + \bar{r}' = 0, \\ -\bar{r}' + \bar{\mathbf{k}}' - \bar{\mathbf{q}}' + \bar{r}'' = 0, \\ -\bar{r}'' + \bar{\mathbf{k}}'' - \bar{\mathbf{q}}'' + \bar{r}''' = 0, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \overline{\mathbf{M}} - \overline{\mathbf{W}} + \overline{er'} = 0, \\ \overline{\mathbf{M}}' - \overline{\mathbf{W}}' + \overline{e\mathbf{k}'} - \overline{e\mathbf{q}'} + \overline{c'r''} - \overline{er'} = 0, \\ \overline{\mathbf{M}}'' - \overline{\mathbf{W}}'' + \overline{c'\mathbf{k}''} - \overline{c'\mathbf{q}''} + \overline{c''r'''} - \overline{c'r''} + \bar{R} = 0. \end{cases}$$

Die Momente $\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}}', \overline{\mathbf{M}}''$ der eingeprägten Kräfte sind hier auf die Punkte O, C, C' der Reihe nach bezogen. Dasselbe gilt für die Größen $\overline{\mathbf{W}}, \overline{\mathbf{W}}', \overline{\mathbf{W}}''$, welche dieselbe Bedeutung haben, wie in Nr. 8. Dagegen ist das Reaktionsmoment $\bar{R}$, welches das Fundament auf $\mathfrak{K}''$ ausübt, auf O bezogen. Eliminiert man in den Gleichungen (B) die

Reaktionen $\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''$ mit Hilfe der Gleichungen (A), so folgt (für $\overline{c' - e} = \bar{e}'$, $\overline{c'' - c'} = \bar{e}''$)

$$(1) \qquad \bar{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{W}} - \overline{e\mathbf{k}} + \overline{e\mathbf{q}} + \overline{er} = 0,$$

$$(2) \qquad \bar{\mathbf{M}}' - \bar{\mathbf{W}}' - \overline{e'(\mathbf{k} + \mathbf{k}')} + \overline{e'(\mathbf{q} + \mathbf{q}')} + \overline{e'r} = 0,$$

$$(3) \qquad \bar{\mathbf{M}}'' - \bar{\mathbf{W}}'' - \overline{e''(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'')} + \overline{e''(\mathbf{q} + \mathbf{q}' + \mathbf{q}'')} + \overline{e''r} + \bar{R} = 0.$$

Wir bezeichnen jetzt den Kurbelwinkel mit ϑ, die entsprechende Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ mit ω. Die positiv im Sinne von CC' gerichtete Achse der Lenkstange ($\mathfrak{K}'$) bilde mit der positiven x-Achse den Winkel ψ und es sei $\frac{d\psi}{d\tau} = \sigma$. Aus der Figur kann man die Lage der Einheitsstrecken $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\eta}$, $\overline{\varepsilon\eta}$ ersehen. Es liegt also $\bar{\eta}$ in der positiven Rotationsachse, $\bar{\varepsilon}$ in Oy und $\overline{\varepsilon\eta}$ in Ox des Achsenkreuzes. $\mathbf{T}$ sei das Trägheitsmoment von $\mathfrak{K}$ um O, $\mathbf{T}'$ dasjenige von $\mathfrak{K}'$ um C. Bezeichnet man die Massen der drei Glieder des Mechanismus mit μ, μ' und μ'', so wird

$$\bar{\mathbf{q}} = \lambda\mu \frac{d}{d\tau}(\overline{\omega e}),$$

$$\bar{\mathbf{q}}' = \mu' \frac{d}{d\tau}(\overline{\omega e} + \lambda' \cdot \overline{\sigma e'}),$$

$$\bar{\mathbf{q}}'' = \mu'' \frac{d}{d\tau}(\overline{\omega e} + \overline{\sigma e'}),$$

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{T} \frac{d\omega}{d\tau} \cdot \bar{\eta},$$

$$\bar{\mathbf{W}}' = \mathbf{T}' \frac{d\sigma}{d\tau} \cdot \bar{\eta} + \lambda'\mu' e e' [\dot{\omega} \cos(\psi - \vartheta) + \omega^2 \sin(\psi - \vartheta)]\, \bar{\eta},$$

$$\bar{\mathbf{W}}'' = 0.$$

Ferner ist, wenn wir noch zur Abkürzung $\mu + \mu' + \mu'' = \mu^*$ setzen:

$$\bar{\mathbf{k}} = -\mu g \cdot \bar{\varepsilon}, \qquad \bar{\mathbf{k}} + \bar{\mathbf{k}}' = -(\mu + \mu') g \cdot \bar{\varepsilon},$$

$$\bar{\mathbf{k}}' = -\mu' g \cdot \bar{\varepsilon}, \qquad \bar{\mathbf{k}} + \bar{\mathbf{k}}' + \bar{\mathbf{k}}'' = -\mu^* g \cdot \bar{\varepsilon} - k_0 \cdot \overline{\varepsilon\eta}.$$

$$\bar{\mathbf{k}}'' = -\mu'' g \cdot \bar{\varepsilon} - k_0 \cdot \overline{\varepsilon\eta}.$$

In diesen Ausdrücken ist

$$\bar{e} = e(\cos\vartheta \cdot \overline{\varepsilon\eta} + \sin\vartheta \cdot \bar{\varepsilon}), \quad \bar{e}' = e'(\cos\psi \cdot \overline{\varepsilon\eta} + \sin\psi \cdot \bar{\varepsilon})$$

und folglich

$$\bar{e}\,\bar{e}' = e e' \cos(\psi - \vartheta).$$

Die Momente der eingeprägten Kräfte werden der Reihe nach:

$$\bar{\mathsf{M}} = -(\mathsf{M}_0 + \lambda\mu e g \cos\vartheta)\cdot\bar{\eta},$$
$$\bar{\mathsf{M}}' = -\lambda'\mu' e' g \cos\psi\cdot\bar{\eta},$$
$$\bar{\mathsf{M}}'' = -\lambda''\mu'' e'' g\cdot\bar{\eta}.$$

Ein Blick auf die Gleichungen (A) zeigt, daß alle Resultantreaktionen bekannt sind, sobald eine derselben nach Größe und Richtung bekannt ist. Da nun $r_x''' = 0$ ist, so erscheint es am einfachsten, die Komponente r_y''' im Voraus zu bestimmen. Hierzu kann man die Gleichung (2) benützen, indem man dort $\bar{r}$ durch $\bar{r}'''$ ausdrückt. Nun ist aber

$$-\bar{r} + \overline{\mathsf{k}-\mathsf{q}} + \overline{\mathsf{k}'-\mathsf{q}'} + \overline{\mathsf{k}''-\mathsf{q}''} + \bar{r}''' = 0.$$

Folglich wird

$$\overline{e'r} = \overline{e'r'''} + \overline{e'(\mathsf{k}''-\mathsf{q}'')} + \overline{e'(\mathsf{k}'-\mathsf{q}')} + \overline{e'(\mathsf{k}-\mathsf{q})}$$

d. h. man erhält statt Gleichung (2) die folgende:

(2′) $$\bar{\mathsf{M}}' - \bar{\mathsf{W}}' + \overline{e'(\mathsf{k}''-\mathsf{q}'')} + \overline{e'r'''} = 0.$$

Bezeichnen wir nun den Skalarwert des Momentproduktes $\overline{ab}$ mit $\overline{ab}$, so wird

$$\mathsf{M}' - \mathsf{W}' + \overline{e'(\mathsf{k}''-\mathsf{q}'')} + e_x' r_y''' = 0.$$

Hierin ist noch

$$\overline{e'(\mathsf{k}''-\mathsf{q}'')} = e_x'(\mathsf{k}_y''-\mathsf{q}_y'') - e_y'(\mathsf{k}_x''-\mathsf{q}_x'')$$

zu setzen. Dann folgt aus Gleichung (2′) unmittelbar:

(4) $$r_y''' = -\varkappa_0 \operatorname{tg}\psi + (\lambda'\mu' + \mu'')g + \mu'' \operatorname{tg}\psi[e(\omega^2\cos\vartheta + \dot{\omega}\sin\vartheta) + e'(\sigma^2\cos\psi + \dot{\sigma}\sin\psi)] + \lambda'\mu'\frac{e}{\cos\psi}[\omega^2\sin(\psi-\vartheta) + \dot{\omega}\cos(\psi-\vartheta)] + \frac{\mathsf{T}'}{e'}\frac{\sigma}{\cos\psi}.$$

Der Zusammenhang zwischen den Größen ϑ, ψ, ω, σ, $\dot{\omega}$, $\dot{\sigma}$ ergibt sich aus der für das Dreieck OCC' geltenden Gleichung

(5) $$e\sin\vartheta + e'\sin\psi = 0,$$

woraus man durch Differentiation nach der Zeit erhält

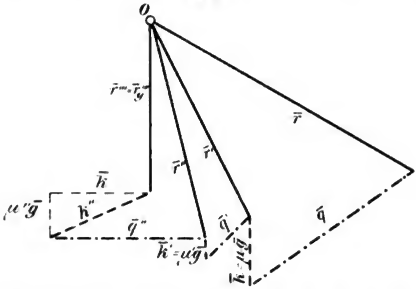
(6) $$\sigma = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta}\cdot\omega.$$

Eine zweite Differentiation nach der Zeit gibt

(7) $$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - \frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{2\sigma}{\sin 2\psi} - \frac{2\omega}{\sin 2\vartheta}.$$

Sobald $\bar{r}_y'''$ nach Gleichung (4) gefunden ist, kann man analytisch oder graphisch weiter gehen. Der graphischen Auffassung entspricht das Diagramm:

Fig. 10.



Der Zusammenhang zwischen $\dot{\omega}$, ω und ϑ ist durch die Differentialgleichung der Bewegung des Kurbelmechanismus gegeben. Man kann sie auf zwei verschiedenen Wegen erhalten. Entweder berechnet man aus den Gleichungen (1) und (2) $\bar{r}$ und bildet dann auf Grund der Gleichung (A)

$$r_x''' = 0 .$$

Diese ist die Differentialgleichung der *Bewegung*. Man kann aber auch unmittelbar von der Lagrangeschen Form

$$(8) \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\vartheta}}\right) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vartheta} = S\bar{k}\,\frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta} \equiv \mathbf{K}$$

der kinetischen Gleichung ausgehen. Hierin sind $\bar{k}$ die in Betracht kommenden eingeprägten Kräfte, $\bar{x}$ die von O aus gerechneten Angriffsstrecken derselben. $\mathbf{E}$ ist die kinetische Energie des ganzen Mechanismus. Die Leistungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{E}}{d\tau} = S\bar{k}\cdot\frac{d\bar{x}}{d\tau}$$

führt auf dasselbe Resultat. Das Summenzeichen S erstreckt sich über die Angriffspunkte aller eingeprägten Kräfte. Schreiben wir die kinetische Energie des Mechanismus in der Form

$$(9) \qquad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{F}\cdot\omega^2,$$

so wird

$$(10) \qquad \mathbf{F} = \mathbf{T} + (\mu' + \mu'')e^2 + 2(\lambda'\mu' + \mu'')ee'\cos(\psi - \vartheta)\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} + (\mathbf{T}' + \mu''e'^2)\frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\operatorname{tg}^2\vartheta}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist die Bewegungsgleichung

$$\mathsf{F}\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} = \mathsf{K} - \tfrac{1}{2}\frac{d\mathsf{F}}{d\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 \equiv \mathsf{K}',$$

wo F und K' als bekannte Funktionen von ϑ und $\dot{\vartheta} = \omega$ anzusehen sind. Man erhält dann weiter

$$\dot{\omega} = \frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{F}}, \quad \dot{\sigma} = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta}\frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{F}} + \frac{2\sigma^2}{\sin 2\psi} - \frac{2\omega\sigma}{\sin 2\vartheta}.$$

Das Prinzip der lebendigen Kraft liefert die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}[\mathsf{F}\cdot\omega^2 - \mathsf{F}_0\cdot\omega_0^2] = \int_0^\vartheta \mathsf{K}\,d\vartheta,$$

worin ω_0, F_0 die Werte von ω und F für $\vartheta = 0$ bedeuten. Die Momentreaktion $\bar{R}$ ergibt sich unmittelbar aus Gleichung (3), welche nach Einführung von $\bar{r}'''$ die einfache Form annimmt:

$$\bar{\mathsf{M}}'' + \overline{e''r'''} + \bar{R} = 0.$$

Nun ist

$$\overline{e''r'''} = e_x''r_y''' - e_y'''r_x'' = e''r_y''',$$

also

$$R = -\mathsf{M}'' - e''r_y'''.$$

Hiermit sind alle Reaktionen als Funktionen des Kurbelwinkels ϑ ausgedrückt. Bei praktischen Anwendungen kann man oft ω durch denjenigen Mittelwert ω_{00} ersetzen, welcher der Umlaufszeit des Mechanismus entspricht.

Wendet man die vorstehende Rechnung auf eine Dampfmaschine an, so hat man zu beachten, daß die Horizontalreaktion, welche wegen des Dampfdruckes auf das Fundament übertragen wird, der Kraft k_0 entgegengesetzt gleich ist.

Zur Berechnung der *totalen* Auflagerreaktionen wendet man den oben ausgeführten Weg nicht an, sondern verfährt in der üblichen Weise[1]), wenn nicht gleichzeitig die Kenntnis der getrennten Auflager-Reaktionen nötig ist.

Gelegentlich braucht man auch die Schnittreaktionen an einer beliebigen Stelle eines Kettengliedes. Es sei z. B. in Fig. 9 ein Schnitt $\mathfrak{S}$ durch die Lenkstange geführt. Die dort übertragenen Reaktionen seien $\bar{s}$ und $\bar{S}$ (Momentreaktion). Das Kräftesystem dieses Gliedes zerfällt jetzt in zwei Teile, welche durch die Indizes I und II unterschieden

1) H. Lorenz. Dynamik der Kurbelgetriebe. Leipzig 1901.

werden sollen. An Stelle der Gleichungen (A) und (B) treten die folgenden ($O\mathfrak{S} = \bar{c}^{I}$), wenn wir $\bar{\mathbf{M}}^{II}$ und $\mathbf{W}^{II}$ auf $\mathfrak{S}$ beziehen:

$$(A') \quad \begin{cases} -\bar{r} + \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}} + \bar{r}' = 0, \\ -\bar{r}' + \bar{\mathbf{k}}^{I} - \bar{\mathbf{q}}^{I} + \bar{s} = 0, \\ -s + \bar{\mathbf{k}}^{II} - \bar{\mathbf{q}}^{II} + \bar{r}'' = 0, \\ -\bar{r}'' + \bar{\mathbf{k}}'' - \bar{\mathbf{q}}'' + \bar{r}''' = 0. \end{cases}$$

$$(B') \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{W}} + \overline{er'} = 0, \\ -\overline{er'} + \mathbf{M}^{I} - \bar{\mathbf{W}}^{I} + \overline{e\mathbf{k}^{I}} - \overline{e\mathbf{q}^{I}} + \overline{c^{I}s} + \bar{S} = 0, \\ -\bar{S} - \overline{c^{I}s} + \bar{\mathbf{M}}^{II} - \bar{\mathbf{W}}^{II} + \overline{c^{I}\mathbf{k}^{II}} - \overline{c^{I}\mathbf{q}^{II}} + \overline{c'r''} = 0, \\ -\overline{c'r''} + \bar{\mathbf{M}}'' - \mathbf{W}'' + \overline{c'\mathbf{k}''} + \overline{c'\mathbf{q}''} + \overline{c''r'''} + \bar{R} = 0, \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man $\bar{s}$ und S nach Belieben bestimmen, wenn die Auflager- und Gelenkreaktionen $\bar{r}$ und $\bar{R}$ wie oben gefunden sind.

11. *Reaktionsfreie Impulsion am Kurbelmechanismus.* Um unsere kinetostatischen Grundgleichungen auf Impulsprobleme anzuwenden, hat man in denselben nur $\bar{k}^{(\iota)}$ durch $\bar{h}^{(\iota)}$, $\bar{q}^{(\iota)}$ durch $\bar{p}^{(\iota)} = S^{(\iota)}\mu\bar{v}$ und $\bar{W}^{(\iota)}$ durch $\bar{V}^{(\iota)} = S^{(\iota)}\mu\overline{(x-c)v}$ zu ersetzen. Sie lauten also für den Kurbelmechanismus mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung

$$(A) \quad \begin{cases} -\bar{r} + \bar{\mathbf{h}} - \bar{\mathbf{p}} + \bar{r}' = 0, \\ -\bar{r}' + \bar{\mathbf{h}}' - \bar{\mathbf{p}}' + \bar{r}'' = 0, \\ -\bar{r}'' + \bar{\mathbf{h}}'' - \bar{\mathbf{p}}'' + \bar{r}''' = 0, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{V}} - \overline{e\mathbf{h}} + \overline{e\mathbf{p}} + \overline{er} = 0, \\ \bar{\mathbf{M}}' - \bar{\mathbf{V}}' - \overline{e'(\mathbf{h} + \mathbf{h}')} + \overline{e'(\mathbf{p} + \mathbf{p}')} + \overline{e'r} = 0, \\ \bar{\mathbf{M}}'' - \bar{\mathbf{V}}'' - \overline{e''(\mathbf{h} + \mathbf{h}' + \mathbf{h}'')} + \overline{e''(\mathbf{p} + \mathbf{p}' + \mathbf{p}'')} + \overline{e''r} + \bar{R} = 0. \end{cases}$$

Hierin ist

$$(I) \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{p}} = \mu\overline{\omega a}, \\ \bar{\mathbf{p}}' = \mu'(\overline{\omega e} + \overline{\sigma a}'), \\ \bar{\mathbf{p}}'' = \mu''(\overline{\omega e} + \overline{\sigma e}'). \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{T}\omega \cdot \bar{\eta}, \\ \bar{\mathbf{V}}' = \mathbf{T}'\sigma \cdot \bar{\eta} + \lambda'\mu' ee' \cos(\psi - \vartheta)\omega \cdot \bar{\eta}, \\ \mathbf{V}'' = 0. \end{cases}$$

Wir suchen nun das bereits von **Cartesius** für den einzelnen starren Körper gelöste Problem des *Centrum percussionis* auf den Kurbelmechanismus zu übertragen, indem wir in den Achsen der drei Glieder drei Momentankräfte $\bar{h}$, $\bar{h}'$, $\bar{h}''$ angreifen lassen und die Forderung

stellen, daß die Impulsreaktionen $\bar{r}$, $\bar{r}'$, $\bar{r}''$, $\bar{R}$ einzeln verschwinden. Die Angriffspunkte der eingeprägten Momentankräfte seien bestimmt durch die Strecken
$$\bar{z} = \nu \cdot \bar{e}, \quad \bar{z}' = \nu' \cdot \bar{e}', \quad \bar{z}'' = \nu'' \cdot \bar{e}''.$$

Zugleich setzen wir, wie bisher
$$\bar{a} = \lambda \cdot \bar{e}, \quad \bar{a}' = \lambda' \cdot \bar{e}', \quad \bar{a}'' = \lambda'' \cdot \bar{e}''.$$

Die Gleichungen (A) und (B) liefern die zu erfüllenden Bedingungsgleichungen:

(A') $$\bar{h} = \bar{\mathfrak{p}}, \quad \bar{h}' = \bar{\mathfrak{p}}', \quad \bar{h}'' = \bar{\mathfrak{p}}''.$$

(B') $$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{V}}, \quad \bar{\mathbf{M}}' = \bar{\mathbf{V}}', \quad \bar{\mathbf{M}}'' = \bar{\mathbf{V}}'' = 0,$$

Ferner wird $\bar{\mathbf{M}} = \nu \cdot \overline{eh}$, $\bar{\mathbf{M}}' = \nu' \overline{e'h'}$ und $\bar{h}''$ muß wegen $\bar{\mathbf{M}} = 0$ in die Achse des dritten Gliedes fallen, während ν'' unbestimmt bleibt.

Die Gleichungen (A') geben, wenn wir die Beziehung $\sigma = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} \cdot \omega$ beachten:

(A'') $$\begin{cases} \bar{h} = \lambda\mu\omega \cdot \overline{\eta e}, \text{ d. h. } h = \lambda\mu e\omega, \\ \bar{h}' = \mu'\omega\left(\overline{\eta e} + \lambda' \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} \cdot \overline{\eta e'}\right), \\ \bar{h}'' = \mu''\omega\left(\overline{\eta e} + \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} \cdot \overline{\eta e'}\right). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (B') erhält man

(B'') $$\begin{cases} \nu \cdot \overline{eh} = \mathbf{T}\bar{\omega}, \\ \nu' \cdot \overline{e'h'} = \left[\mathbf{T}' \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} + \lambda'\mu' ee' \cos(\psi - \vartheta)\right]\bar{\omega}. \end{cases}$$

Nun ist
$$\left(\overline{\eta e} + \lambda' \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} \cdot \overline{\eta e'}\right)^2 = e^2 + 2\lambda' ee' \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} \cos(\psi - \vartheta) + \lambda'^2 \frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\operatorname{tg}^2\vartheta} e'^2 \equiv G'.$$

Setzen wir noch zur weiteren Abkürzung
$$e^2 + 2ee' \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} \cos(\psi - \vartheta) + \frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\operatorname{tg}^2\vartheta} e'^2 \equiv G''.$$

so erhält man für die Skalarwerte der Momentankräfte die Ausdrücke
$$\begin{aligned} h &= \lambda\mu e \cdot \omega, \\ h' &= \mu' \sqrt{G'} \cdot \omega, \\ h'' &= \mu'' \sqrt{G''} \cdot \omega. \end{aligned}$$

Hieraus folgen aus den Gleichungen (B'') durch Elimination von ω die Achsenabstände der Angriffspunkte
$$z = \frac{\mathbf{T}}{\mu a}, \quad z' = \frac{\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta}\mathbf{T}' + \mu' a' e \cos(\psi - \vartheta)}{\mu'\left[a' \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta} + e\cos(\psi - \vartheta)\right]}$$

und die einzuhaltenden Verhältniswerte der Momentankräfte

$$\frac{h'}{h} = \frac{\mu'}{\mu} \frac{\sqrt{G'}}{a}, \quad \frac{h''}{h} = \frac{\mu''}{\mu} \frac{\sqrt{G''}}{a}.$$

Die Richtungen der Momentankräfte ergeben sich, wie folgt: $\bar{h}$ steht nach Gleichung (A_1'') senkrecht auf $\bar{e}$, $\bar{h}''$ liegt in der Achse der Kolbenstange, da nach Gleichung (B_3') das Moment $\overline{\mathbf{M}}''$ verschwindet. Nur $\bar{h}'$ hat eine mit ϑ veränderliche Neigung gegen die Achse ($\bar{e}'$) der Pleuelstange, die sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}(\bar{e}'/\bar{h}') = \frac{\overline{e'h'}}{\bar{e}'\,\bar{h}'} = \frac{e\cos(\psi - \vartheta) + a'\,\dfrac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\vartheta}}{e\sin(\psi - \vartheta)}$$

berechnen und auch leicht konstruieren läßt. Hiermit ist das Problem der reaktionsfreien Impulsion am Kurbelmechanismus vollständig gelöst. Vielleicht gibt die vorstehende Behandlung des verallgemeinerten Perkussionsproblems Veranlassung, die Frage nach der Existenz der Stoßmittelpunkte bei Mechanismen von mehr als *einem* Freiheitsgrad der Beweglichkeit zu untersuchen.

Der Ansatz für den besonderen Fall des Wattschen Regulators ergibt sich aus den kinetostatischen Gleichungen in Nr. 12.

Fig. 11a.

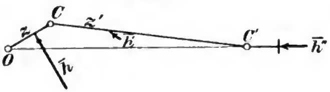
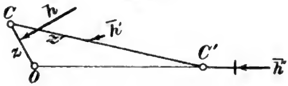


Fig. 11b.



In Fig. 11a und 11b sind die berechneten Werte der Stoßkräfte am Kurbelmechanismus für $\frac{e}{e'} = \frac{1}{4}$, $\lambda' = \frac{1}{2}$, und die Erhebungswinkel $\vartheta = 30^0$, $\vartheta = 120^0$ zeichnerisch dargestellt.

12. *Beispiel einer verzweigten Körperkette. — Zentrifugalregulator.* Bisher haben wir uns auf die *einfache* d. h. unverzweigte Körperkette beschränkt, bei welcher jedes Glied nur zwei Verbindungsstellen besaß. Als einfaches Beispiel einer *verzweigten* Kette betrachten wir im Folgenden den Wattschen Regulator (Fig. 12). Man erkennt sofort, daß C^{IV} der einzige Verzweigungspunkt in diesem Mechanismus von zwei Freiheitsgraden ist. Von hier aus kann man nicht nur rückwärts zu C, vorwärts zu C', sondern auch seitwärts zu C''' gelangen. $\mathfrak{K}$ sei der um die Vertikalachse rotierende Tragkörper, C ein beliebiger Punkt in der Achse seines Tragzapfens. Mit $\mathfrak{K}'$ bezeichnen wir dasjenige Glied, welches die Schwungkugel enthält. Ferner ist $\mathfrak{K}''$ der Verbindungs-

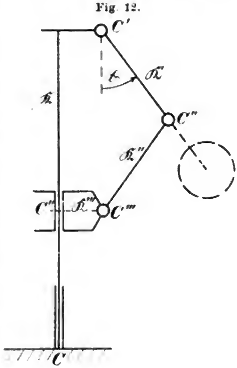
körper zwischen C'' und C''' und $\mathfrak{K}'''$ die Hülse, welche $\mathfrak{K}$ zylindrisch umfaßt. Die kinetostatischen Grundgleichungen lauten jetzt, wenn wir unsere bisherige Bezeichnungsweise beibehalten:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} -\bar{r} + \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}} + \bar{r}' - \bar{r}^{IV} = 0, \\ -\bar{r}' + \bar{\mathbf{k}}' - \bar{\mathbf{q}}' + \bar{r}'' = 0, \\ -\bar{r}'' + \bar{\mathbf{k}}'' - \bar{\mathbf{q}}'' + \bar{r}''' = 0, \\ -\bar{r}''' + \bar{\mathbf{k}}''' - \bar{\mathbf{q}}''' + \bar{r}^{IV} = 0, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} -\bar{R} + \bar{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{W}} + \overline{c' r'} + \bar{R}' - \bar{R}^{IV} = 0 \\ -\overline{c' r'} - \bar{R}' + \bar{\mathbf{M}}' + \overline{c' \mathbf{k}'} - \bar{\mathbf{W}}' - \overline{c' \mathbf{q}'} + \overline{c'' r''} + \bar{R}'' = 0, \\ -\overline{c'' r''} - \bar{R}'' + \bar{\mathbf{M}}'' + \overline{c'' \mathbf{k}''} - \bar{\mathbf{W}}'' - \overline{c'' \mathbf{q}''} + \overline{c''' r'''} + \bar{R}''' = 0, \\ -\overline{c''' r'''} - \bar{R}''' + \bar{\mathbf{M}}''' + \overline{c''' \mathbf{k}'''} - \bar{\mathbf{W}}''' - \overline{c''' \mathbf{q}'''} + \overline{c^{IV} r^{IV}} + \bar{R}^{IV} = 0. \end{cases}$$

Formal sind in diesen Gleichungen 15 Raumkomponenten entsprechend den Reaktionen $\bar{r}$, $\bar{r}'$, $\bar{r}''$, $\bar{r}'''$, $\bar{r}^{IV}$ und ebensoviele Komponenten der Reaktionsmomente $\bar{R}$, $\bar{R}'$, $\bar{R}''$, $\bar{R}'''$, $\bar{R}^{IV}$ enthalten. Von $\bar{r}^{IV}$ fällt die Vertikalkomponente aus. Von $\bar{R}$, $\bar{R}'$, $\bar{R}''$, $\bar{R}^{IV}$ fällt je eine Komponente aus, weil die betreffenden Gelenkverbindungen zylindrische sind. In C''' müssen wir uns eine Kugelgelenkverbindung vorstellen, so daß $\bar{R}''' = 0$ wird. Es bleiben also im ganzen $30 - 1 - 4 - 3 = 22$ Reaktionskomponenten zu bestimmen. Zur Auflösung der Gleichungen (A) und (B) verfährt man ähnlich wie in Nr. 11. Es ist jedoch im vorliegenden Falle — wie bei allen Raumketten — zweckmäßig, von vornherein in jedes Glied ein mit demselben fest verbundenes Achsenkreuz zu legen und dasselbe gegen den ruhenden Raum[1]) $C_{x,y,z}$ zu orientieren. Dies geschieht hier durch Einführung des Ausschlagwinkels ϑ (Fig. 12) und des Azimutes ψ der rotierenden Pendelebene. Die Zerlegung der Gleichungen (A) und (B) in Komponenten nach dem Achsenkreuz Cx, y, z gibt 24 Komponentengleichungen, in denen $r_z^{IV} = 0$, $R_x''' = 0$, $R_y''' = 0$, $R_z''' = 0$ und diejenigen Komponenten von $\bar{R}$, $\bar{R}'$, $\bar{R}''$, $\bar{R}^{IV}$ gleich Null zu setzen sind, welche in die betreffende Zylindergelenkachse fallen. Die Bedingungsgleichungen $r_z^{IV} = 0$, $R_z = 0$

Fig. 12.



1) C_z soll mit der Rotationsachse von $\mathfrak{K}$ zusammenfallen.

liefern die beiden *Differentialgleichungen der Bewegung* des Mechanismus und zwar als lineare Kombinationen der gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen. Zur eindeutigen Bestimmung der 22 Reaktionskomponenten reichen also die Gleichungen (A) und (B) vollständig aus.

13. *Das deformierbare Band als Grenzfall der einfachen Körperkette.* Bekanntlich kann man jedes Kugelgelenk durch drei zu einander senkrechte Zylindergelenke, deren Achsen sich in dem Kugelmittelpunkt schneiden, ersetzen. Mit dieser Interpretation wollen wir uns die in Nr. 9 betrachtete Kugelgelenkkette vorstellen und zugleich einen Grenzübergang vornehmen. Alle Gelenkdistanzen CC', $C'C''$ usw. sollen unendlich klein werden, so daß man die Schwerpunkte dieser unendlich kleinen Glieder mit den betreffenden Gelenkzentren zusammenfallend denken kann. Wir nehmen ferner an, daß jedes Glied nach dem Grenzprozeß gegen das unmittelbar vorangehende um eine Achse gedreht sei, die der vorangehenden unendlich benachbart ist. Auch die Amplitude dieser *relativen* Rotation sei unendlich klein. Nehmen wir noch die Glieder (Scheibchen) von gleichem Querschnitte an, so nähert sich unter diesen Voraussetzungen unsere Kette einem *Kontinuum,* dessen Längendimension wir als sehr groß gegen die Ausdehnungsmaße des Querschnittes annehmen wollen. Ausdehnung in der Längenachse ist durch die Vorstellung der Kugelgelenk-Kette prinzipiell ausgeschlossen, während die Beweglichkeit der Zylindergelenke noch weiter spezialisiert werden kann. Ein materielles System von dieser Beschaffenheit wollen wir kurz als *Band* bezeichnen, ohne darüber Bestimmungen zu treffen, ob es elastisch resp. teilweise oder vollständig widerstandslos biegsam sein soll. Sind überhaupt Biegungs- und Windungswiderstände irgend welcher Art vorhanden, so werden dieselben im Folgenden getrennt nach den drei Achsen des Cardanischen Gelenkes, welches dem Kugelgelenk äquivalent ist, betrachtet. Für ein beliebiges Element (CC') eines solchen Bandes können wir jetzt die kinetostatischen Grundgleichungen hinschreiben. Sie lauten im allgemeinen Falle [(Nr. 8, Gleichung (A) und (B)]:

$$\bar{r}' - \bar{r} + \bar{k} - \bar{q} = 0 \tag{1}$$

$$-\overline{cr} + \bar{M} + \overline{ck} - \bar{W} - \overline{cq} + \overline{c'r'} + \bar{R}' - \bar{R} = 0. \tag{2}$$

Die Bogenlänge der Schwerpunktslinie des Bandes von einem beliebigen Punkte aus gerechnet, bezeichnen wir mit s. Dann ist angenähert

$$\bar{r}' = \bar{r} + \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot ds, \quad \bar{R}' = \bar{R} + \frac{d\bar{R}}{ds}\, ds,$$

so daß die Gleichungen (1) und (2) übergehen in

(3) $$d\bar{r} + \bar{k} + \bar{q} = 0,$$

(4) $$\bar{M} + \overline{ck} + \overline{c \cdot dr} + \overline{dc \cdot r} + d\bar{R} - \bar{W} - \overline{cq} = 0.$$

Nach Gleichung (3) ist aber

$$\overline{c \cdot dr} + \overline{ck} - \overline{cq} = 0,$$

womit Gleichung (4) einfacher wird, nämlich

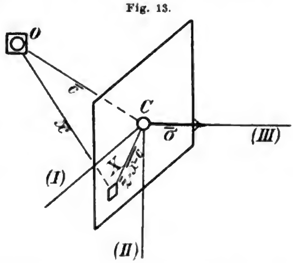
(5) $$\bar{M} + d\bar{R} + \overline{dc \cdot r} - \bar{W} = 0.$$

Die Resultante $\bar{k}$ aller eingeprägten Kräfte, welche auf das Bandelement CC' wirken, muß unendlich klein sein. Wir setzen daher

(6) $$\bar{k} = \bar{\varkappa} \cdot ds,$$

so daß $\bar{\varkappa}$ die auf die Längeneinheit des Bandes bezogene eingeprägte Kraft bedeutet. Ferner ist (Fig. 13)

Fig. 13.



$$\bar{M} = S\,\overline{(x - c)\,k} = S\,\overline{zk}.$$

Bezeichnen wir also mit $\bar{\mathfrak{k}}$ die eingeprägte Kraft bezogen auf die Volumeinheit des Bandes im Punkte $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}, z_{\mathrm{III}}$, so wird

$$\bar{k} = \bar{\mathfrak{k}} \cdot dz_{\mathrm{I}}\, dz_{\mathrm{II}}\, dz_{\mathrm{III}} = \bar{\mathfrak{k}} \cdot dz_{\mathrm{I}} dz_{\mathrm{II}} \cdot ds.$$

Folglich wird für

$$\bar{\varkappa} = \iint \bar{\mathfrak{k}} \cdot dz_{\mathrm{I}}\, dz_{\mathrm{II}},$$

$$\bar{m} = \iint \overline{z\mathfrak{k}} \cdot dz_{\mathrm{I}}\, dz_{\mathrm{II}},$$

wo in den Doppelintegralen die Grenzen über die ganze Fläche des Querschnittes zu erstrecken sind,

(7) $$\bar{M} = \bar{m} \cdot ds.$$

Setzen wir noch $\frac{d\bar{c}}{ds} = \bar{\sigma}$, so daß also $\bar{\sigma}$ die Einheitsstrecke auf der Schwerpunktslinie des Randes bedeutet, so nehmen die kinetostatischen Grundgleichungen jetzt die Form an:

(8) $$\frac{d\bar{r}}{ds} - \frac{\bar{q}}{ds} + \bar{\varkappa} = 0,$$

(9) $$\frac{d\bar{R}}{ds} - \frac{\bar{W}}{ds} + \bar{m} + \overline{\sigma r} = 0.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes C sei $\bar{v}$. Bezeichnet also $\mathfrak{m}$ die Masse des Bandes bezogen auf die Längeneinheit, so wird

(10) $$\bar{q} = \mathfrak{m}\,\frac{d\bar{v}}{d\tau} \cdot ds.$$

Die Rotationsbeschleunigung $\overline{W}$ (M. vergl. *Kinem.* S. 268) ist für einen Körper von endlichen Dimensionen definiert durch

$$\overline{W} = \frac{d\overline{J}}{d\tau},$$

wo

$$\overline{J} = S\mu\, z(\omega z) \qquad \text{ist.}$$

Wir setzen ferner, indem wir beachten, daß sich der Drehimpuls $\overline{J}$ ebenso wie die Beschleunigungsgröße $\overline{q}$ auf das Bandelement vom Querschnitt F und der Länge ds beziehen, besonders im Hinblick auf die weiterhin notwendig werdende Komponentenzerlegung aller hier auftretenden gerichteten Größen

$$\overline{J} = \frac{\mathfrak{m}}{F} \cdot \overline{\mathfrak{J}} \cdot ds. \tag{11}$$

Nach diesen Vorbereitungen nehmen die kinetostatischen Grundgleichungen (8) und (9) zunächst die Form an

$$\frac{d\overline{r}}{ds} + \overline{\varkappa} - \mathfrak{m}\frac{d\overline{v}}{d\tau} = 0, \tag{A}$$

$$\frac{d\overline{R}}{ds} + \overline{\sigma \overline{r}} + \overline{m} - \frac{\mathfrak{m}}{F}\frac{d\overline{\mathfrak{J}}}{d\tau} = 0. \tag{B}$$

Hierzu tritt noch eine *kinematische Bedingungsgleichung*, welche den geometrischen Zusammenhang der aufeinander folgenden Bandelemente zum Ausdruck bringt. Es ist nämlich („Kinematik" S. 309):

$$d\overline{c}' = d\overline{c} + \overline{d\vartheta e},$$

wenn $d\vartheta$ den Rotationswinkel des Bandelementes bedeutet.

Nun ist aber
$$\frac{d\overline{c}'}{ds} - \frac{d\overline{c}}{ds} = \frac{d\overline{v}}{ds} \cdot d\tau,$$

so daß man die Bedingungsgleichung des Zusammenhangs

$$\frac{d\overline{v}}{ds} = \overline{\omega \sigma} \tag{C}$$

erhält, wenn — wie oben — wieder $\overline{e} : ds = \overline{\sigma}$ gesetzt wird.

Die eben gewonnenen allgemeinen Gleichungen wenden wir jetzt der Reihe nach auf ein statisches und ein kinetisches Problem der Mechanik der bandförmigen Körper an.

14. *Allgemeine Komponentenzerlegung der statischen Gleichungen.* — In den Gleichnngen (A) und (B) der vorigen Nummer lassen wir die Beschleunigungsglieder fort und erhalten die statischen Relationen

$$\frac{d\overline{r}}{ds} + \overline{\varkappa} = 0, \tag{A}$$

$$\frac{d\overline{R}}{ds} + \overline{\sigma \overline{r}} + \overline{m} = 0. \tag{B}$$

die man wiederholt in den Lehrbüchern[1]) der Elastizität *direkt* (d. h. nicht durch Grenzübergang aus der Körperkette) abgeleitet findet. Um hierin die absoluten Differentialquotienten $\frac{d\bar{r}}{ds}$, $\frac{d\bar{R}}{ds}$ durch die relativen, welche wir vorübergehend[2]) durch die Symbole $\frac{\mathfrak{d}\bar{r}}{\mathfrak{d}s}$, $\frac{\mathfrak{d}\bar{R}}{\mathfrak{d}s}$ bezeichnen, auszudrücken, setzen wir

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{ds} = \bar{\varpi} \tag{1}$$

und nennen diese Größe die *Rotation*. Es ist dann bekanntlich

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \overline{\bar{\varpi} r} + \frac{\mathfrak{d}\bar{r}}{\mathfrak{d}s}, \tag{2}$$

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \overline{\bar{\varpi} R} + \frac{\mathfrak{d}\bar{R}}{\mathfrak{d}s}. \tag{3}$$

Zerlegen wir jetzt in Komponenten nach dem mit s veränderlichen Achsenkreuz $C_{\mathrm{I},\,\mathrm{II},\,\mathrm{III}}$, so wird

$$\text{(A')}\quad \begin{cases} \frac{dr_{\mathrm{I}}}{ds} + \varpi_{\mathrm{II}} r_{\mathrm{III}} - \varpi_{\mathrm{III}} r_{\mathrm{II}} + \varkappa_{\mathrm{I}} = 0, \\ \frac{dr_{\mathrm{II}}}{ds} + \varpi_{\mathrm{III}} r_{\mathrm{I}} - \varpi_{\mathrm{I}} r_{\mathrm{III}} + \varkappa_{\mathrm{II}} = 0, \\ \frac{dr_{\mathrm{III}}}{ds} + \varpi_{\mathrm{I}} r_{\mathrm{II}} - \varpi_{\mathrm{II}} r_{\mathrm{I}} + \varkappa_{\mathrm{III}} = 0 \end{cases}$$

und

$$\text{(B')}\quad \begin{cases} \frac{dR_{\mathrm{I}}}{ds} + \varpi_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{III}} - \varpi_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{II}} - r_{\mathrm{II}} + m_{\mathrm{I}} = 0, \\ \frac{dR_{\mathrm{II}}}{ds} + \varpi_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{I}} - \varpi_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{III}} + r_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}} = 0, \\ \frac{dR_{\mathrm{III}}}{ds} + \varpi_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{II}} - \varpi_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{III}} = 0. \end{cases}$$

In den letzten Gleichungen ist nach Nr. 13

$$\text{(C)}\quad \begin{cases} m_{\mathrm{I}} = \iint z_{\mathrm{II}}\, \mathfrak{k}_{\mathrm{III}}\, dz_{\mathrm{I}}\, dz_{\mathrm{II}}, \quad m_{\mathrm{II}} = -\iint z_{\mathrm{I}}\, \mathfrak{k}_{\mathrm{III}}\, dz_{\mathrm{I}}\, dz_{\mathrm{II}}, \\ \qquad m_{\mathrm{III}} = \iint (z_{\mathrm{I}}\, \mathfrak{k}_{\mathrm{II}} - z_{\mathrm{II}}\, \mathfrak{k}_{\mathrm{I}})\, dz_{\mathrm{I}}\, dz_{\mathrm{II}} \end{cases}$$

(alle Integrale über den Querschnitt F erstreckt) zu setzen. Zu diesen Gleichungen treten noch die bekannten Ausdrücke (M. vergl. etwa meine Kinematik S. 241) der Rotationskomponenten ϖ_{I}, ϖ_{II}, ϖ_{III} durch den Kontingenzwinkel $d\psi$, den Torsionswinkel $d\chi$ und den Winkel λ,

1) Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862. S. 204—209. Love Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge, 1893. Bd. 2. S. 63—65.

2) In den Komponentengleichungen ersetzt man wieder die $\mathfrak{d}$ durch die d oder ∂.

welchen die Hauptnormale der Schwerpunktslinie des Bandes mit der Richtung C_{II} einschließt, nämlich

$$\text{(D)} \qquad \varpi_I = \cos\lambda \frac{d\psi}{ds}, \quad \varpi_{II} = \sin\lambda \frac{d\psi}{ds}, \quad \varpi_{III} = \frac{d\lambda}{ds} - \frac{d\chi}{ds}.$$

Als *Positionskoordinaten* des Bandelementes führt man neben den rechtwinkligen Koordinaten c_1, c_2, c_3 (bezogen auf das im Raume feste Achsenkreuz $O_{1,2,3}$) die Eulerschen Winkel α, β, γ (Kinematik S. 175 und S. 220) ein, welche die Stellung von $C_{I, II, III}$ gegen $O_{1,2,3}$ eindeutig angeben. Es ist dann

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \varpi_I = \frac{d\gamma}{ds} - \sin\beta \frac{d\alpha}{ds}, \quad \varpi_{II} = \cos\beta \sin\gamma \frac{d\alpha}{ds} + \cos\gamma \frac{d\beta}{ds}, \\ \qquad \varpi_{III} = \cos\beta \cos\gamma \frac{d\alpha}{ds} - \sin\gamma \frac{d\beta}{ds}. \end{cases}$$

Hiermit ist das ganze Formelsystem für die *Statik des Bandes* zusammengestellt.

15. *Gleichgewichtsbedingungen eines vollkommen verdrehbaren, einachsig biegsamen Bandes. — Riemen, Papierstreifen.* In der Elastizitätstheorie sind die Momentkomponenten R_I, R_{II}, R_{III} einzeln proportional den Rotationskomponenten ϖ_I, ϖ_{II}, ϖ_{III}, und der Proportionalitätsfaktor von R_{III} wird durch St. Venants Torsionstheorie bestimmt. Dieser Weg ist gut ausgebaut, und wir brauchen dabei, soweit die Statik der *elastischen* Bänder in Betracht kommt, denselben hier nicht zu betreten. Uns interessiert vielmehr hier gerade die Mechanik der unelastischen, in gewissen Richtungen *vollkommen biegsamen* Bänder, die man bisher — trotz ihrer vielseitigen Anwendbarkeit — wenig und dann nur in ganz speziellen Fällen theoretisch behandelt hat.

Stellen wir uns, um die Begriffe zu fixieren, eine gegerbte Haut vor, welche die Gestalt einer stetig gekrümmten Fläche hat. Auf dieser wollen wir eine beliebige stetig gekrümmte Linie ziehen und rechts und links in gleichem Abstande Schnitte legen, welche einen *Riemen* abtrennen. Seine Querdimension $(2a_I)$ sei groß gegen die Lederdicke $(2a_{II})$ und der ganze Riemen sehr lang im Verhältnis zu den Dimensionen des Querschnittes F, welcher mit der Koordinatenebene $C_{I, II}$ zusammenfallen soll. Die Schwerpunktslinie der aufeinanderfolgenden Querschnitte hat nach diesen Festsetzungen die Richtung C_{III}. Der hinreichend dünne Riemen wird leicht biegsam um die Achse C_I sein und leicht kleine Verdrehungen um die Längenachse C_{III} gestatten, aber einer Biegung um die Achse C_{II} einen großen Widerstand entgegensetzen, wenn er genügend breit ist. Ein Papierstreifen zeigt dieses Verhalten vielleicht noch deutlicher. Diese Tatsache idealisieren

wir jetzt und verstehen unter einem *Riemen* ein Band, für welches in jedem Element die Reaktionsmomente R_{I} und R_{III} verschwinden, während $R_{\text{II}} = R$ von Null verschieden ist. Die Gleichungen A' in Nr. 14 werden durch diese Beschränkung nicht betroffen, dagegen erhalten die Gleichungen (B') für den Riemen die Form:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} -\bar{\omega}_{\text{III}} R - r_{\text{II}} + m_{\text{I}} = 0, \\ \dfrac{dR}{ds} + r_{\text{I}} + m_{\text{II}} = 0, \\ \bar{\omega}_{\text{I}} R + m_{\text{III}} = 0. \end{cases}$$

Im Folgenden wollen wir, um Verwechslungen mit dem Krümmungsradius r_1 und dem Torsionsradius r_2 zu vermeiden, $\bar{t}$ statt $\bar{r}$ schreiben. Diese Gleichungen in Verbindung mit A' (Nr. 14) sind zur Bestimmung der Gestalt des Riemens und der Spannungskomponenten t_{I}, t_{II}, t_{III}, R im Gleichgewichtsfalle hinreichend, wenn, wie immer, die Grenzbedingungen hinzugenommen werden. Betrachten wir im besonderen einen Riemen, der ursprünglich eben und gerad ist, oder, was damit übereinkommt, einen Papierstreifen[1]), so bleibt bei jeder Deformation, welche entsteht, indem derselbe über eine Fläche vom Krümmungsmaß Null aufgelegt wird, $\lambda = 0$, d. h. in den Gleichungen (A') (Nr. 14) wird $\bar{\omega}_{\text{II}} = 0$. Man erhält also jetzt die Gleichgewichtsbedingungen, wenn man noch $\bar{\omega}_{\text{I}} = \frac{1}{r_1}$, $\bar{\omega}_{\text{III}} = -\frac{1}{r_2}$ setzt,

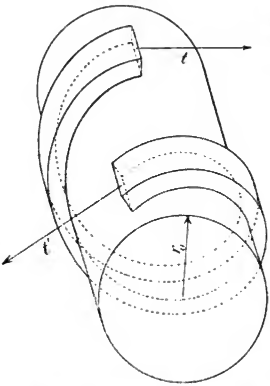
$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dt_{\text{I}}}{ds} + \dfrac{t_{\text{II}}}{r_2} + \varkappa_{\text{I}} = 0, \\ \dfrac{dt_{\text{II}}}{ds} - \dfrac{t_{\text{III}}}{r_1} - \dfrac{t_{\text{I}}}{r_2} + \varkappa_{\text{II}} = 0, \\ \dfrac{dt_{\text{III}}}{ds} + \dfrac{t_{\text{II}}}{r_1} + \varkappa_{\text{III}} = 0, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \dfrac{R}{r_2} - t_{\text{II}} + m_{\text{I}} = 0, \\ \dfrac{dR}{ds} + t_{\text{I}} + m_{\text{II}} = 0, \\ \dfrac{R}{r_1} + m_{\text{II}} = 0. \end{cases}$$

1) Dieser Ausdruck sowie das Wort Riemen darf selbstverständlich nicht in dem Sinne aufgefaßt werden, als ob die oben definierte typische Bandform als materielles System mit einem wirklichen Papierstreifen in jeder Hinsicht identisch wäre. Biegt man einen schmalen Streifen Zeichenpapier derart, daß die Schwerpunktachse mit einer gegebenen, stetig gekrümmten Raumkurve zusammenfällt, so treten tatsächlich Biegungen um Achsen ein, welche deutlich gegen C_1 innerhalb des Papiers schräg geneigt sind. Diese Rotationen denkt man sich nach den Achsen C_{I} und C_{III} zerlegt und gelangt dadurch zur Vorstellung eines um eine

Diese wollen wir auf ein spezielles Reibungsproblem anwenden. Der Papierstreifen von der Breite $2a_{I}$ und der Dicke $2a_{II}$ sei auf einen Kreiszylinder mit dem Radius r_0 spiralisch aufgewunden und an den Enden durch Kräfte gespannt, welche diese Gleichgewichtslage mit Berücksichtigung der Reibung (aber mit Ausschluß der Schwere) ermöglichen. Die einem Riemenelement eingeprägten Kräfte $\bar{\mathfrak{f}}$ setzen sich dann zusammen aus der zur Zylinderfläche normalen Reaktion und der Reibung, während $\bar{t}$ und R den Spannungszustand bestimmen. Es wird

Fig. 14.



$$m_{I} = \int z_{II}\mathfrak{t}_{III}\,dF = a_{II}\int \mathfrak{t}_{III}\,dF = a_{II}\varkappa_{III},$$

$$m_{II} = -\int z_{I}\mathfrak{t}_{III}\,dF = 0,$$

$$m_{III} = \int z_{I}\mathfrak{t}_{II}\,dF - \int z_{II}\mathfrak{t}_{I}\,dF = -a_{II}\varkappa_{I}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Kräfte $\bar{\mathfrak{f}}$ gleichmäßig über die Unterfläche AB (Fig. 14) verteilt sind, was allerdings nur für einen schmalen Streifen zutreffen wird. Die Resultante $\bar{\varkappa}$ aus den Komponenten $\varkappa_{I}$, $\varkappa_{II}$, $\varkappa_{III}$ muß an der Grenze des Gleichgewichtes in den Mantel des Reibungskegels fallen. Bezeichnen wir also den Reibungskoeffizienten mit γ und den Reibungswinkel mit ζ, so daß $\operatorname{tg}\zeta = \gamma$ ist, so muß

$$\varkappa_{II} = \cos\zeta\cdot\varkappa$$

sein. Also lautet die Bedingungsgleichung

$$\varkappa_{II}^2 = \cos^2\zeta\cdot(\varkappa_{I}^2 + \varkappa_{II}^2 + \varkappa_{III}^2)$$

oder einfacher

$$\text{(III)}\qquad \gamma\varkappa_{II} = \sqrt{\varkappa_{I}^2 + \varkappa_{III}^2}.$$

Hieraus sind die Werte von $\varkappa_{I}, \varkappa_{II}, \varkappa_{III}$ aus den Gleichungen (I) einzusetzen. Die Gleichungen (II) geben nach Einsetzung der Momente m_{I}, m_{II}, m_{III}

$$\text{(1)}\qquad a_{II}\varkappa_{III} - t_{II} + \frac{R}{r_2} = 0,$$

$$\text{(2)}\qquad \frac{dR}{ds} + t_{I} = 0,$$

$$\text{(3)}\qquad -a_{II}\varkappa_{I} + \frac{R}{r_1} = 0,$$

Querachse biegsamen und um die Längsachse verdrehbaren Bandes, wie sie im Text verfolgt ist. Daß beide Drehungen reaktionsfrei ($R_{I} = 0$, $R_{III} = 0$) verlaufen, ist — wie gesagt — eine Hypothese von beschränkter Zulässigkeit.

woraus durch Elimination von R folgt:

$$a_{II}\left(\frac{1}{r_1}\frac{dt_{II}}{ds}+\frac{d^2t_{III}}{ds^2}\right)+\frac{dt_{II}}{ds}+\frac{t_I}{r_2}=0, \tag{4}$$

$$a_{II}\left(\frac{1}{r_2}\frac{dt_{II}}{ds}+\frac{d^2t_I}{ds^2}\right)-\frac{t_I}{r_1}=0. \tag{5}$$

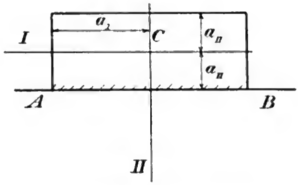
Gleichung (III) wird

$$\gamma^2\left(-\frac{t_I}{r_2}-\frac{t_{III}}{ds}+\frac{dt_{II}}{ds}\right)^2=\left(\frac{t_{II}}{r_2}+\frac{dt_I}{ds}\right)^2+\left(\frac{t_{II}}{r_1}+\frac{dt_{III}}{ds}\right)^2. \tag{6}$$

Die Integration der Gleichungen (4), (5), (6), liefert, *wenn* sie möglich ist, die Spannungskomponenten t_I, t_{II}, t_{III} als Funktionen der Bogenlänge s. Dann folgt R aus Gleichung (2) durch eine Quadratur.

Für einen unendlich dünnen Streifen ($a_{II}=0$) wird $R=0$, $t_I=0$ und $t_{II}=0$. Es bleibt also nur $t_{III}=t$ von Null verschieden. Die Gleichung (6) reduziert sich auf

Fig. 15.



$$\frac{\gamma}{r_1}t=\frac{dt}{ds},$$

welche aus der Fadentheorie seit Euler bekannt ist. Man erhält durch Integration die einfache Spannungsbeziehung

$$t=t^0e^{\frac{\gamma}{r_1}s},$$

wenn t^0 die Längsspannung im Punkte $s=0$ bedeutet. Führt man noch den Steigungswinkel α der Spirale, den Radius r_0 des Zylinders und den Winkel φ durch die Gleichung

$$s=\frac{r_0}{\cos\alpha}\cdot\varphi$$

ein, so wird

$$t=t^0\cdot e^{\gamma\cos\alpha\cdot\varphi}.$$

Der Riemen verhält sich also in diesem Falle ganz wie ein Faden. Für $r_2=\infty$ ist der Steigungswinkel $\alpha=0$ und in Gleichung (3) wird $\varkappa_I=0$, also nach Gleichung (2) auch $t_I=0$. Wir schreiben jetzt r statt r_1 und a statt a_{II}. Jetzt geht die Gleichung (1) über in

$$t_{II}=-a\left(\frac{dt_{III}}{ds}+\frac{t_{II}}{r}\right)$$

und liefert sofort die Beziehung

$$t_{II}=-\frac{ar}{a+r}\frac{dt_{III}}{ds}. \tag{7}$$

Die Gleichung (6) nimmt die einfache Form an:

$$(8) \qquad \frac{d^2 t_{III}}{ds^2} - \frac{1}{\gamma a} \frac{d t_{III}}{ds} + \frac{a+r}{a r^2} t_{III} = 0 .$$

Ihr Integral ist

$$(9) \qquad t_{III} = A e^{\lambda_1 s} + B e^{\lambda_2 s},$$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(10) \qquad \lambda^2 - \frac{\lambda}{\gamma a} + \frac{a+r}{a r^2} = 0$$

sind und zwar

$$(11) \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{1-\varepsilon}}{\gamma a}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon}}{\gamma a},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$(12) \qquad 4 \frac{\gamma^2}{r^2} a (a + r) = \varepsilon .$$

Zur Konstantenbestimmung muß man den Anfangswert von $\frac{d t_{III}}{ds}$ kennen. Dieser ist aber nach Gleichung (7)

$$\left(\frac{d t_{III}}{ds}\right)^0 = - \frac{a+r}{a r} t_{II}^0 .$$

Man kann ihn in dieser Form einführen. Wir wollen jedoch $t_{II}^0 = 0$ setzen, also annehmen, daß die Anfangsspannung des Riemens in die Tangente seiner Schwerpunktslinie fällt. Dann folgt aus Gleichung (9)

$$A + B = t_{III}^0,$$

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = 0$$

und hieraus

$$A = - \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} t_{III}^0, \quad B = \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} t_{III}^0 .$$

Für die Längsspannung erhält man demnach den fertigen Ausdruck

$$(IV) \qquad t_{III} = \frac{1}{2} \frac{t_{III}^0}{\sqrt{1-\varepsilon}} \left[\left(1 + \sqrt{1-\varepsilon}\right) e^{\lambda_2 s} - \left(1 - \sqrt{1-\varepsilon}\right) e^{\lambda_1 s} \right].$$

Setzt man zur Kontrolle $a = 0$, so wird $\varepsilon = 0$ und $\lambda_2 = \frac{\gamma}{r}$. Man erhält also die bekannte **Euler**sche Seilformel

$$t_{III} = t_{III}^0 e^{\frac{\gamma}{r} s} .$$

Aus Gleichung (IV) entwickelt man $\frac{d t_{III}}{ds}$ und gewinnt sofort nach Gleichung (7)

$$(V) \qquad t_{II} = \frac{2\gamma}{r} \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon}} \left(e^{\lambda_1 s} - e^{\lambda_2 s}\right) t_{III}^0 .$$

Hiermit ist dieses spezielle Problem vollständig gelöst. Die Spannung t_{II} entspricht einer scherenden Beanspruchung des über den Zylinder gelegten Riemens. Sie ist der Dicke proportional und wächst rasch mit dem Bogen s. Wählt man also die Dicke des Riemens allein mit Rücksicht auf t_{III} (Zugfestigkeit), so kann man nachträglich t_{II} aus Gleichung (V) berechnen und mit der Scherfestigkeit vergleichen.

16. *Bewegungsgleichungen eines vollkommen verdrehbaren und außerdem zweiachsig biegsamen Bandes. — Kabel.* Unter diesen Voraussetzungen verschwinden die drei Spannungsmomente R_I, R_{II}, R_{III}. Denselben entspricht angenähert ein weiches Litzenkabel von kleinem Querschnitt im Verhältnis zur Längenausdehnung, weshalb wir berechtigt sind, ein derartig definiertes Band kurz als Kabel zu bezeichnen. In jedem einzelnen Anwendungsfalle wird man sich vor Benutzung der nachstehenden Bewegungsgleichungen zu überzeugen haben, ob die Voraussetzungen innerhalb des Deformationsbereiches des wirklichen Systems hinreichend erfüllt sind.

In den Gleichungen (A) von Nr. 13 ist nach Ausführung der Komponentenzerlegung zu setzen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\bar v}{d\tau}\right)_I &= \frac{dv_I}{d\tau} + \omega_{II} v_{III} - \omega_{III} v_{II}, \\
\left(\frac{d\bar v}{d\tau}\right)_{II} &= \frac{dv_{II}}{d\tau} + \omega_{III} v_I - \omega_I v_{III}, \\
\left(\frac{d\bar v}{d\tau}\right)_{III} &= \frac{dv_{III}}{d\tau} + \omega_I v_{II} - \omega_{II} v_I
\end{aligned}$$

und hierin noch — nach den Gleichungen (D) von Nr. 14 —

$$\text{(a)} \qquad \omega_I = \cos\lambda \frac{d\psi}{d\tau}, \quad \omega_{II} = \sin\lambda \frac{d\psi}{d\tau}, \quad \omega_{III} = \frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{d\chi}{d\tau}$$

zu schreiben. Die der Translation des Kabelelementes entsprechenden Differentialgleichungen lauten also, wenn wir wieder r durch t ersetzen:

$$\text{(I)} \left\{ \begin{aligned}
&\mathfrak{m}\left[\frac{dv_I}{d\tau} + \sin\lambda \frac{d\psi}{d\tau} v_{III} - \left(\frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{d\chi}{d\tau}\right) v_{II}\right] \\
&\qquad = \varkappa_I + \frac{dt_I}{ds} + \sin\lambda \frac{d\psi}{ds} t_{III} - \left(\frac{d\lambda}{ds} - \frac{d\chi}{ds}\right) t_{II}, \\
&\mathfrak{m}\left[\frac{dv_{II}}{d\tau} + \left(\frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{d\chi}{d\tau}\right) v_I - \cos\lambda \cdot \frac{d\psi}{d\tau} v_{III}\right] \\
&\qquad = \varkappa_{II} + \frac{dt_{II}}{ds} + \left(\frac{d\lambda}{ds} - \frac{d\chi}{ds}\right) t_I - \cos\lambda \cdot \frac{d\psi}{ds} t_{III} \\
&\mathfrak{m}\left[\frac{dv_{III}}{d\tau} + \cos\lambda \cdot \frac{d\psi}{d\tau} v_{II} - \sin\lambda \cdot \frac{d\psi}{d\tau} v_I\right] \\
&\qquad = \varkappa_{III} + \frac{dt_{III}}{ds} + \cos\lambda \cdot \frac{d\psi}{ds} t_{II} - \sin\lambda \cdot \frac{d\psi}{ds} t_I.
\end{aligned} \right.$$

In den Gleichungen (B) von Nr. 13 hat man unter Voraussetzung eines homogenen Kabelelementes

$$J_{\text{I}} = T_{\text{I}} \frac{d\omega_{\text{I}}}{d\tau}, \quad J_{\text{II}} = T_{\text{II}} \frac{d\omega_{\text{II}}}{d\tau}, \quad J_{\text{III}} = T_{\text{III}} \frac{d\omega_{\text{III}}}{d\tau}$$

$$T_{\text{I}} = \int z_{\text{II}}^2 \cdot dF, \quad T_{\text{II}} = \int z_{\text{I}}^2 \cdot dF, \quad T_{\text{III}} = T_{\text{I}} + T_{\text{II}}.$$

Dieselben nehmen also die Form an

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \mathfrak{m}\,\dfrac{T_{\text{I}}}{F}\left(\dfrac{d\omega_{\text{I}}}{d\tau} + \omega_{\text{II}}\omega_{\text{III}}\right) = m_{\text{I}} - t_{\text{II}}, \\ \mathfrak{m}\,\dfrac{T_{\text{II}}}{F}\left(\dfrac{d\omega_{\text{II}}}{d\tau} - \omega_{\text{III}}\omega_{\text{I}}\right) = m_{\text{II}} + t_{\text{I}}, \\ \mathfrak{m}\left\{\dfrac{T_{\text{I}} + T_{\text{II}}}{F}\dfrac{d\omega_{\text{III}}}{d\tau} - \dfrac{T_{\text{I}} - T_{\text{II}}}{F}\,\omega_{\text{I}}\omega_{\text{II}}\right\} = m_{\text{III}}. \end{cases}$$

Die Werte der Winkelgeschwindigkeitskomponenten und diejenigen der Winkelbeschleunigung sind aus den Gleichungen (a) zu entnehmen.

Es bleibt noch die Komponentenzerlegung der Bedingungsgleichungen des Zusammenhangs (Unausdehnbarkeit) des Kabels, also von Gleichung (C) der Nr. 13 übrig. Diese gibt

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_{\text{I}}}{\partial s} - \left(\dfrac{d\lambda}{ds} - \dfrac{d\chi}{ds}\right) v_{\text{II}} + \sin\lambda \cdot \dfrac{d\psi}{ds} v_{\text{III}} = \omega_{\text{II}}, \\ \dfrac{\partial v_{\text{II}}}{\partial s} + \left(\dfrac{d\lambda}{ds} - \dfrac{d\chi}{ds}\right) v_{\text{I}} - \cos\lambda \cdot \dfrac{d\psi}{ds} v_{\text{III}} = -\omega_{\text{I}}, \\ \dfrac{\partial v_{\text{III}}}{\partial s} + (\cos\lambda \cdot v_{\text{II}} - \sin\lambda \cdot v_{\text{I}})\dfrac{d\psi}{ds} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (I) bis (III) zusammen mit den Grenzbedingungen und den zeitlichen Anfangswerten sind zur Bestimmung der Unbekannten des Problems hinreichend.

Für $F = 0$ geht das Kabel in einen Faden über. Die Gleichungen (II) geben dann wegen $m_{\text{I}} = 0$ und $m_{\text{II}} = 0$ sofort $t_{\text{I}} = 0$, $t_{\text{II}} = 0$. Nimmt man noch weiter an, die Bewegung des Fadens erfolge in einer festen Ebene, so kann man $\lambda = 0$, $d\chi = 0$, $v_{\text{I}} = 0$ und $\dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{1}{r}$ setzen. Für $\varkappa_{\text{III}} = \varkappa_\sigma$, $\varkappa_{\text{II}} = \varkappa_\nu$, $v_{\text{II}} = 0$, $v_{\text{III}} = u$, $t_{\text{III}} = t$ und $\omega_{\text{I}} = \omega$ reduzieren sich dann die Gleichungen (I) auf

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \mathfrak{m}\left(\dfrac{dv}{d\tau} - \omega u\right) = \varkappa_\nu - \dfrac{t}{r}, & \text{(Normale } \nu) \\ \mathfrak{m}\left(\dfrac{du}{d\tau} + \omega v\right) = \varkappa_\sigma + \dfrac{dt}{ds} & \text{(Tangente } \sigma) \end{cases}$$

und die Gleichungen (III) werden

$$\text{(B)} \quad \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{u}{r} = -\omega, \quad \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{r} = 0.$$

Dies sind dieselben Beziehungen, welche H. Love in seinen *Theoretical Mechanics*, Cambridge, 1897. S. 304—307 abgeleitet hat.

Es bleibt abzuwarten, ob man die Gleichungen (I) bis (III) in Fällen, welche für die Anwendungen Bedeutung haben, integrieren kann. Vorläufig gewähren diese Gleichungen die Möglichkeit, bei der Bewegung eines Zuges von Schienenfahrzeugen, den man sich näherungsweise als ein Kabel vorstellen kann, die Größen ω_I, ω_{II}, ω_{III}, t_I, t_{II}, t_{III} zu bestimmen. Jetzt sind $\frac{d\psi}{ds}$, $\frac{d\chi}{ds}$, $\frac{d\lambda}{ds}$ bekannte Funktionen von s, welche durch die Geleislage gegeben sind.

Zum Fehlergesetz.

Von Birger Meidell aus Bergen.

Gauß hat in seiner Theoria Motus das nach ihm genannte Fehlergesetz aufgestellt, ein Gesetz, welches die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, bei der direkten Beobachtung einer unbekannten Größe einen gewissen Fehler zu machen. Seine Ableitung beruht auf drei Voraussetzungen:

1. Das arithmetische Mittel aus den durch eine Reihe von Beobachtungen erhaltenen Werten stellt den wahrscheinlichsten Wert der beobachteten Größe dar.

2. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Beobachtung einen gewissen Fehler zu machen, hängt nur von der Größe des Fehlers ab.

3. *A priori* kann ein jeder Wert mit gleich großer Wahrscheinlichkeit der wahre Wert der zu beobachtenden Größe sein.

Die zweite und dritte Annahme macht Gauß allerdings nur stillschweigend.

Diese Voraussetzungen sind aber alle drei willkürlich, und es ist bis jetzt nicht gelungen einen strengen Beweis des Postulats vom arithmetischen Mittel zu geben.

Was die zweite Voraussetzung betrifft, so verweisen wir auf die Einwendung von Bertrand. (Calcul des Probabilités pg. 177 Absch. 139.)

Über die Willkür der dritten Voraussetzung läßt sich wohl auch nicht disputieren.

Es dürfte in der Tat in der Praxis selten ein Fall vorkommen, bei dem man geneigt wäre, *a priori* einen jeden beliebigen Wert mit gleich großer Wahrscheinlichkeit als den wahren Wert der zu suchenden Größe anzusehen.

Läßt man die beiden Annahmen 2 und 3 fort, während man das Postulat vom arithmetischen Mittel beibehält, so erhält man (Poincaré, Calcul des Probabilités pg. 155) ein viel allgemeineres Fehlergesetz. *Da aber diese erste Voraussetzung ebenso willkürlich und kaum mehr oder weniger plausibel ist als die beiden fortgelassenen,* so wollen wir uns nun die Aufgabe stellen, auch *diese Voraussetzung möglichst zu reduzieren.*

Dies erreichen wir offenbar nur, indem wir sie, immer unter Berücksichtigung der Plausibilität, durch eine *möglichst allgemeine* ersetzen.

Wir werden in dieser Weise ein Fehlergesetz finden, das das Gaußsche und Poincarésche Fehlergesetz als Spezialfälle enthält.

Es mögen n direkte Beobachtungen ein und derselben Größe angestellt sein, welche die n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ergeben haben. Bezeichnet nun $\varphi(z, x_i)\,dx_i$ die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn z der wahre Wert ist, eine Beobachtung einen Wert zwischen x_i und $x_i + dx_i$ ergibt (so daß also $\varphi(z, x)$ das Fehlergesetz ist), so wird die entsprechende Wahrscheinlichkeit für das System von Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gleich dem Produkte

$$\varphi(z, x_1) \cdot \varphi(z, x_2) \cdots \varphi(z, x_n) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_n.$$

Wollen wir nun umgekehrt von den beobachteten Werten auf den wahren Wert schließen (also einen a posteriorischen Schluß ziehen), und ist $g(z)\,dz$ die a priorische Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wahre Wert zwischen z und $z + dz$ liegt, so wird nach dem Bayesschen Theorem die a posteriorische Wahrscheinlichkeit, daß die gesuchte Größe den wahren Wert z hat, proportional dem Produkte

$$(1) \qquad g(z) \cdot \varphi(z, x_1) \cdot \varphi(z, x_2) \cdots \varphi(z, x_n).$$

Dabei sind aber φ und g unbekannte Funktionen.

Der *wahrscheinlichste* Wert von z ist derjenige, der den Ausdruck (1) zu einem Maximum macht.

Um nun die Funktion $\varphi(z, x)$, das *Fehlergesetz*, zu finden, hat Gauß, wie schon oben erwähnt, angenommen, daß das Maximum vom Produkte (1) eben für den Wert

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

eintritt, und daß $\varphi(z, x)$ von der Form $\varphi(z - x)$ ist, während $g(z)$ konstant ist. In dieser Weise bekommt er das nach ihm genannte Fehlergesetz:

$$(3) \qquad \varphi(u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 u^2},$$

wo h eine Konstante ist, und u für $z - x$ gesetzt worden ist.

Läßt man φ und g von den letztgenannten Voraussetzungen frei, während man nur das erste Postulat von Gauß $\left(z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$ beibehält, so bekommt man das Fehlergesetz

$$\varphi(z, x) = \theta(x) \cdot e^{x \cdot A(z) + B(z)}, \tag{4}$$

wo θ ganz willkürlich ist, und A und B nur der Bedingung genügen müssen:

$$z \cdot A'(z) + B'(z) = 0. \tag{4'}$$

Außerdem findet man dann

$$g(z) = \text{constans}. \tag{4''}$$

(Poincaré, calcul des probabilités pg. 155.)

Wir wollen nun entsprechend dem, was oben gesagt wurde, die folgenden Voraussetzungen machen.

Erstens wollen wir annehmen, was bei direkt beobachteten Größen selbstverständlich erscheint, daß, wenn sämtliche Beobachtungen denselben Wert ergeben haben, dieser Wert dann auch der wahrscheinlichste ist.[1])

Dann wollen wir annehmen, daß sich der wahrscheinlichste Wert von z in der Form

$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{5}$$

darstellen läßt, wo f eine in den x_i homogene Funktion ist, was bei direkt beobachteten Größen wohl *die allgemeinste Voraussetzung ist, die sich plausibler Weise machen läßt,* und die das Postulat vom arithmetischen Mittel als Spezialfall enthält.[2])

Es folgt nun aber aus der ersten Annahme, daß f *vom ersten Grade* homogen ist; denn es soll ja sein

$$f(x, x, x, \cdots x) = x,$$

also auch z. B.

$$f(xp, xp, xp \cdots xp) = xp,$$

was aber wegen der Homogenität gleich

$$p^m f(x, x, x, \cdots x) \quad \text{also gleich} \quad p^m \cdot x \quad \text{ist;}$$

1) Auf die Wichtigkeit, diese Voraussetzung an die Spitze zu stellen, bin ich von Herrn Professor Brendel aufmerksam gemacht worden.

2) Wenn man sich die Aufgabe stellt zu finden, welche Funktionen $z = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ zu einem Fehlergesetz von der Form $G(z - x)$ führen, so findet man (Bertrand, Calcul des Probabilités pg. 182—83)

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + F(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \cdots, x_n - x_1).$$

so daß also

$$x p = p^m x, \quad \text{also} \quad m = 1.$$

Der Grad der Homogenität ist also 1.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} \lg \varphi(z, x) = \psi(z, x) & \text{und} \\ \dfrac{d}{d z} \lg g(z) = -\lambda(z), \end{cases}$$

und schreiben wir, daß die logarithmische Ableitung des Produktes (1) für $z = f$ ein Maximum sein soll, so haben wir die Gleichung

$$(7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n \psi(z, x_i) = \lambda(z) & \text{für} \\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = z. \end{cases}$$

Variieren wir die x_i so, daß dabei z konstant bleibt, so haben wir

$$(8) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n \frac{\partial \psi(z, x_i)}{\partial x_i} d x_i = 0, \\ \displaystyle\sum_1^n \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i} d x_i = 0; \end{cases}$$

woraus durch Elimination

$$\frac{\dfrac{\partial \psi(z, x_i)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\dfrac{\partial \psi(z, x_k)}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}} = \cdots$$

oder also

$$(9) \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}} = \frac{\dfrac{\partial \psi(z, x_i)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \psi(z, x_k)}{\partial x_k}} = P(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Da f homogen ist, so wird also P vom nullten Grade homogen, so daß

$$\sum_1^n x_\nu \frac{\partial P}{\partial x_\nu} = 0.$$

Indem man zur Abkürzung setzt

$$(10) \qquad \frac{\partial \psi(z, x_i)}{\partial x_i} = p(z, x_i),$$

hat man die Gleichung

$$\sum_1^n x_\nu \left\{p(z, x_k)\left(\frac{\partial p(z, x_i)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_\nu} + \frac{\partial p(z, x_i)}{\partial x_\nu}\right)\right.$$
$$\left. - p(z, x_i)\left(\frac{\partial p(z, x_k)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_\nu} + \frac{\partial p(z, x_k)}{\partial x_\nu}\right)\right\} = 0$$

oder:

$$p(z, x_k)\left(\frac{\partial p(z, x_i)}{\partial z}\sum_1^n x_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} + x_i \frac{\partial p(z, x_i)}{\partial x_i}\right)$$
$$- p(z, x_i)\left(\frac{\partial p(z, x_k)}{\partial z}\sum_1^n x_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} + x_k \frac{\partial p(z, x_k)}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Weil aber $z = f$ vom ersten Grade homogen ist, so wird

$$\sum_1^n x_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = z,$$

so daß wir haben

$$\frac{z\frac{\partial p(z, x_i)}{\partial z} + x_i \frac{\partial p(z, x_i)}{\partial x_i}}{p(z, x_i)} = \frac{z\frac{\partial p(z, x_k)}{\partial z} + x_k \frac{\partial p(z, x_k)}{\partial x_k}}{p(z, x_k)}$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$\Phi(z, x_i) = \Phi(z, x_k),$$

eine Gleichung, die nur dann bestehen kann, wenn Φ von z allein abhängt.

Setzen wir etwa $\Phi(z, x_i) = -u(z)$, so haben wir also, für $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ die Gleichung

$$z\frac{\partial p(z, x_i)}{\partial z} + x_i \frac{\partial p(z, x_i)}{\partial x_i} + u(z) p(z, x_i) = 0$$

oder allgemein

$$z\frac{\partial p(z, x)}{\partial z} + x \frac{\partial p(z, x)}{\partial x} + u(z) p(z, x) = 0. \tag{11}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird, wie man sieht

$$p(z, x) = U(z) \cdot V\left(\frac{x}{z}\right), \tag{12}$$

wo V die willkürliche Funktion ist, und U als von u abhängend ebenfalls willkürlich ist.

Nach (10) hat man dann durch Integration

$$\psi(z, x) = \alpha(z)\beta\left(\frac{x}{z}\right) + \gamma(z); \tag{13}$$

wo also α, β, γ alle drei willkürlich sind.

Substituiert man diesen Wert von ψ in die erste der Gleichungen (7), so bekommt man

$$\alpha(z)\sum_1^n \beta\left(\frac{x_i}{z}\right) + n\gamma(z) = \lambda(z)$$

oder

$$\sum_1^n \beta\left(\frac{x_i}{z}\right) = \frac{\lambda(z) - n\gamma(z)}{\alpha(z)} = F(z). \tag{14}$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Ableitung nach x_k, so haben wir

$$\beta'\left(\frac{x_k}{z}\right)\frac{1}{z} - \sum_1^n \beta'\left(\frac{x_i}{z}\right)\frac{x_i}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x_k} = F'(z)\frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

Multipliziert man beide Seiten mit x_k und nimmt beiderseits die Summe über alle k, so bekommt man

$$0 = F'(z)\cdot z;$$

das heißt F ist eine Konstante.

Ihren Wert finden wir, indem wir $x_1 = x_2 \cdots = x_n = x$ wählen; es wird dann nämlich nach Voraussetzung auch $z = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ gleich x und wir haben aus (14)

$$n\beta(1) = \frac{\lambda(z) - n\gamma(z)}{\alpha(z)} = F(z); \tag{15}$$

aber auch

$$\sum_1^n \beta\left(\frac{x_i}{z}\right) = n\beta(1). \tag{15'}$$

Es folgt hieraus

$$\lambda(z) = n(\gamma(z) + \beta(1)\alpha(z)). \tag{16}$$

Da diese Gleichung aber für alle ganzzahligen Werte von n gilt, was auch z sei, so muß sein:

$$\alpha(z)\beta(1) + \gamma(z) = 0 \tag{17}$$

und also auch

$$\lambda(z) = 0,$$

also nach (6):

$$g(z) = \text{constans}. \tag{18}$$

Wir finden also in dieser Weise auf einer allgemeineren, also weniger willkürlichen Grundlage das Resultat (4″) wieder.

Die Gleichung (13) gibt durch Integration

$$\lg\varphi(z, x) = \int\left\{\alpha(z)\beta\left(\frac{x}{z}\right) + \gamma(z)\right\}dz + \lg\theta(x),$$

oder vermöge (17):

$$(19) \qquad \lg \varphi(z, x) = \int \alpha(z) \left(\beta\left(\frac{x}{z}\right) - \beta(1)\right) dz + \lg \theta(x).$$

so daß wir schließlich haben

$$(20) \qquad \varphi(z, x) = \theta(x) \cdot e^{\int \alpha(z) \left(\beta\left(\frac{x}{z}\right) - \beta(1)\right) dz}.$$

Dies ist also die Form des Fehlergesetzes bei den gemachten Voraussetzungen. Es treten darin drei willkürliche Funktionen auf.

Durch die Gleichung (15′) sind β und z aneinander gebunden. Durch eine willkürliche Wahl von β findet man daraus rückwärts leicht das dem entsprechenden Fehlergesetze zugrunde gelegte z.

Nehmen wir zum Beispiel

$$\beta\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{x}{z},$$

so finden wir aus (15′)

$$z = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},$$

also das Postulat vom arithmetischen Mittel, das die Voraussetzung für das Gesetz (4) bildete und das wir auch wiederfinden, wenn wir diesen Wert von β in (20) einsetzen. Setzen wir nämlich $\int \frac{\alpha(z)}{z} dz = A(z)$ und $-\int \alpha(z)\, dz = B(z)$, so daß also

$$A'(z) \cdot z + B'(z) = 0$$

wird, so geht (20) über in

$$(21) \qquad \varphi(z, x) = \theta(x) \cdot e^{x \cdot A(z) + B(z)}.$$

Es sind dies genau die beiden Gleichungen (4) und (4′).

Nehmen wir $\beta\left(\frac{x}{z}\right) = \left(\frac{x}{z}\right)^p$, so haben wir

$$\frac{\sum x_i^p}{p} = n$$

oder also

$$z = \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}}$$

und (20) geht über in

$$(22) \qquad \varphi(z, x) = \theta(x) \cdot e^{x^p A(z) + B(z)},$$

wobei in ähnlicher Weise wie oben

$$A'(z) \cdot z^p + B'(z) = 0.$$

Nimmt man $\beta\left(\frac{x}{z}\right) = \lg\left(\frac{x}{z}\right)$, so bekommt man

$$z = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}.$$ [1]

In diesen Beispielen ist die Zahl der willkürlichen Funktionen, wegen der durch die willkürliche Wahl von β oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die willkürliche Wahl der Funktion z hinzukommenden Bedingungsgleichung zwischen $A(z)$ und $B(z)$, auf zwei reduziert. Man kann sie noch auf eins reduzieren, *wenn man zugeben will*, daß die Funktion $\varphi(z, x)$ im Punkte $x = z$ ein Maximum hat, oder mit anderen Worten, daß es bei einer Beobachtung wahrscheinlicher ist, den wahren Wert der beobachteten Größe als Beobachtungsresultat zu bekommen, als einen davon abweichenden Wert. (Dies würde natürlich voraussetzen, daß die Beobachtungsinstrumente nicht etwa ganz falsch konstruiert seien; was, wenn man es in jedem Falle mit in Betrachtung ziehen würde, natürlich zu allerlei *speziellen* „Fehlergesetzen" führen würde.) Wir setzen also

$$\left(\frac{\partial \lg \varphi(z, x)}{\partial x}\right)_{\text{für } z = x} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial \lg \varphi(z, x)}{\partial z}\right)_{z = x} = 0.$$

Erstens sehen wir aus (20), daß die zweite dieser Gleichungen erfüllt ist; denn $\alpha(z)\left(\beta\left(\frac{x}{z}\right) - \beta(1)\right)$ wird in der Tat für $x = z$ gleich Null. Die erste Gleichung wird

$$\frac{d}{dx}\lg\theta(x) + \left[\frac{\partial}{\partial x}\int^{z}\alpha(z)\,\beta\left(\frac{x}{z}\right)dz\right]_{x=z} = 0. \tag{23}$$

Zum Beispiel wird für den Fall $z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, also für $\beta\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{x}{z}$:

$$\frac{d}{dx}\lg\theta(x) = -\int^{x}\frac{\alpha(x)}{x}\,dx,$$

also nach der in diesem Falle gewählten Bezeichnung

$$\frac{d}{dx}\lg\theta(x) = -A(x),$$

1) Vgl. Seeliger, Astron. Nachr. Bd. 132.

so daß das Gesetz (22) respektive (4) die Form erhält

$$\varphi(z, x) = e^{xA(z) + B(z) - \int A(x)\,dx},$$

wobei

$$A'(z) \cdot z + B'(z) = 0;$$

Setzt man

$$-\int A(x)\,dx = \mathsf{A}(x),$$

also

$$A(x) = -\mathsf{A}'(x),$$

so wird die Bedingungsgleichung

$$-\mathsf{A}''(z)\,z + B'(z) = 0,$$

so daß

$$B(z) = \int \mathsf{A}''(z) \cdot z\,dz = z\mathsf{A}'(z) - \mathsf{A}(z) + \lg c.$$

Führen wir diese Werte von A und B in die obige Gleichung ein, so bekommt man schließlich das folgende Fehlergesetz

$$\varphi(z, x) = C \cdot e^{\mathsf{A}(x) - \mathsf{A}(z) + \mathsf{A}'(z) \cdot (z - x)}, \tag{24}$$

das nur eine willkürliche Funktion enthält.

Wie man sieht, wird $\varphi(z,z)$ gleich C; das heißt *die Wahrscheinlichkeit, den wahren Wert z als Beobachtungsresultat zu bekommen, ist unabhängig von diesem Werte.*

Andere Beispiele, die aber kaum dasselbe Interesse haben wie dies auf dem Postulat von Gauß beruhende, führen zu ähnlichen Funktionen φ.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgaben aus der angewandten Mathematik und Physik.

Académie des Sciences de Paris.

Für 1909: *Prix Vaillant* (4000 fr.). Perfectionner, en un point important, l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.

Für 1910: *Prix Fourneyron* (1000 fr.). Étude expérimentale et théorique des effets des coups de bélier dans les tuyaux élastiques.

Bücherschau.

Hans Lorenz. Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder, Wasser- und Dampfturbinen, Schleuderpumpen und -Gebläse, Turbokompressoren, Schraubengebläse und Schiffspropeller. München und Berlin, Oldenbourg, 1906.

Fast alle Probeme der Hydraulik, welche dem Techniker Interesse darbieten, werden in der Regel vom Standpunkte der sog. *Stromfadentheorie* aus behandelt, die von vornherein eine stationäre Bahn jedes Flüssigkeitsteilchens als bekannt voraussetzt und nur mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung die Veränderlichkeit des Druckes oder der Geschwindigkeit längs der Bahn untersucht. Für die in Turbinen sich abspielenden Bewegungsvorgänge hat Euler eine dieser Auffassung entsprechende Theorie gegeben, welche jedoch den Bedürfnissen des heutigen Wasserkraftmaschinenbaues nicht mehr ganz genügt. So sind in den letzten zwei Jahrzehnten mehrfache Versuche unternommen worden, die Eulersche Theorie zu erweitern, Versuche, deren Wert deshalb nicht hoch anzuschlagen ist, weil die Erweiterungen meist den als gesichert anzusehenden Sätzen der rationellen Hydrodynamik widersprechen.

Es muß mit großer Freude begrüßt werden, daß Lorenz, von einer höheren Auffassung ausgehend, unmittelbar mit den Methoden der mathematischen Physik an das Problem herantritt. Leider kann man sich jedoch seinen Ausführungen gegenüber dem Urteil nicht verschließen, daß wesentliche Irrtümer in den mathematischen Ableitungen seine Resultate hinfällig machen.

Das *erste Kapitel* des Buches ist den „hydrodynamischen Grundlagen“ gewidmet. Es wird zunächst (§ 1) die gewöhnliche Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen für ideale Flüssigkeiten gebracht, daraus in mangelhafter Weise der Energiesatz hergeleitet, hierauf (§ 2) die Umformung für Zylinderkoordinaten durchgeführt. Im nächsten Paragraph behandelt der Verfasser den Sonderfall der zweidimensionalen Strömung, bei der Druck und Geschwindigkeit vom Polarwinkel unabhängig sind, und knüpft an den Nachweis des Bestehens einer Stromfunktion $\Psi(r, z)$ in der Meridianebene nachstehende Bemerkungen, die zur Kennzeichnung des Buches hier wörtlich angeführt seien: „Würden wir dagegen die beiden Wände (zwischen denen die Strömung erfolgt, Anm. d. Refer.) nach verschiedenen Gesetzen formen, z. B. die Innenwand zylindrisch und die Außenwand nach einem Hyperbelbogen im Meridianschnitt, so wäre die Kontinuitätsgleichung nicht im ganzen Bereich der Strömung erfüllt und deren gesetzmäßiger Verlauf gestört, ohne daß wir imstande wären, die hierdurch hervorgerufenen Störungen rechnerisch zu verfolgen. Daraus ergibt sich der praktisch

eminent wichtige Satz, *daß eine um eine Achse symmetrisch verlaufende Flüssigkeitsströmung nur durch Wandungen begrenzt sein darf, welche sämtlich ein und dieselbe Gleichung befolgen, in der nur ein Parameter seinen Wert verändert.*" Der Schluß des Kapitels (§§ 4 und 5) bringt einige Ausführungen über spezielle Bewegungsformen.

Im *zweiten Kapitel*, das die „Radialräder" behandelt, liegt der Schwerpunkt des Buches. Es werden zunächst folgende Anschauungen als „Grundlagen der Theorie" (§ 6) eingeführt: Die axiale Symmetrie der Strömungsverhältnisse wird durch unendlich dicht gestellte Führungflächen, die Schaufeln, erzwungen, deren Wirkung in der Einführung einer „Zwangsbeschleunigung", d. i. einer räumlich verteilten, sonst unbekannten Beschleunigung, in die Eulerschen Gleichungen zum Ausdruck kommen soll; die Freistrahlräder, welche bekanntlich bei der Ausnützung großer Gefällshöhen ausgedehnte Verwendung finden, erledigen sich dadurch, daß sie „zurzeit eine sehr untergeordnete Rolle spielen"; den Einfluß der Schwere „brauchen" wir nur zu berücksichtigen, wenn es sich um Räder mit vertikaler Achse handelt; schließlich die durch nichts näher begründete Behauptung: „Soll nun das Rad so vollkommen als möglich arbeiten, so muß auf jedes Element dQ (sc. der Wassermenge) derselbe Betrag der von außen eingeleiteten, bzw. nach außen in der Zeiteinheit abgegebenen Energie L entfallen." Der in Rede stehende und die beiden nächsten Paragraphen enthalten mehrere dem Referenten unverständliche mathematische Ableitungen, die schließlich zu folgenden in §§ 9 und 10 an Beispielen ausgeführten Resultaten führen: Die Stromfunktion in einem ökonomisch arbeitenden Kreiselrade hat die Form $r^2 z =$ konst, die Schaufeln müssen Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur Drehachse und von solchen im Ein- und Austritt des Wassers begrenzt sein; die Geschwindigkeitskomponente w_n senkrecht zur Meridianebene ist eine Funktion von r allein.

Diesen Hauptergebnissen der Lorenzschen Theorie gegenüber hat Referent seinen Standpunkt bereits anderwärts[1]) dargelegt: Die genannten Einschränkungen für die Bewegungsform sind völlig willkürlich; wie immer man die Schaufelflächen und die Profile der Radkränze gestalten mag, immer ist eine Bewegung möglich, welche den Eulerschen Gleichungen genügt; durch geeignete Wahl der Ein- oder Austrittskante läßt sich dann der Lorenzschen Forderung gleichen Energieumsatzes aller Wasserfäden — deren Berechtigung erst nachzuweisen wäre — Genüge tun; die Bedingung, daß der Energieaustausch in gleichen *Zeiten* erfolgen soll, ist bei dem Lorenzschen Resultat nicht erfüllt.

Auf die „Axialräder", also solche, durch die das Wasser wesentlich parallel zur Achse hindurchströmt, kann der Verfasser seine Theorie nur „näherungsweise" anwenden (III. Kapitel). Für die in § 15 entwickelte „Theorie und Berechnung der Schraubengebläse" ist es bezeichnend, daß die hier als Förderflüssigkeit in Betracht kommende atmosphärische Luft als *inkompressibel* in Rechnung gestellt wird. Bei der Untersuchung der Schiffspropeller (§§ 16—18) stellt sich der Verfasser die Aufgabe, die Räder so zu formen, daß ein annähernd gleicher Energiumesatz für alle

1) Physikalische Zeitschrift 1907, S. 314. Daselbst ist auch eine Kritik der „Zwangsbeschleunigung" gegeben.

Flüssigkeitselemente erreicht wird. Dabei gelangt er (u. zw. wieder durch ganz unklare Rechnungen) zu der Bedingung, daß sowohl die Achsialkomponente der Geschwindigkeit als auch das Produkt $w_u r$ nur von z abhängen dürfen. Folgerungen aus dieser Auffassung, für welche das oben bezüglich der Radialräder Gesagte unverändert gilt, sind von berufener[1]) Seite widerlegt worden. Schließlich wird (§ 20) für die Axial-Dampfturbine unter der Annahme einer adiabatischen Zustandsänderung des Dampfes eine Untersuchung gebracht, die kaum an das heranreicht, was eine sachgemäße Stromfadentheorie auf diesem Gebiete heute leistet.

An das Erscheinen des vorliegenden Buches hat sich in Fachkreisen eine lebhafte Diskussion[2]) geknüpft, die sich vornehmlich gegen die Richtigkeit der von Lorenz für die Praxis gezogenen Schlußfolgerungen wendet. Es ist vielleicht im Interesse der Entwicklung der wissenschaftlichen Technik sehr zu bedauern, daß das Vertrauen der Praktiker zu den mit höheren mathematischen Hilfsmitteln arbeitenden theoretischen Untersuchungen bei der hier geschilderten Sachlage nur leiden konnte.

Wien, zu Pfingsten 1907. Mises.

---

1. **F. Kühnen** und **Ph. Furtwängler. Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam mit Reversionspendeln.** Veröff. d. K. preuß. geod. Inst. Neue Folge Nr. 27. 4⁰. XVI u. 390 S. P. Stankiewicz, Berlin, 1906.
2. **A. Börsch. Lotabweichungen.** Heft III. Veröff. d. K. preuß. geod. Inst. N. F. Nr. 28. 4⁰. VI u. 164 S. P. Stankiewicz, Berlin, 1906.
3. **Th. Albrecht. Bestimmung der Längendifferenz Potsdam—Brocken im Jahre 1906. — Versuche über die Anwendbarkeit der drahtlosen Telegraphie bei Längenbestimmungen.** Veröff. d. K. preuß. geod. Inst. N. F. Nr. 31. 4⁰. 62 S. P. Stankiewicz, Berlin, 1907.
4. **O. Hecker. Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers unter dem Einfluß von Sonne und Mond.** Veröff. d. K. preuß. geod. Inst. N. F. Nr. 32. 8⁰. IV u. 95 S. P. Stankiewicz, Berlin, 1907.

1. Die umfangreiche Arbeit der Herren Kühnen und Furtwängler erstreckt sich über die Zeit von 1898 Aug. 3. bis 1904 Mai 9. Anregung hierzu gab der Umstand, daß Herr Helmert zwischen den Ergebnissen eines Sekunden- und eines Halbsekundenpendels auffallend große Unterschiede fand, zu deren weiterer Aufklärung er diese Beobachtungsreihe veranlaßte.

Das Prinzip des Reversionspendels beruht auf der von Huygens erkannten Reziprozität von Drehpunkt und Schwingungsmittelpunkt eines Pendels. Zu der neuen Potsdamer Bestimmung der absoluten Schwerkraft standen 5 verschiedene Reversionspendel zur Verfügung: ein Sekundenpendel des geodätischen Instituts, ein italienisches, zwei österreichische Pendel und ein Halbsekundenpendel. Die ganze Reihe zerfällt in zwei Abschnitte; während des ersten ließ man die Pendel mit Schneiden auf ebener Grundlage schwingen,

1) Gümbel in Z. d. Ver. deutscher Ing. 1907, S. 586.

2) Vgl. fast sämtliche Hefte des Jahrganges 1907, „Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen".

und zuletzt mit ebenen Flächen auf feststehender Schneide. Der Elimination und Bestimmung der zahlreichen einem genauen Resultat entgegenwirkenden Fehler haben die Verf. große Sorgfalt zugewandt, insbesondere aber die Biegung der Pendel, eine bisher noch nicht berücksichtigte Fehlerquelle studiert. Als Schlußergebnis, gültig für $+ 52^0\ 22',86$ geographische Breite und $13^0\ 4',06$ Länge Ost Greenwich, kommt heraus:

Länge des einfachen Sekundenpendels = 994,239 ± 0,003 mm

und *Beschleunigung der Schwerkraft* = 981,274 + 0,003 cm · sek.$^{-2}$

Aus der Vergleichung mit anderen absoluten Schwerkraftsbestimmungen geht hervor, daß die hier vorliegende Konstante unter allen die höchste innere Genauigkeit besitzt; es standen freilich auch die besten Hilfsmittel unter den günstigsten äußeren Bedingungen zu Gebote.

Da die Verf. ihre Operationen ausführlich beschreiben und begründen, auch auf Theorie und Praxis der Apparate eingehen, wird der Band noch für jene von besonderem Wert, die sich in derartige Untersuchungen einarbeiten wollen.

2. Das von Herrn Börsch bearbeitete astronomisch-geodätische Netz I. Ordnung dehnt sich wesentlich nördlich vom 52. Breitengrad von Memel—Goldapperberg im Osten bis Bonn—Ubagsberg im Westen aus; nach Norden reicht es bis Knivsberg—Kopenhagen und entsendet eine Linie noch hinauf bis in die Nähe von Skagen. Von den 28 Netzpunkten sind 15 Laplacesche Punkte, in denen Breite, Länge und Azimut astronomisch beobachtet wurde, während zu drei Punkten astronomische Beobachtungen überhaupt nicht gehören. Den Hauptteil der Publikation macht die strenge Berechnung der geodätischen Linien und die Ausgleichung der großen norddeutschen Polygone aus. Den vorläufigen Ergebnissen, deren Grundzüge seit langem bekannt sind, läßt sich folgendes entnehmen. Mit Rauenberg bei Berlin als Nullpunkt und Bessels Erdgestalt als Referenzellipsoid bewegen sich die Lotabweichungen zwischen den extremen Werten $- 8''$ und $+ 8''$ in Breite und $- 18''$ und $+ 2''$ in Länge. Ein einfacher Gang mit der geographischen Lage ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Der Übergang auf die neueren Elemente nach Helmert ändert am Werteverlauf nicht viel.

3. Trotzdem der Brocken schon 1874 in Länge mit Leipzig und Göttingen verbunden worden war, haben die Herren v. Flotow, Schweydar und Wanach 1906 eine Bestimmung gegen Potsdam hinzugefügt, in zweifacher Absicht. Einmal wollte man den bei der Ausgleichung des zentraleuropäischen Längennetzes für den Brocken gefundenen Widerspruch von $0^s,10$ aufklären und sodann auf dieser Linie die Brauchbarkeit der Funkentelegraphie im großen erproben. Der erste Teil der Aufgabe wurde durch die übliche elektrische Längenbestimmung erledigt, deren Methode in allen Einzelheiten bei vielen ähnlichen Unternehmungen vom geodätischen Institut ausgearbeitet wurde, und für die in Ausführung und Veröffentlichung ein festes, bewährtes Schema sich gebildet hat. Bei mehreren Gelegenheiten deutete diese Zeitschrift die Operationen im Umriß an, so daß die Mitteilung des Resultats genügen mag:

Brocken, trigonometrischer Punkt, westlich vom Turm des geodätischen Instituts in Potsdam $9^m 47^s,706$ *mittl. Fehler:* $\pm 0^s,013$. 15 *Abende.*

Stromzeit für die 230 km lange Leitung Potsdam—Brocken = $0^s,010$.

Die Funkensignale gab die Station Nauen der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie, 32 km von Potsdam und 283 km vom Brocken entfernt. Die

Vergleichung der drahtlosen Signale mit den auf gewöhnlichem Wege durch die oberirdische Leitung erhaltenen lehrt nun unzweideutig die Ebenbürtigkeit beider Methoden. Die Versuche ergaben bei verschiedenen Stromintensitäten, bei voller, halber, viertel Energie der ausgesendeten elektrischen Wellen identische Uhrdifferenzen, wenigstens weit innerhalb der bei einer Längenbestimmung erreichbaren Genauigkeit. Eine hohe Bedeutung kommt demnach der Funkentelegraphie in Ländern mit spärlichem Telegraphennetz zu, oder auch dann, wenn es sich darum handelt, auf einem beschränkten Gebiete eine größere Anzahl von Längenbestimmungen auszuführen.

4. Ein über das geodätische hinausreichendes Interesse besitzt die vierte Abhandlung; Herr Hecker untersucht hier die Deformation des Erdkörpers unter dem Einfluß der Attraktion von Sonne und Mond. Zur Beobachtung dieser Wirkungen diente von Dez. 1902 bis April 1905 ein Pendelapparat nach v. Rebeur-Paschwitz, dessen beide Horizontalpendel nach NE und NW orientiert waren. Seine Aufstellung fand das Instrument in einer 25 m unter der Erdoberfläche gelegenen Brunnenkammer, die es der durch die Sonnenstrahlung hervorgerufenen täglichen Periode nach Möglichkeit entzog. Zur Aufzeichnung sollten also im wesentlichen wahre Bewegungen des Lotes gelangen, nur mehr verursacht durch die Anziehung der beiden Himmelskörper. Nichtsdestoweniger blieb die Messung der Gravitation der Sonne auf die Horizontalpendelbewegung mit Schwierigkeiten und Unsicherheiten verknüpft, während die doppelt so große Mondwirkung mit viel größerer Genauigkeit und Unzweideutigkeit unter Anwendung der auch für die Gezeiten verwerteten harmonischen Analyse sich ableiten ließ. Es stellt sich so der Koeffizient der Lotablenkung durch den Mond zu $0\overset{''}{,}006$, durch die Sonne zu $0\overset{''}{,}003$ heraus. Dagegen führt die Rechnung bei Annahme absoluter Starrheit auf die Werte $0\overset{''}{,}009$ beim Mond und $0\overset{''}{,}004$ bei der Sonne. Wäre anderseits der Erdkörper völlig elastisch, so müßten die Horizontalpendel natürlich in Ruhe bleiben. Die Beobachtungen lehren also, daß der feste Erdkörper zwar etwas nachgibt, aber doch seiner Deformation einen großen Widerstand entgegensetzt; denn die Lotablenkung macht immerhin noch $^2/_3$ der für den starren Erdkörper gültigen aus. Daß nicht etwa Ebbe und Flut der Nordsee einen das Ergebnis gefährdenden Einfluß gewinnen können, zeigt der Verf. durch eine Darlegung der Flut- und Strömungsvorgänge. Das Resultat der Untersuchung läßt sich demnach dahin aussprechen, daß der Erdkörper sich ungefähr ebenso verhält, wie eine gleich große Kugel aus Stahl.

Straßburg i. E. Wirtz.

H. Kobold. Der Bau des Fixsternsystems mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate. Mit 19 Abbild. und 3 Tafeln. Sammlung „Die Wissenschaft", 11. Heft. 8°. XI u. 256 S. Braunschweig 1906, F. Vieweg. 6.50 *M*.

Dem Studium der Bewegungen in unserem engeren Sonnensystem waren die Anfänge astronomischen Forschens gewidmet; es gipfelt und endet in Laplace und Gauß. Kopernikus erst hatte die Bahn frei gemacht zum Universum. Denn da er der Erdbahn eine für seine Zeitgenossen gewaltige Ausdehnung erteilte, mußte die Fixsternwelt, die in Ruhe blieb, ins Ungemessene sich erstrecken. Der Himmelskunde erwuchs die Aufgabe, den Bau dieses neu erschlossenen Weltalls aufzuklären, nachdem sie gelehrt hatte, die

Vorgänge im Sonnensystem auf die einfachsten Gesetze zu reduzieren. — Das erste zusammenfassende Lehrbuch über diesen Zweig, das Wege und Ziele gleich gründlich erörtert, legt Herr Kobold vor, der selbst in einer Frage des behandelten Gebietes entscheidend gewirkt hat.

Der Einleitung, die im Umriß die historische Entwickelung von Kopernikus bis Herschel andeutet, folgt der erste Abschnitt: Instrumente und Beobachtungsmethoden; er beschreibt die Apparate, insbesondere die Photometerkonstruktionen, und ihre Anwendung, und legt für die nicht unmittelbar an die Instrumente geknüpfte weitere Verarbeituug die mathematischen Grundlagen. Unter den „Einzelresultaten" des zweiten Abschnitts seien jene herausgehoben, die schon jetzt zu ziemlich sicheren Schlüssen führen. Den spektroskopischen Durchmusterungen gemäß gehört mehr als die Hälfte aller Sterne zum I. Spektraltypus (Siriussterne), etwa $^1/_3$ zum II. Typus (Sonnensterne) und nur 6 % zum III. Typus (rote Sterne). Ferner verteilen sich Sirius- und Sonnensterne gleichförmig über den Himmel, während die roten Sterne (III), die Heliumsterne (Ib), die Wolf-Rayet-Sterne (IIb) eine wachsende Verdichtung zur Milchstraße verraten. Die am besten fundierten Schlüsse ermöglichte jedoch das Studium der Eigenbewegungen, die man sich aus zwei Teilen zusammengesetzt zu denken hat. Einmal spiegelt sich darin die Bewegung der Sonne im Weltraum, die sog. parallaktische Bewegung, und hinzu tritt die Spezialbewegung jedes Sterns. Macht man Annahmen über letztere, so kann man die erstere ermitteln. Am nächsten liegt die Hypothese der Regellosigkeit der Spezialbewegungen; sie führt, mag man nun die Winkelbewegungen oder die spektrographisch gewonnenen Bewegungen im Visionsradius zur Unterlage nehmen, zu dem bei allen Autoren übereinstimmenden Resultat, daß die Sonnenbewegung auf einen Punkt ziele in 270° Rektaszension und + 30° Deklination, den Argelanderschen Apex der Sonnenbahn, in der Nähe des Sternes ξ Herculis. Bei tieferem Eingehen zeigen sich indes trotz der guten Übereinstimmung Schwierigkeiten, die zu dem Schlusse drängen, daß die Spezialbewegungen nicht regellos verlaufen. Will man weiter kommen, so muß man die Eigenbewegungen selbst studieren und zu dem Zwecke bediente sich der Verf. der schon von Bessel vorgeschlagenen graphischen Aufzeichnung der Pole der EB. Die rechnerische Diskussion führte zu dem Ergebnis, daß unter den Spezialbewegungen zwei Richtungen vorherrschen, beide mit der Sonne parallel, die eine ihr gleichgerichtet, die andere entgegengesetzt, und in verschiedenen Teilen des Himmels verschieden gemischt. Eine weitere große Gruppe durchdringt senkrecht die Ebene der Milchstraße. Für die Sonnenbewegung gewinnt man den Zielpunkt in AR. 270°, Decl. 0°, nicht weit von dem Stern η Serpentis in der Milchstraße.

Nicht minder bedeutsame Ausblicke liefern die Sternzählungen und die hieraus fließenden Sterndichtigkeiten in den verschiedenen Himmelsgegenden. Da zeigt sich zunächst, daß die hellen Sterne einen gegen die Milchstraße geneigten Gürtel im größten Kreise (Gouldscher Kreis) bilden, dessen Erklärung man darin sucht, daß die Sonne nicht fern der Mitte eines aus etwa 400 Sternen bestehenden Haufens von abgeplatteter Gestalt steht. Dagegen schließen sich die schwächeren Sterne mit abnehmender Helligkeit immer enger an die Milchstraße an. Diese Erscheinungen führen in Verbindung mit dem ungleichförmigen Anblick zu dem Schlusse, daß wir in ihr eine spiralförmige Anordnung der Materie vor uns haben. Nach dem Bilde des Schwan zu liegt der Kern der

Spirale; von ihm aus laufen mehrere Zweige, deren einer die Sonne fast umschließt. In den entfernteren Teilen der Spirale herrschen die heißeren und gasförmigen Sterne vor, die dem Kern nahen gleichen physikalisch der Sonne. Die Analogien, denen man im Raum begegnet, wie Andromeda- und Jagdhund-„Nebel", erleichtern diesen Schluß. —

Das nach der Art seines Aufbaues spannend — sit venia verbo — geschriebene Buch wird dem Astronomen bald unentbehrlich werden. Abgesehen davon, daß es ein Gebiet vorträgt, das noch nicht eiserner Bestand der Lehrbücher geworden, prüft es kritisch das Erreichte, deckt die Lücken auf und regt zu weiteren Arbeiten an.

Straßburg i. E. WIRTZ.

F. Nušl et J. J. Frič. Deuxième étude sur l'appareil circumzénithal. Bull. internat. de l'acad. des sciences de Bohême, 1906. 8⁰. 43 S. Prag 1906.

Über das Zirkumzenital der beiden Verf. wurde schon Bd. 50, S. 157 dieser Ztschr. berichtet. Hier bleibt nur hinzuzufügen, daß einige instrumentelle Verbesserungen angebracht sind, die das Wesen der Sache nicht berühren. So haben die Urheber in erster Linie das Prisma vor dem Objektiv durch ein gekreuztes Spiegelpaar ersetzt und dadurch Fehlerquellen ausgeschaltet, die die Unveränderlichkeit der Höhe gefährdeten. Die zahlreichen, eingehend diskutierten neuen Beobachtungen zeigen neben befriedigend kleinen zufälligen Fehlern konstante systematische Fehler, die vom Azimut abhängen. Ferner stellte sich heraus, daß der Winkel der Kreuzspiegel im Laufe der Zeit und mit der Temperatur regelmäßige Änderungen erlitt, die die Verf. durch eine Montierung aus Nickelstahl wirksam zu verringern hoffen.

Trotz der Anerkennung, die die mechanisch geschickte Anordnung und Ausführung des Instrumentes verdient, liegt kein Anlaß vor, die a. a. O. begründete Ansicht zu ändern.

Straßburg i. E. WIRTZ.

Neue Bücher.[1])

Astronomie, Geodäsie, Nautik.

1. ANDREINI, L. A., Sfere cosmografiche e loro applicazione alla risoluzione di problemi di geografia matematica. (Manuali Hoepli.) Milano. L. 3.
2. BRYANT, WALTER W., A history of Astronomy. London, Methuen. 7 s. 6 d.
3. CHARLIER, KARL LUDW., Die Mechanik des Himmels. Vorlesungen. II. Bd. 2. Abt. Leipzig, Veit & Co. *M.* 6.—.
4. HAYN, FRIEDRICH, Selenographische Koordinaten. III. Abhandlung. (Abh. Kgl. sächs. Ges. Wiss. mathem.-physikal. Klasse, XXX. Bd. Nr. 1.) Leipzig, Teubner. *M.* 4.—.
5. KOHLSCHÜTTER, ERNST, Ergebnisse der ostafrikanischen Pendel-Expedition der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen in den Jahren 1899 u. 1900, ausgeführt v. Hans Glauning u. Ernst Kohlschütter. I. Bd. Verlauf u. Ausrüstung der Expedition. Höhenmessungen. (Abh. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Mathem.-physikal. Klasse, Neue Folge Bd. V. Nr. 1.) Berlin, Weidmann. *M.* 26.—.

---

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1907.

6. Möller, Max, Exakte Beweise für die Erdrotation, elementar dargestellt. Wien u. Leipzig 1908, Hölder.
7. Repsold, Joh. A., Zur Geschichte der astronomischen Meßwerkzeuge von Purbach bis Reichenbach 1450 bis 1830. Leipzig 1908, Engelmann. ℳ 16.—, geb. ℳ 18.50.
8. Star Calendar, 1908. London, Hirschfeld. 1 s.
9. Vital, Art., Corso di navigazione geodetica ad uso delle scuole nautiche. Triest 1908, Schimpff. ℳ 5.—.

Biometrie.

10. Pearson, Karl, On further methods of determining Correlation. (Drapers Company research memoirs. Biometric Series IV. Mathematical contributions to the theory of Evolution XVI.) London, Dulau. 4 s.

Darstellende Geometrie, Graphische Methoden.

11. Hall, W. S., Descriptive geometry, with numerous problems and practical applications. New York 1907, Van Nostrand. 2 volumes. Cloth. $ 3.50.
12. Hoch, Julius, Leitfaden der Projektionslehre einschließlich der Elemente der Perspektive u. schiefen Projektion. 3., verm. u. verb. Aufl. Leipzig 1907, Weber. Geb. in Leinw. ℳ 2.50.
13. d'Ocagne, M., Calcul graphique et Nomographie. (Encyclopédie scientifique. Bibliothèque de Mathématiques appliquées.) Paris, Doin. Frs. 5.
14. Polak, S., The theory and practice of perspective drawing. A complete course of instruction to meet the requirements of the Syllabus of the Board of Education and of similar examinations. London, Clive. 5 s.
15. Schill, R., Maturitätsaufgaben aus der darstellenden Geometrie nebst vollständigen Lösungen. Für die oberen Klassen der Realschulen u. verwandter Anstalten sowie f. das Selbststudium zusammengestellt u. gelöst. 2. Teil: Darstellung v. Körpern mit Parallel- u. Zentralstrahlenflächen, sowie regelmäßigen Körpern samt ihren Schattenkonstruktionen. Wien, Deuticke. ℳ 3.—.

Logikrechnung.

16. Del Re, A., Lezioni di algebra della logica, dettate nella r. università di Napoli. Napoli. L. 3.50.

Geschichte.

17. Ball, W.-W. Rouse, Histoire des Mathématiques. Edition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. T. II. Les Mathématiques modernes depuis Newton jusqu'à nos jours. Note complémentaire de G. Darboux. Avec des additions de R. de Montessus. Paris, Hermann. Frs. 8.

Mechanik.

18. Bachelet, C., Alcune considerazioni sulla trattazione della meccanica indipendentemente dal postulato V di Euclide. I. Torino.
19. Bandini, S., Sui momenti quadratici di un sistema magnetico di punti, Padova, Prosperini.
20. Holzmann, C., Studienblätter über angewandte graphische Statik, Festigkeits- u. Elastizitäts-Theorie auf dem Gebiete des Brücken-, Eisenbahn-, Hoch- u. Tiefbaues. Hamburg, Hartung. In Mappe ℳ 18.—.
21. Martin, L. A., Textbook of mechanics. Vol. II. Kinematics and kinetics. New York, Wiley. Cloth. $ 1.50.
22. Möller, Max, Zur Theorie der Bewegungsvorgänge. 1. Lfg. (Sonderabdruck aus der Zeitschrift „Die Turbine".) Leipzig, Hirzel. ℳ 2.—.

23. Perry, J., Applied mechanics. A treatise for the use of students, etc. New edition, revised and enlarged. London, Cassell. Cloth. 7 s. 6 d.
24. Schönhöfer, Rob., Statische Untersuchung von Bogen- u. Wölbtragwerken in Stein, Eisen, Beton od. Eisenbeton nach den Grundsätzen der Elastizitätstheorie unter Anwendung des Verfahrens m. konstanten Bogengrößen. Berlin 1908, Ernst & Sohn. *M.* 1 80.
25. Unwin, William Cawthorne, A treatise on Hydraulics. London, Black. 12 s. 6 d.

Physik.

26. Abraham, M., Theorie der Elektrizität. I. Band. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität von A. Föppl. 3., vollständig umgearbeitete Auflage, hrsg. v. M. Abraham. Leipzig, Teubner. Geb. *M.* 12.—.
27. Arrhenius, Svante, Untersuchungen über die galvanische Leitfähigkeit der Elektrolyte. Übers. v. Anna Hamburger u. hrsg. v. Otto Sackur. (Ostwalds Klassiker Nr. 160.) Leipzig 1907, Engelmann. Geb. *M.* 2.50.
28. Bichat, E., Blondlot, R., Introduction à l'étude de l'électricité statique et du magnétisme. 2ème éd., entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars.
29. Blochmann, R., Grundlagen der Elektrotechnik. („Aus Natur u. Geisteswelt", 168. Bändchen.). Leipzig 1907, Teubner. *M.* 1.—; geb. *M.* 1 25.
30. Börnstein, R., Die Lehre von der Wärme, gemeinverständlich dargestellt. („Aus Natur u. Geisteswelt", 172. Bändchen.) Leipzig, Teubner. *M.* 1.—; Geb. *M.* 1.25.
31. Brillouin, Marcel, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. 2e partie. Viscosité des gaz. Caractères généraux des théories moléculaires. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 5.
32. Bryan, G. H., Thermodynamics. An introductory treatise. London, Nutt. 7 s.
33. Doppler, Christian, Abhandlungen Hrsg. v. H. A. Lorentz. (Ostwalds Klassiker Nr. 161.) Leipzig 1907, Engelmann. Geb. *M.* 3.60.
34. Fortschritte, die, der Physik im J. 1906. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellsch. 62. Jahrg. 2. Abtlg. Elektrizität u. Magnetismus, Optik des gesamten Spektrums, Wärme. Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M.* 32.—.
35. Fortschritte, die, der Physik im J. 1906. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschafft. 62. Jahrg. 3. Abtlg. Kosmische Physik. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. *M.* 32.—.
36. Greinacher, Heinr., Radium. (Radioaktivität, Ionen, Elektronen.) Gemeinverständliche Darstellung. Neuer Abdruck. Leipzig, Veit & Co. *M.* 1.—.
37. Hausrath, Herb., Die Untersuchung elektrischer Systeme auf Grundlage der Superpositionsprinzipien. Berlin, Springer. *M.* 3.—.
38. Helmholtz, H., Über die Erhaltung der Kraft. (1847.) (Ostwalds Klassiker Nr. 1.) 7. Taus. Leipzig, Engelmann. Kart. *M.* —.80.
39. Hirschfeld, C. F., Engineering thermodynamics. New York 1907, Van Nostrand. Cloth. $ —.50.
40. Kielhauser, E. A., Die Stimmgabel. Ihre Schwingungsgesetze u. Anwendungen in der Physik. Eine auf fremden Untersuchungen fußende Monographie. Leipzig, Teubner. Geb. *M.* 6.—.
41. Kohlrausch, Friedrich, Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2. verm. Aufl. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. *M.* 4.—.
42. Lampa, Ant., Lehrbuch der Physik zum Gebrauche f. Studierende. Wien 1908, Braumüller. *M.* 10.—; geb. in Leinw. *M.* 11.80.
43. Lanchester, F. W., Aërodynamics. Constituting the 1 st vol. of a complete work on aërial flight. London 1907, Constable. 21 s.
44. Siebenthal, Emil, Praktische Photometrie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M.* 19.—; geb. *M.* 20.—.

45. Lodge, Sir Oliver, Modern views on Electricity. 3rd ed., revised. London 1907, Macmillan. 6 s.
46. Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. (In 2 Bänden.) 1. Bd. 2. Lfg. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 6.—.
47. Mach, Grundriß der Physik f. die höheren Schulen des deutschen Reiches, bearb. v. Ferd. Harbordt u. Max Fischer. II. Tl. Ausführl. Lehrgang. 2., verbesserte u. durch Übungsaufgaben erw. Aufl. Leipzig, Freytag. Geb. ℳ 4.—.
48. Marx, Erich, Grenzen in der Natur u. in der Wahrnehmung vom Standpunkte der Elektronentheorie u. des elektromagnetischen Weltbildes. Akademische Antrittsvorlesung, gehalten am 2. Nov. 1907. Leipzig 1908, Teubner.
49. Müller, Joh. J. C., Wärmelehre. Leipzig, Barth. ℳ 4.—; geb. ℳ 4.80.
50. Peabody, C. H., Thermodynamics of the steam-engine and other heat-engines. 5th ed. New York 1907, Wiley. Cloth. $ 5.—.
51. Poincaré, L., Die moderne Physik. Übertr. v. M. Brahn u. B. Brahn. Leipzig 1908, Quelle & Meyer. ℳ 3.80; geb. in Leinw. ℳ 4.40.
52. Righi, Augusto, Die Bewegung der Ionen bei der elektrischen Entladung. Deutsch v. Max Iklé. Leipzig 1907, Barth. Kart. ℳ 2.—.
53. Rohr, Moritz von, Die binokularen Instrumente, nach Quellen bearbeitet. Berlin, Springer. ℳ 6.—.
54. Schreiber, Paul, Formeln u. Tabellen 1. aus dem Gebiete der Thermodynamik, 2. zur Ermittelung der Sonnenörter, f. die meteorologische Praxis vorgerichtet. Vorarbeit zum Jahrbuch 1903 der Kgl. sächsischen Landeswetterwarte zu Dresden. Dresden, Selbstverlag der Landeswetterwarte. (Chemnitz, Brunner.) ℳ 2.50.
55. Slaby, A., Glückliche Stunden. Entdeckungsfahrten in den elektrischen Ozean. Gemeinverständliche Vorträge. Berlin 1908, Simion. ℳ 14.—; geb. ℳ 16.—.
56. Stewart, R. Wallace, The higher textbook of Magnetism and Electricity. (vol. 4. The Tutorial Physics.) 3rd impression. (2nd edition.) London, Clive. 6 s. 6 d.
57. Stockhausen, K., Der eingeschlossene Lichtbogen bei Gleichstrom. Leipzig, Barth. ℳ 6.—; geb. ℳ 7.—.
58. Weber, M., Einführung in die Kristalloptik. München 1908, Lindauer. ℳ —.80.
59. Whittaker, E. T., The theory of optical instruments. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr. 7.) Cambridge 1907, University Press. 2 s. 6 d.
60. Wüllner, Adolph, Lehrbuch der Experimentalphysik. I. Bd. Allgemeine Physik u. Akustik. 6. Aufl., bearb. v. A. Wüllner u. A. Hagenbach. Leipzig, Teubner. ℳ 16.—; geb. ℳ 18.—.
61. Zeuner, Gust., Technical Thermodynamics. 2 vols. First english edition. London 1907, Constable. 36 s.

Tafeln.

62. Bennecke, F., Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. Festschrift des Königlichen Viktoria-Gymnasiums zur 300jährigen Jubelfeier des Königlichen Joachimsthalschen Gymnasiums zu Berlin. Potsdam, (Berlin, Salle). ℳ 2.—.
63. Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren u. Dividieren m. Zahlen unter 1000 ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern u. sicherer machen. Neue Ausg., besorgt v. O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- u. Kubikzahlen v. 1 bis 1000. Berlin 1907, Reimer. Geb. in Leinw. ℳ 15.—.
64. Huntington, E. V., Four-place tables of logarithms and trigonometric functions. Abridged edition. Cambridge, Harvard Coöperative Society. $ —.35.

Versicherungsmathematik.

65. Bronzin, Vinzenz, Theorie der Prämiengeschäfte. Leipzig u. Wien 1908, Deuticke. ℳ 2.50.

Verschiedenes.

66. Ahrens, W., Mathematische Spiele. („Aus Natur u. Geisteswelt", 170. Bändchen.) Leipzig, Teubner. Geb ℳ 1.25.
67. Annuaire pour l'an 1908, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 1.50.
68. Ball, W. Rouse, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. Deuxième édition française, traduite d'après la quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick. I. partie. Arithmétique, Algèbre et Théorie des nombres. Paris, Hermann. Frs. 5.
69. Darwin, Sir George Howard, Scientific Papers. Vol. I. Oceanic tides and lunar disturbance of gravity. Cambridge, University Press. 15 s.
70. Katalog des mathematischen Lesezimmers der Universität Göttingen, bearb. v. K. Hiemenz. Mit e. Vorwort v. F. Klein. Leipzig, Teubner. ℳ 4.—.
71. Percival, A. S., Practical integration. For the use of Engineers, etc. London 1907, Macmillan. 2 s. 6 d.
72. Schubert, Herm., Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung v. Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathem Natur. Kleine Ausg. 3. Aufl. Leipzig 1907, Göschen. Geb. ℳ 5.—.
73. Suplee, H. H., The mechanical engineer's reference book: a handbook of tables, formulas and methods for engineers, students and draftsmen. 3d edition, revised and enlarged. Philadelphia, Lippincott. Limp leather. $ 5.—.
74. Thomann, R., Die Wasserturbinen, ihre Berechnung u. Konstruktion. Stuttgart 1908, Wittwer. Geb. in Leinw. ℳ 25.—.
75. Valentiner, Siegfr., Vektoranalysis. (Sammlung Göschen Nr. 354.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. ℳ —.80.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Abbe, Cleveland, The progress of science as illustrated by the development of Meteorology. Annual presidential address, read before the Philosophical Society of Washington, December 8, 1906. (Phil. Soc. Washington Bull. vol. 15, pp. 27—56.) Washington.

Abraham, M. und Föppl, A., Theorie der Elektrizität, I, 3. Aufl., s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 26.

Ahrens, W., Mathematische Spiele, s. N. B. 66.

Albert, Georg, Die Platonische Zahl als Präzessionszahl (3600 · 2592) und ihre Konstruktion. Leipzig u. Wien, Deuticke. ℳ 1.—.

Annuaire pour l'an 1908, s. N. B. 67.

Arrhenius, Sv., Untersuchungen über die galvanische Leitfähigkeit der Elektrolyse, s. N. B. 27.

Bachmann, Paul, Grundlehren der neueren Zahlenthorie. (Sammlung Schubert LIII.) Leipzig, Göschen. geb. ℳ 6.50.

Backer, H. F., An introduction to the theory of multiply periodic functions. Cambridge, University Press 12 s. 6 d.

Ball, W.-W. Rouse, Histoire des Mathématiques, s. N. B. 17.

Ball, W. Rouse, Récréations mathématiques, s. N. B. 68.

Bichat et Blondlot, Electricité statique et magnétisme, s. N. B. 28.

Blochmann, R., Grundlagen der Elektrotechnik, s. N. B. 29.

Blochmann, R., Luft, Wasser, Licht u. Wärme. Neue Vorträge aus dem Gebiet der Experimentalchemie. („Aus Natur u. Geisteswelt", 5. Bändchen.) 3. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. ℳ 1.25.

Börnstein, R., Die Lehre von der Wärme, s. N. B. 30.

Bojko, J. u. Wendling, E., Neues System zum technischen Kopfrechnen. I. Heft. Die Quadratbildung der Zahlen 1 bis 1250. Systematisch bearbeiteter Lehrgang mit zahlreichen Beispielen u. Übungen. Zürich, Speidel. ℳ —.50.

Brillouin, M., Leçons sur la viscosité, s. N. B. 31.

Bronzin, V., Theorie der Prämiengeschäfte, s. N. B. 65.

Contributions from the Jefferson Physical Laboratory of Havard University for the year 1906. Vol. 4. Cambridge, Mass., U. S. A.

Daniëls, M.-Fr., Essai de géométrie sphérique en coordonnées projectives. (Collectanea Friburgensia, Publications de l'Université de Fribourg, Suisse, Nouvelle série, fasc. VIII, 17me de la collection.) Fribourg, Suisse, Librairie de l'Université. Frs. 8.

Darwin, Sir George Howard, Scientific Papers, s. N. B. 69.

Dantscher, Victor von, Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. Leipzig u. Berlin 1908, Teubner. ℳ 2.80.

Doppler, Chr., Abhandlungen, s. N. B. 33.

Fouët, Edouard A.-, Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. 2ème édition, entièrement refondue. T. I. Les fonctions en général. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50

Gruner, P., Die radioaktiven Substanzen und die Theorie des Atomzerfalles. Bern 1906, Francke.

Hartenstein, H., Resultate zu Dr. E. Bardeys arithmetischen Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise f. Realschulen, höhere Bürgerschulen u. verwandte Anstalten. Nach der neu bearbeiteten 6. Auflage. Leipzig 1905, Teubner.

Hayn, Fr., Selenographische Koordinaten, III, s. N. B. 4.

Hoch, J., Leitfaden der Projektionslehre, s. N. B. 12.

Karabasz, W., Über das Wesen u. Wirken der Materie. Grundlegung zur wissenschaftlichen Erkenntnis der Natur. Allenstein, Mrzyk.

Kielhauser, E. A., Die Stimmgabel, s. N. B. 40.

Kohlschütter, E., Ergebnisse der Ostafrikanischen Pendel-Expedition, I, s. N. B. 5.

Kohlrausch, F., Kleiner Leitfaden der praktischen Physik, s. N. B. 41.

Lange, J., Synthetische Geometrie der Kegelschnitte, nebst Übungsaufgaben f. die Prima höherer Lehranstalten. 3. Aufl., besorgt v. P. Zühlke. Berlin 1908, H. W. Müller. geb. ℳ 1.50.

Leon, Alfons, Über die Materialspannung in rotierenden Körpern. Sonderabdruck. Wien, Selbstverlag.

——, Über eine einfache Formel zur Schätzung der Wärmespannungen in runden Schornsteinen. Sonderabdruck. Wien, Selbstverlag.

Lipps, G. F., Mythenbildung u. Erkenntnis. Eine Abhandlung über die Grundlagen der Philosophie. („Wissenschaft u. Hypothese" III.) Leipzig u. Berlin 1907, Teubner. geb. ℳ 5.—.

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik, s N. B. 46.

Mach-Harbordt-Fischer, Grundriß der Physik, II, s. N. B. 47.

Mamlock, L., Stereochemie, die Lehre von der räumlichen Anordnung der Atome im Molekül. Leipzig, Teubner. geb. ℳ 5.—.

Marx, E., Grenzen in der Natur und in der Wahrnehmung, s. N. B. 48.

Mathews, G. B., Algebraic equations. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 6.) Cambridge, University Press. 2 s. 6 d.

Milankovitch, M., Beitrag zur Theorie der Betoneisenträger, Wien 1905.

Milankovitch, M., Die vorteilhafteste Konstruktionshöhe u. Verlagsweite der Rippen der Hennebiqueschen Decke. (Sonderabdruck aus der „Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereines", 1906, N. 45.) Wien 1907.

Möller, M., Bewegungsvorgänge, 1, s. N. B. 22.

——, Exakte Beweise f. die Erdrotation, s. N. B. 6.

Müller, Siegmund, Technische Hochschulen in Nordamerika. („Aus Natur u. Geisteswelt", 190. Bändchen.) Leipzig 1908, Teubner. ℳ 1.—; geb. ℳ 1.25.

d'Ocagne, M., Calcul graphique et Nomographie, s. N. B. 13.

Peek, J. H., La formule $\varrho = re^{i(\varphi + i\psi)}$ interprétée géométriquement dans l'espace, de manière à prendre la forme d'un quaternion. Amsterdam, Eisendrath.

Peirce, B. Osgood, On the determination of the magnetic behavior of the finely divided core of an electromagnetic while a steady current is being established in the exciting coil. (From: Proc. Amer. Ac. Arts and Sciences, vol. XLIII. No. 5. Sept. 1907.)

Ragsdale, Virginia, On the arrangement of the real branches of plane algebraic curves. A Dissertation presented to the Faculty of Bryn Mawr College for the degree of Doctor of Philosophy. Baltimore 1906, The Lord Baltimore. Press.

Rohr, M. von, Die binokularen Instrumente, s. N. B. 53.

Rudio, Ferdinand, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon u. des Hippokrates, griechisch u. deutsch. (Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume, 1. Heft.) Leipzig 1907, Teubner. kart. ℳ 4.80.

Schmehl, Chr., Arithmetik u. Algebra nebst Aufgabensammlung. I. Teil. Gießen, Roth. broschiert ℳ 2.80; geb. ℳ 3.20.

Schönflies, Arthur, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, II. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, der Ergänzungsbände II. Band.) Leipzig 1908, Teubner. ℳ 12.—

Schreiber, P., Formeln u. Tabellen, s. N. B. 54.

Schwering, K, Handbuch der Elementarmathematik f. Lehrer. Leipzig u. Berlin. geb. ℳ 8.—.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. 3. Aufl., neu bearbeitet von Georg Scheffers. 2. Bd. Integralrechnung. Leipzig, Teubner. geb. ℳ 13.—.

Valentiner, S., Vektoranalysis, s. N. B. 75.

Verneri, Joannis, De triangulis sphaericis libri quatuor. De meteoroscopiis libri sex. Cum prooemio Georgii Joachimi Rhetici. I. De triangulis sphaericis, hrsg. v. Axel Anton Björnbo. (Abh. zur Gesch. der mathemat. Wiss. mit Einschluß ihrer Anwendungen, Heft XXIV, 1.) Leipzig 1907, Teubner. ℳ 8.—.

Voigt, Alexander, Über die Druckverteilung in Eisen vor einer eindringenden Schneide. Diss. Techn. Hochschule Karlsruhe. (Abdruck aus den Verh. des Ver. zur Beförderung des Gewerbfleißes. Okt. u. Nov. 1907). Berlin 1907.

Weber, Heinrich, und Wellstein, Josef, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, ein Handbuch f. Lehrer u. Studierende. (In 3 Bänden.) 2. Bd. Elemente der Geometrie. 2. Aufl. Leipzig 1907, Teubner. geb. ℳ 12.—.

Whittaker, E. T., The theory of optical instruments, s. N. B. 59.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik, I, 6. Aufl., s. N. B. 60.

Technisches Abhandlungsregister 1905.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

Abkürzungen.

A.D.M.P. Annales des Mines, Paris (10) 7—8.
A.E.R.J. American Engineer and Railroad Journal, New York 79.
A.G.B. Annalen für Gewerbe und Bauwesen, Berlin 56.
A.H.I. Anzeiger für die Holzindustrie, München 10.
Am.M. American Machinist, New York 28.
A.P.Ch. Annales des Ponts et des Chaussées, Paris (8) 17—20.
B.E.B. Beton und Eisen, Berlin 4.
B.S.E. Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale, Paris 104.
C.B.B. Zentralblatt der Bauverwaltung, Berlin 25.
C.G.U. Zentralblatt für das gewerbliche Unterrichtswesen in Österreich, Wien 23.
C.Z.O.M. Zentralzeitung für Optik und Mechanik, Berlin 26.
D.B.Z. Deutsche Bauzeitung, Berlin 39.
D.M. Der Mechaniker, Berlin 13.
D.U.Z. Deutsche Uhrmacherzeitung, Berlin 29.
E. The Engineer, London 99—100.
E.B.B. Elektrische Bahnen und Betriebe, München 3.
E.E. L'Éclairage Électrique, Paris 41—45.
Eg. Engineering, London 79—80.
E.N. Engineering News, New York 51; 53 bis 54.
E.W. The Electrical World, New York 43—46.
E.Z. Elektrotechnische Zeitschrift, Berlin 26.
G.C. Le Génie Civil, Paris 47.
G.F.W. Gewerbliche Fortbildungsschule, Wien 1.
G.I. Gesundheitsingenieur, München 28.
J.A.M. Jahrbuch der Automobil- und Motorbootindustrie, Berlin 2.
J.G. Journal des Géomètres, Paris (6) 7.
J.G.W. Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Leipzig 48.
J.S.G.G. Jahrbuch der schiffsbautechnischen Gesellschaft, Berlin 6.
K.B. Kraft, Berlin 22.
L.U.Z. Leipziger Uhrmacherzeitung, Leipzig.
M.I.C. Mémoires et Comptes Rendus de la Société des Ingénieurs Civils, Paris 58 A.
M.P.I. Mitteilungen aus der Preßluftindustrie, Weimar 2.
M.T.G.W. Mitteilungen des Technologischen Gewerbemuseums, Wien (2) 15.
M.Z.B.E. Mitteilungen über Zement-, Beton- und Eisenbetonbau, Berlin 3.
N.A.C. Nouvelles Annales de la Construction, Paris (6) 2.
O.F.E. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Wiesbaden (2) 42.
P.E.M. Portefeuille Économique des Machines, Paris (5) 4.
P.J. Polytechnisches Journal, Berlin 320.
P.M.C. Der praktische Maschinenkonstrukteur, Leipzig 38.
R.D.M. Revue de Mécanique, Paris 16 bis 17.
R.G. Railroad Gazette, New York 37—38.
R.G.T. Railway Gazette, London 39,
S.B. Schiffsbau, Berlin 7.
S.B.Z. Schweizerische Bauzeitung, Zürich 45—46.
S.D.B. Süddeutsche Bauzeitung, München 15.
S.E.D. Stahl und Eisen, Düsseldorf 25.
T. The Technologist, New York 10.
T.B. Technische Blätter, Prag 37.
T.B.B. Tiefbau. Berlin 18.
T.E. The Electrician, London 53—56.
T.G. Technisches Gemeindeblatt, Berlin 8.
V.V.G. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Berlin 84.

W.A.B.Z. Wiener Allgemeine Bauzeitung, Wien 70.
W.B.S. Württembergische Bauzeitung, Stuttgart 2.
W.T.B. Die Welt der Technik, Berlin 67.
Z.A.I. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Hannover (2) 10.
Z.B.D. Zeitschrift des Bayrischen Dampfkesselrevisionsvereins, München 9.
Z.B.W. Zeitschrift für Bauwesen, Berlin 55.
Z.D.M. Zeitschrift für Dampfkessel und Maschinenbetrieb, Berlin 28.
Z.D.W. Zeitschrift der Dampfkessel-Untersuchungs- und -Versicherungsgesellschaft, Wien 30.
Z.E.W. Zeitschrift für Elektrotechnik, Wien 23.
Z.F.T. Zeitschrift für Farben- und Textilindustrie, Berlin 4.
Z.G. Zeitschrift für Gewässerkunde, Leipzig 7.
Z.G.K. Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie, München 12.
Z.G.T. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, Berlin 2.
Z.G.W. Zeitung für das Gas- und Wasserfach, Trier 36.
Z.I. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Berlin 25.
Z.K.F.G. Zeitschrift für komprimierte und flüssige Gase, Weimar 8.
Z.Ö.I.A.V. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins, Wien 57.
Z.V. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 34.
Z.V.D.I. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Berlin 49.
Z.W. Zeitschrift für Werkzeugmaschinen, Berlin 9.

Aerodynamik.

2704. *R. Proell.* Beitrag zur Theorie der stationären Strömung von Gasen und Dämpfen. Z.G.T. 2. 151.

2705. *A. Langrod.* Beweis der Unmöglichkeit von Verdichtungsstößen Z.G.T. 2. 370.

2706. *Rietschel.* Versuche über den Widerstand bei Bewegung der Luft in Rohrleitungen. G.I. 28. Festnummer 9; Z.G.K. 12. 185; 205.

2707. *J. H. Kinealy.* The flow of air in metal pipes. E.N. 54. 134.

2708. *R. Burnham.* Experiment with the Pitot tube in measuring the velocities of gases in pipes. E.N. 54. 660.

2709. *A. Langrod.* Untersuchung der Gasströmung in der Lavaldüse in dem Falle als der Druck an der engsten Stelle höher als der kritische ist. Z.Ö.I.A.V. 57. 580.

2710. *R. H. Smith.* Higlh-speed outflow of steam and gases. E. 100. 609; 631.

2711. *W. Schüle.* Die Bemessung der Auslaßsteuerung der Dampfmaschinen auf Grund der Ausströmungsgesetze. P.J. 320. 1; 17; 145; 163; 177; 196.

2712. *S. A. Moss.* An experimental determination of the coefficient of discharge of air. Am.M. 28B. 193.

2713. *J. Schmidt.* Theoretische Herleitung der auf einen Zylinder einwirkenden Windkräfte. J.G.W. 48. 919.

2714. *M. Heincken.* Winddrücke auf Kegel- und Kugelhauben von Wasser- und Gasbehältern. J.G.W. 48. 715; 965.

2715. *W. H. Dunham.* Wind stresses in knee-braced mill buildings. E.N. 53. 99.

2716. *C. A. P. Turner.* Wind pressure involved in the wreck of a high bridge. R.G. 37. 625.

2717. *R. M. Neilson.* A scientific investigation into the possibilities of gas turbines. T.E. 54. 62; 104; 132.

2718. *A. Barbezat.* Note sur le rendement des turbines à gaz. E.E. 41. 287.

2719. *Kopp.* Détermination des éléments des turbines à vapeur. R.D.M. 16. 135.

2720. *J. Richards.* Single steam turbines. Am.M. 28B. 629; 660.

2721. *R. M. Neilson.* A comparison of different types of steam turbine. E. 99. 75; 97; 123.

2722. *D. Bánki.* Abstufungstafeln für Dampfturbinen. Z.V.D.I. 49. 477.

2723. *F. Kull.* Über den Wirkungsgrad der Dampfturbinen mit Geschwindigkeitsstufen. Z.G.T. 2. 359; 378.

2724. *L. Munch.* Des turbines à vapeur, leur application au point de vue électrique. E.E. 42. 257; 290; 332; 373; 414; 449.

2725. *A. Koob.* Les phénomènes d'écoulement dans les tuyères des turbines à vapeur. R.D.M. 16. 44.

2726. *E. M. Speakman.* Marine steam turbine development and design. E.N. 54. 566.

2727. *E. Kühne.* Über „Edwards" Luftpumpen. S.B. 7. 419; 738; 807. — *Strebel* 597. 648; 649. — *O. Heesch* 647. 762; 807. — *F. Roters* 727; 960. — *Cathcart* 959.

2728. *C. Strebel.* Luftpumpen für Schiffsmaschinen. Z.V.D.I. 49. 1930; 1981; 2019; 2102.

2729. *K. Arndt.* Über Vakuumpumpen. V.V.G. 84. 551.

2730. *W. Heßling.* Treibkolbenpreßlufthebezeuge. M.P.I. 2. 19.

2731. *Lebrecht.* Versuche mit raschlaufenden Kompressoren. Z.V.D.I. 49. 151; 253.

2732. *W. Schweer.* Wie läßt sich in Kirchen und hohen Versammlungsräumen das Auftreten von Zugerscheinungen verhindern? G.I. 28. 36; 141; 302. — *Rietschel* 93; 181. — *E. Ritt* 300; 504.

2733. *H. Grunwald.* Mantelschornstein mit Ventilation. P.M.C. 38. 193.

2734. *K. Brabbée.* Die Lüftungsanlagen beim Baue der großen Alpentunnels. Z.Ö.I.A.V. 57. 453; 470; 481; 558. — *J. Urbanek* 557.

2735. *K. Brabbée.* Die Lüftungsanlagen beim Baue der großen Alpentunnels in Österreich mit besonderer Berücksichtigung der Bewegung athmosphärischer Luft in Röhren. G.I. 28. 457; 473.

2736. *D. G. French.* The weathering of wind-mills. Eg. 80. 811.

2737. *N. Peters.* Zugwirkung bei Feuerungen. Z.D.M. 28. 17; 75. — *J. Rude* 17.

2738. *A. Dosch.* Zugvorgänge bei Feuerungsanlagen. Z.D.M. 28. 270; 284.

2739. *A. Dosch.* Der Zugmesser, insbesondere der Differenzzugmesser und sein Wert für die Feuerungskontrolle. P.J. 320. 87; 103.

2740. *Gostkowski.* Die Schwebearbeit in der Flugtechnik. Z.Ö.I.A.V. 57. 398. — *A. Budau* 400.

2741. *Vallier.* Note sur la dynamique de l'aéroplane. R.D.M. 16. 125; 237; 323.

2742. *P. Renard.* L'oeuvre du colonel Ch. Renard. B.S.E. 104. 1202.

Akustik.

2743. *A. Blondel.* Sur les phénomènes de l'arc chantant. E.E. 44. 41; 81.

2744. *D. M. Therrell.* Voice overtones, or harmonics as affecting long-distance telephone transmission. E.W. 46. 818.

2745. *D. Bertelsmann.* Der Mechanismus der Verbrennung. J.G.W. 48. 71.

2746. *S. Exner.* Über die Akustik von Hörsälen und ein Instrument sie zu bestimmen. Z.Ö.I.A.V. 57. 141.

2747. *S. Exner.* Sur l'acustique des salles; instrument pour la déterminer. B.S.E. 104. 571.

Arithmetik.

2748. *W. Cox.* Factors of π. Am.M. 28 B. 298; 509; 570. — *G. P. Pearce.* 362; 509; 679. E.W.Z. 570.

2749. *P. Morgensen.* The calculation of sinking funds. E.N. 51. 284.

2750. *C. C. Moore.* A table of depreciation or sinking fund payments. E.N. 53. 226.

2751. *R. Grudel.* Preisbewegungen und Lohnfragen mit besonderer Berücksichtigung des Prämienlohnsystems. E.Z. 26. 176.

2752. *N. N.* Lohnsysteme. K.B. 22. 690; 707; 725.

2753. *N. N.* Die Lohnsysteme der Marineverwaltung und Versuche zu ihrer Fortentwicklung. A.G.B. 57. 170.

2754. *A. Strache.* Arbeitsausführung im steigenden Zeitlohn. J.S.G.B. 6. 180.

2755. *C. Strinz.* Die Wertermittlung der Baugrundstücke und die Umlegung solcher Grundstücke auf Grund ihres Wertverhältnisses. Z.V. 34. 201; 225.

2756. *N. N.* Preisbestimmung von Riemen-, Hanf- und Baumwollseilen. K.B. 22. 849; 869.

2757. *P. Lehoux.* Estimation des forêts. J.G. (6) 7. 43.

2758. *L. Koch.* Abschätzung von Waldbeständen. A.H.I. 10. Nr. 20. 2; Nr. 35.

2759. *E. Nier.* Näherungsformel zur Berechnung von Straßenreinigungskosten. T.G. 8. 321.

2760. *Eppers.* Über Schwellenverdübelungen nach dem System der Dübelwerke, G. m. b. H. zu Frankfurt a. M. O.F.E. (2) 42. 9; 47.

2761. *W. D. Marks.* Railway rates: an experiment in rate-making of an interurban railway. E.N. 54. 448.

2762. *L. Rosenbaum.* Die Wirtschaftlichkeit elektrischer Leitungsanlagen. Z.E.W. 23. 686.

2763. *H. Richardson.* Proposed modification of the Wright tariff system in Dundee. T.E. 54. 1014.

2764. *Norberg-Schulz.* Der Belastungsfaktor elektrischer Beleuchtungszahlen. E.Z. 26. 919.

Ballistik.

2765. *C. G. Schwabach.* Dynamische Theorie der Verschwindelafetten und kinematische Schußtheorie. V.V.G. 84. 340. 369.

Chemie.

2766. *J. B. Goebel.* Über einige Sätze der physikalischen Chemie und

ihre Anwendung auf die Physiologie. Z.V.D.I. 49. 724.

2767. *K. Kutzbach.* Sur la gazéification des combustibles dans les gazogènes au point de vue de l'application aux moteurs. B.S.E. 104. 504.

2768. *R. Threlfall.* On some problems of electro- and electro- thermal chemistry. T.E. 56. 277; 308.

2769. *L. Gautier.* La fabrication du fer et de l'acier au four électrique. P.E.M. (5) 4. 9.

2770. *R. Schenk* und *W. Heller.* Die Gleichgewichte im Hochofen. S.E.D. 25. 1121.

2771. *G. Rosset.* Le phénomène de l'électrolyse. E.E. 42. 81; 128; 165.

2772. *W. Gray.* Ozonisieruug des Sauerstoffs in dem Siemensschen Ozongenerator. E.Z. 26. 517.

2773. *F. Häusser.* Über die Salpetersäuredarstellungen mittels explosibler Verbrennungen. V.V.G. 84. 295.

Dynamik.

2774. *H. Meuth.* Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes. P.J. 320. 465; 486; 503; 517; 533; 557; 566; 585.

2775. *I. P. Church.* The governing of impulse wheels. Eg. 79. 383.

2776. *F. Wittenbauer.* Die graphische Ermittlung des Schwungradgewichts. Z.V.D.I. 49. 471.

2777. *A. J. Orr.* Relation of cone pulley to gear wheels in headstock. Am.M. 28. A. 313. E.

2778. *E. J. Lees.* Method of calculating cone-pulley and back-gear speeds. Am.M. 28. A. 782.

2779. *C. Gegauff.* Roulement sur billes. B.S.E. 104. 1697.

2780. *T. E. Stanton.* Alternating stress testing machine at the National Physical Laboratory. Eg. 79. 201.

2781. *Ribière.* Oscillations des tours de phares. A.P.Ch. (8) 17. 24.

2782. *O. Johannsen.* Zur Frage des Kraftbedarfes in den Spiralreihen. Z.F.T. 4. 57; 84; 119.

2783. *O. Reinhardt.* Neue Versuche zur Verbesserung der Ringspinnmaschine, insbesondere für die Erzeugung weichgedrehter Schußgarne. Z.F.T. 4. 234; 260.

2784. *O. H. Schmitz.* Untersuchungen über die Gleichförmigkeit des Ganges von Webstühlen. Z.F.T. 4. 458.

2785. *N. N.* Unification des petits filetages. B.S.E. 104. 124; 696; 1035.

2786. *H. Kratzert.* Beitrag zur Theorie der Ablegevorrichtung der Getreidemähmaschinen. Z.Ö.I.A.V. 57. 495.

2787. *F. Loewe.* Krümmungshalbmesser und Breite der Straßenwendeplätze. Z.Ö.I.A.V. 57. 477.

2788. *N. N.* Pivot pier caisson and operating machinery for a heavy swing bridge. E.N. 51. 6.

2789. *C. Schröder.* Der moderne Automobilmotor. P.M.C. 38. 8; 17; 26.

2790. *H. L. Towle.* Analysis of steering-knuckle angles of automobiles. Am.M. 28. A. 780.

2791. *C. Bourlet.* Nouveau type d'embrayage pour automobiles. G.C. 47. 84.

2792. *Leitzmann.* Versuche mit einem Dampfautomobilwagen. V.V.G. 84. 319.

2793. *J. I. Lerner.* Ausschlag von Straßenbahnwagen und Kupplungen in Kurven. E B.B. 3. 457.

2794. *N. N.* Appareil pour la vérification des voies de chemins de fer. N.A.C. (6) 2. 37.

2795. *N. N.* The economic comparison of railway alignments. R.G. 38. 234. E.

2796. *N. N.* Übergangsbögen. O.F.E. (2) 42. 23.

2797. *N. N.* Superelevation and transitions. R.G. 38. E. 174.

2798. *Reimann.* Feststellung der Schienenüberhöhung im Gleisbogen. O.F.E. (2) 42. 128.

2799. *G. Marié.* Les dénivellations de la voie, et les oscillations du matériel des chemins de fer. A.D.M.P. (10) 7. 491; 8. 113.

2800. *C. Johannsen.* Konstruktive Behandlung einer Windeschiene oder Copping rail für einen bestimmten Fall. Z.F.T. 4. 210; 302. 363.

2801. *M. Richter.* Schnellbetrieb auf den Eisenbahnen der Gegenwart. P.J. 320. 573; 589; 604; 632; 649.

2802. *v. Borries.* Schnellfahrt in Krümmungen. O.F.E. (2) 42. 21.

2803. *G. E. Lilly.* Springs formula for the limiting loads of wheels rolling on rails. E. N. 53. 42.

2804. *v. Borries.* Die Berechnung der Fahrzeiten von Personen- und Schnellzügen. O.F.E. (2) 42. 149; 180.

2805. *C. O. Mailloux.* Train-weight and acceleration units. T.E. 56. 33.

2806. *C. A. Crandell.* Train resistence R.G. 37. 520.

2807. *J. Wittenberg.* Das Anfahren der Eisenbahnzüge. O.F.E. (2) 42. 193.

2808. *Péchot.* Étude sur la stabilité des trains et les chemins de fer à voie de 0,60 m. A. P. C. (8) 18. 60; 19. 242

2809. *A. Rühle von Lilienstern.* Die vorteilhafteste Belastung der Güterzüge O. F. E. (2) 42. 222.

2810. *W. Kummer.* Verluste in den Zahnrädern und Achslagern des Schmalspurbahnmotors Typ TM. 14 der Maschinenfabrik Örlikon. S.B.Z. 46. 145.

2811. *R. Skutsch.* Über Bremsen von Personenfahrzeugen. E.B.B. 3. 200.

2812. *R. H. Smith.* The mechanical action of wheel-block car brakes. E. 99. 84. — *R. T. Bell* 146.

2813. *G. E.* The design of brakes. A.E.R.J. 79. 411.

2814. *L. Rachou.* Nouveau système d'embrayage. G.C. 47. 12.

2815. *R. W. Dull.* A diagramm for computing the power-capacity of belts. E. N. 54. 149.

2816. *Le Gavrian.* Les voitures à 6 roues. A. P. Ch. (8) 20. 220.

2817. *E. Happel.* Steuerung für Vierzylinderverbundlokomotiven. A. G. B. 56. 27.

2818. *E. L. Coster.* Comparative magnitude of longitudinal disturbing forces in a cole balanced compound and in a single express locomotive. A. E. R. J. 79. 447.

2819. *N. N.* Balancing balanced compound locomotives. A.E.R.J. 79. 232.

2820. *R. Sanzin.* Untersuchungen an einer Lokomotive und Feststellung der günstigsten Belastungen für dieselbe. W.A.B.Z. 70. 107.

2821. *N. N.* Détermination des charges à appliquer aux locomotives des chemins de fer de l'Etat danois. G.C. 47. 379.

2822. *Pflug.* Lokomotivprüfungen auf dem Versuchsstand der Pennsylvania-Bahn in St. Louis. A. G. B. 57. 107.

2823. *K. Schlöss.* Über die Bestimmung der Leistungen von Lokomotiven aus dem Verlaufe der Geschwindigkeitskurven. Z. Ö. I. A. V. 57. 637.

2824. *G. R. Henderson.* Fuel consumption of locomotives. A.E.R.J. 79. 57; R.G. 37. 627.

2825. *G. R. Henderson.* The cost of locomotive operation. R.G. 38. 139. 189; 224; 311; 386; R.G.L. 39. 10; 67; 132; 181; 220; 273; 318; 421; 450; 466; 519; 591.

2826. *A. L. Westcott.* Calculation of loads on the rollers of a large locomotive crane. Am. M. 28. B. 267.

2827. *D. S. Jacobus.* Counterweights for large engines. Eg. 80. 362; E. N. 53. 659.

2828. *A. Grau* und *R. Schuster.* Versuche mit hohen Riemengeschwindigkeiten. M. T. G. W. (2) 15. 8.

2829. *R. Proell.* Die genaue und die angenäherte Schwungradermittlung. Z. V. D. I. 49. 1713.

2830. *H. Goerges.* Parallelarbeiten der Tandemmaschine der Maschinenbauanstalt Unio direkt gekuppelt mit der Wechselstrommaschine Lahmeyer. E.B.B. 3. 125.

2831. *G. Wazau.* Neuere Dauerversuchsmaschinen. P.J. 320. 481; 505.

2832. *P. Razous.* Étude sur les machines outils utilisées dans le travail du bois. R.D.M. 17. 421.

2833. *J. Mänhardt.* Untersuchungen über den Kraftbedarf von Selfaktoren. Z.F.T. 4. 506; 522.

2834. *J. T. Nicolson* and *D. Smith.* Machine tool design. E. 99. 331; 345; 357; 385; 413; 437; 463; 511; 589; 639; 100. 79; 153; 432; 507; 557.

2835. *Codron.* Expériences sur le travail des machines-outils. B.S.E. 104. 226; 1049.

2836. *Pregél.* Nicholsons Versuche mit Schnellschnittstählen. P.J. 320. 497; 520; 538; 551.

2837. *A. Grunwald.* Vorschubvorrichtung für Gattersägen. Z.W. 9. 283.

2838. *F. Roehle.* Trennung der Lager- und Luftreibungsverluste umlaufender Maschinenteile aus der Form der Auslaufslinie. E.Z. 26. 794.

2839. *A. Goldberger.* Genaue Konstruktion der Schieberdiagramme. P.J. 320. 451.

2840. *A. T. Weston.* The balancing of multicylinder petrol engines. E. 100. 481; 574. — H.C.A. 574. — *A. J. Rowledge* 625.

2841. *J. Edgar.* Cone-pulley design. Am. M. 28. B. 807.

2842. *A. L. Mellanby.* An investigation to determine the effects of steam-jacketing upon the efficiency of horizontal compound steam engine. E. 99. 657; 100. 21; 47.

2843. *M. Hochwald.* Niederdruckschieber mit dreifacher Eröffnung für Einlaß und Auslaß und mit Überströmung. Z.V.D.I. 49. 1324.

2844. *G. F. S.* The Cole four-cylinder balanced compound. R.G. 38. 115.

2845. *E. M. Speakman.* The dimensions of the marine steam turbine. Eg. 80. 759.

2846. *H. Wagner.* Betrachtungen über rotierende Laufräder von Dampfturbinen und deren Wellen. Z.G.T. 2. 150; 179; 241.

2847. *H. Föttinger.* Die neuesten Konstruktionen des Torsionsindikators und deren Versuchsergebnisse. J.S.G.B. 6. 135.

2848. *N. N.* Die näherungsweise Berechnung der Kompensationspendel. L.U.Z. 12. 120; 135; 151; 166.

2849. *Straube.* Die Steuerungen der Ventildampfmaschinen. P.J. 320. 115; 132; 166; 180; 204; 211.

2850. *W. Hartmann.* Ventilsteuerungen und deren Verwendbarkeit für Schiffsmaschinen. J.S.G.B. 6. 228.

2851. *A. Proell.* Kraft- und Festigkeitsverhältnisse bei Schiffsmaschinensteuerungen. S.B. 7. 541; 589.

2852. *E. Mathot.* Die Fortschritte im Gasmaschinenbau. Z.G.W. 36. 266.

2853. *R. E. Mathot.* Large gas-engines. Eg. 80. 230; 263; 295.

2854. *H. L. Towle.* The ultimate limits of speed in gas engines. Am.M. 28 A. 317.

2855. *R. Diesel.* Der mechanische Wirkungsgrad und die indizierte Leistung der Gasmaschine. Z.V.D.I. 49. 814; 1099. — *L. Ehrhard* 940. — *V. Makeev* 1096. — *R. Schöttler* 1097. — *Siegling* 1098.

2856. *A. Riedler.* Die Berechnung des mechanischen Wirkungsgrades und der Leistung von Gasmaschinen. Z.V.D.I. 49. 331; 519; 522; 525. — *A. Stodola* 517. — *R. Schöttler* 520. — *E. Meyer* 522. — *L. Ehrhardt* 525. — *A. Wagener* 528.

2858. *N. N.* The design of drop valves. E. 99. 5.

2859. *W. W. Marriner.* Deduction from recent and former experiments on the influence of depth of water on speed. E. 100. 97.

2860. *H. Koch.* Elektrisch betriebene Wasserhaltungen mit besonderer Berücksichtigung der Wasserhaltung auf Gewerkschaft „Brüderbund" bei Siegen. E.Z. 26. 427.

2861. *E. W. Zeh.* The cutting capacity of power presses. Am.M. 28 B. 496. — *P. Lange* 645. — *R. Shaw* 849.

2862. *C. Rath.* Beitrag zur Konstruktion von Ankereinrichtungen. S.B. 7. 509; 555.

2863. *N. N.* Versuche mit der Bewegung belasteter Rollschütze für die Talsperre bei Marklissa. C.B.B. 25. 62.

2864. *E. Graf.* Berechnung einer Förderanlage auf schiefer Ebene. P.M.C. 38. 192; 201; 209.

2865. *F. Jebens.* Über Schiffsförderung auf schiefen Ebenen mit Längsneigung. A.G.B. 56. 110.

2866. *H. Haeger.* Berechnung eines Dreimotoren - Laufkrahns mit elektrischem Antrieb. P.M.C. 38. 104; 111.

2867. *H. Stahl.* Untersuchung des Auslaufsweges elektrischer Aufzüge. Z.V.D.I. 49. 541.

2868. *G. Heinatz.* Die Prüfung der Geschwindigkeit von Momentverschlüssen photographischer Kameras. D.M. 13. 259.

2869. *O. S. Lyford* jr. and *W. N. Smith.* Problems of heavy electric traction. R.G. 37. 613.

2870. *Cserháti.* Betriebs- und Versuchsergebnisse der Valtellinabahn. Eigenheiten der Drehstromzugförderung O.F.E. (2) 42. 175.

2871. *H. Somach.* Rechnerische Bestimmungen der günstigsten maximalen Steigung für elektrische Bahnen. E.Z. 26. 472.

2872. *M. Zuppinger.* Antrieb durch elektrische Motoren im Fabrikbetrieb. S.B.Z. 45. 184.

2873. *F. O. Hunt.* Motor starting switches and resistances. T.E. 53. 526.

2874. *P. Bautze.* Prüfung der Genauigkeit der Angaben eines Haasshälter-Geschwindigkeitsmessers. O.F.E. (2) 42. 13.

2875. *E. James.* Einige Kapitel aus der angewandten Theorie der Uhrmacherei. D.U.Z. 29. 136; 168; 187; 210; 225.

2876. *T. Tamaru.* Ein Makro-Vertikalseismometer. Z.I. 25. 167.

2877. *A. Sprung.* Über Theorie und Praxis des Laufgewichtsbarographen. Z.I. 25. 37; 73.

2878. *O. H. Schmitz.* Über Kötzerwirkungen. Z.F.T. 4. 4.

2879. *G. Lindenthal.* Flange wear and side bearing trucks. R.G. 37. 362.

Elastizität.

2880. *C. J. Kriemler.* Von der Erhaltung der Energie und dem Gleichgewicht des nachgiebigen Körpers. Z.A.I. (2) 10. 313.

2881. *C. Bach.* Versuche über die Elastizität von Flammenrohren mit einzelnen Wellen. Z.V.D.I. 49. 2062.

2882. *A. Francke.* Spannung und Dehnung. Z.A.I. (2) 10. 459.

2883. *J. Stieghorst.* Zeichnerisch-rechnerisches Verfahren zur Bestimmung der Querbeanspruchungen. S.B. 7. 857; 895; 941; 983.

2884. *A. Schleusner.* Die inneren Längsspannungen im Querschnitt von einfachen Zement- und Betonröhren unter Zugrundelegung des Potenzgesetzes. B.E.B. 4. 303.

2885. *Wieghardt.* Ein Verfahren, verwickelte theoretische Spannungsverteilungen auf experimentellem Wege zu finden. Z.V.D.I. 49. 1568.

2886. *B. Kirsch.* Die Giltigkeitsgrenzen der Navier'schen Spannungsgleichung und eine Vereinfachung bei deren Anwendung. M.T.G.W. (2) 15. 52

2887. *E. L. Hancock.* A preliminary report on the effect of combined stresses on the elastic properties of steel. E.N. 54. 209.

2888. *E. Werner.* Beitrag zur Bestimmung der Biegungsspannung in gekrümmten stabförmigen Körpern. Z.V.D.I. 49. 257.

2889. *P. Ludwik.* Zur Frage der Spannungsverteilung in gekrümmten stabförmigen Körpern mit veränderlichem Dehnungskoeffizienten. T.B. 37. 1.

2890. *A. L. Johnson.* Shearing stress in concrete-steel beams. E.N. 51. 426.

2891. *H. Gwinner.* Stresses in contractor's tripod legs. Am.M. 28 B. 199.

2892. *W. E. Lilly.* Shearing stresses. Eg. 80. 614.

2893. *G. Y. Wisner* and *E. T. Wheeler.* Investigation of stresses in high masonry dams of short spans. E.N. 54. 141.

2894. *M. am Ende.* Note on stresses in masonry dams. Eg. 80. 751.

2895. *W. C. Unwin.* On the distribution of shearing-stress in masonry dams. Eg. 79. 825.

2896. *J. S. Wilson* and *W. Gore.* Stresses in dams. Eg. 80. 134.

2897. *W. J. Dilley.* Shearing stresses in walls subjected to horizontal thrust. Eg. 79. 847.

2898. *R. Saliger.* Spannungen in Schornsteinen mit Kreisringquerschnitt. B.E.B. 4. 251; 273.

2899. *R. Thumb.* Eine Faustregel für Haftspannungen. B.E.B. 4. 42.

2900. *A. M. Levin.* Radial stresses due to centrifugal force in revolving bodies. Am.M. 28. A. 399.

2901. *R. C. Strachan.* The computation of stresses in the Blackwells Island bridge. E.N. 53. 170.

2902. *L. Oppenheimer.* Eine Anwendung des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit. C.B.B. 25. 228.

2903. *E. Kux.* Über die elastische Formänderung der Wandungen eiserner Gasbehälterbassins. J.G.W. 48. 960; 978; 1001.

2904. *W. Z.* Versuche über die Formänderungen von rotierenden Rädern. P.J. 320. 113.

2905. *K. Otto.* Durchbiegung von Leitungsmasten. E.Z. 26. 359.

2906. *G. A. Moss.* On the sign of bending moment. E.N. 53. 179. — *B. Bliss* 292.

2907. *P. H. Dudley.* Bending moments in rails. R.G. 37. 157.

2908. *C. Bach.* Mitteilung zur Giltigkeit der Saint-Venant'schen Formel für den Verdrehungswinkel. Z.V.D.I. 49. 960.

2909. *W. H. Raeburn.* Torsion of machinery steel shafts. Am.M. 28. A. 827.

2910. *J. G. F. Lund.* Beschreibung der Konstruktion und Verwendung von Eisenbetonhohlblöcken armiert nach System Lund. B.E.B. 4. 143; 169.

2911. *Ramisch.* Bestimmung der Tiefe eines Stabes im Fundamente, welcher von einer wagerechten Kraft beansprucht wird. D.B.Z. 39. 331.

2912. *A. Franke.* Der gerade Balken mit elastisch eingespannten Auflagern mit besonderer Rücksichtnahme auf die Verhältnisse des Eisenbahnoberbaus. O.F.E. (2) 42. 15; 43.

2913. *J. G. Little.* Distribution of shear over section for reinforced concrete beams. E.N. 53. 547.

2914. *N. de Tedesco.* De l'utilité des parres de compression dans les dalles, poutres et combinaison de dalles et de poutres soumises à la flexion. B.E.B. 4. 36; 64.

2915. *Ramisch.* Elementare Untersuchung der Kette mit Versteifungsbalken nach Anordnung von Ingenieur Langer. V.V.G. 84. 423.

2916. *N. N.* Zur Theorie der seitlich gekrümmten Träger. D.B.Z. 39. 857.

2917. *F. Hartmann.* Genaue Behandlung statisch unbestimmter Parallelträger und Vergleich mit der Näherungsrechnung. Z.Ö.I.A.V. 57. 261.

2918. *A. Francke.* Einige elastische Werte für den Parallelträger. Z.A.I. (2) 10. 133.

2919. *G. Ramisch.* Der halbkreisförmige und symmetrisch belastete Balkonträger. Z.Ö.I.A.V. 57. 210.

2920. *P. Weiske.* Beitrag zur Berechnung der Betoneisenträger. B.E.B. 4. 123.
2921. *M. am Ende.* The deflection of continuous bail-bearers. Eg. 80. 69; 101.
2922. *J. M. J.* What is eccentric loading in columns. E.N. 53. 494.
2923. *E. Elwitz.* Die Querschnittsbestimmung von Platten und Plattenbalken aus Eisenbeton nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten. B.E.B. 4. 18; 38: 122.
2924. *G. Kaufmann.* Die Kasettendecke im Eisenbetonbau. B.E.B. 4. 275; 301.
2925. *S. K. Drach.* Graphische Ermittlung der Einflußlinien für die Spannungen im Fachwerk. Z.Ö.I.A.V. 57. 717.
2926. *G. Ramisch.* Von den Einflußlinien eines durch 2 Zugstangen und eine Strebe verstärkten Fachwerks. V.V.G. 84. 121.
2927. *F. Postuvanschitz.* Die Biegungslinie für das 2teilige Netzwerk mit einem Pfosten. Z.Ö.I.A.V. 57. 315.
2928. *G. Ramisch.* Untersuchung eines flachen Bogens mit festen Kämpfergelenken beansprucht von horizontalen Kräften. P.J. 320. 372; 390.
2929. *E. Elwitz.* Zur Berechnung schwach gekrümmter elastischer Bögen. C.B.B. 25. 410.
2930. *Brabandt.* Über die Berechnung von Zweigelenkblechbogen. C.B.B. 25. 98; 242. — *Müller-Breslau.* 160.
2931. *C. Probst.* Die Schutzgalerie am Mythensteintunnel. B.E.B. 4. 297.
2932. *H. Müller-Breslau.* Beiträge zur Theorie der Windverbände eiserner Brücken. Z.B.W. 55. 134.
2933. *Thieme.* Die Aufnahme der Seitenkräfte durch die Wind- und Querverbände eiserner Eisenbahnbrücken. C.B.B. 25. 486.
2934. *W. Forsyth.* Steel in passenger car construction. R.G. 37. 74.
2935. *N. de Tedesco.* Considérations économiques sur le calcul des ouvrages en ciment armé en conformité avec les règlements administratifs. N.A.C. (6) 2. 125; 138; 150; 167.
2936. *A. Ostenfeld.* Die Gesetze von Considère im Lichte der Versuche Kleinlogels. B.E.B. 4. 278.
2937. *V. Marmor.* Calcul exact d'un crochet. R.D.M. 17. 25.

Elektrizität.

2938. *B. Davis.* The ratio between electrical and gravitational forces. E.W. 45. 43.
2939. *D. Robertson.* Electrotechnical system of units. T.E. 53. 670.
2940. *J. E. Ives.* On a new standard of wave-length. T.E. 53. 705; E.W. 43. 107.
2941. *G. Girousse.* Les étalons d'Ohm légal. E.E. 45. 450.
2942. *J. Becquerel.* La radioactivité de la matière. E.E. 41. 481.
2943. *N. N.* Der Stand unserer Kenntnisse von der Radioaktivität. C.Z.O.M. 26. 29; 43; 56; 68.
2944. *P. Besson.* Le radium et la radioactivité. M.I.C. 58A. 247.
2945. *H. A. Lorentz.* Ergebnisse und Probleme der Elektronentheorie. E.Z. 26. 555; 584.
2946. *T. Tommasino.* Sur la théorie cinétique de l'électron devant servir à base de la théorie électronique des radiations. E.E. 45. 81.
2947. *H. A. Lorentz.* Résultats et problèmes de la théorie des électrons. E.E. 49. 121; 161.
2948. *H. J. Reiff.* Die Elektronentheorie der Elektrizität. D.M. 13. 139; 153; 167; 177; 203.
2949. *L. T. More.* A critical review of electrostriction. E.W. 43. 127.
2950. *C. E. Guye* et *P. Denso.* Sur l'énergie dissipée sous forme de chaleur dans la paraffine soumise à un champ électrostatique tournant de fréquence élevée. E.E. 44. 361; 401.
2951. *J. E. Ives.* Rigidance, a new name for the reciprocal of capacity. E.W. 44. 248.
2952. *F. Sarrat.* Sur l'économie dans les conducteurs électriques. E.E. 44. 481; 45. 1.
2953. *P. Drude.* L'amortissement dans les circuits oscillants contenant un condensateur et un éclateur. E.E. 43. 281; 321; 361; 411.
2954. *F. Emde.* Spannung, Spannungsdifferenz, Potential, Potentialdifferenz, elektromotorische Kraft. Z.E.W. 23. 731.
2955. *H. J. S. Sands.* The measurement of the potential of the electrodes in stationary liquid. T.E. 54. 66; 106; 143.
2956. *A. E. Kennelly* and *S. E. Whiting.* On a method of potential regulation based on the different resistance behaviour of Carbon and Tantalum lamps E.W. 46. 20.
2957. *H. T. Eddy.* On the complex product of electromotive force, current and other vectors. E.W. 44. 133.
2958. *C. F. Guilbert.* On the experimental determination of the *EMF*

of dispersion of stray field of an armature winding. E.W. 44. 937.

2959. *Reinganum.* Über das Faradaysche Gesetz bei der Elektrizitätsleitung durch Metalle. E.Z. 26. 757.

2960. *L. W. Wild.* The measurement of low resistances. T.E. 55. 498.

2961. *W. Voege.* Beeinflussung größerer Funkenstrecken durch ionisierende Körper und der Übergangswiderstand. E.Z. 26. 360.

2962. *P. Langevin.* Recherches récentes sur le mécanisme du courant électrique; ions et électrons. E.E. 45. 361; 401.

2963. *A. Press.* Flux distribution in design. E.W. 45. 682.

2964. *L. Lyndon.* A physical conception of some alternating current phenomena. E.W. 44. 328; 374; 419.

2965. *G. A. Campbell.* Resistance boxes for use in precise alternating current measurements. E.W. 44. 728.

2966. *C. C. Garrard.* Inductive balance devices for the protection of alternating-current circuits. T.E. 56. 400.

2967. *A. Cruse.* Messung hochfrequenter Wechselströme nach Prof. Peukert. D.M. 13. 108.

2968. *J. A. Fleming.* The measurement of high frequency currents and electric waves. T.E. 56. 520; 556; 638; 670; 762.

2969. *A. E. Kennelly* and *S. E. Whiting.* On direct current balances. E.W. 45. 38.

2970. *F. F. Fowle.* An alternating current relay for low frequencies. E.W. 44. 862.

2971. *J. A. Fleming.* The measurement of high frequency currents and electric waves. Eg. 80. 735; 772; 800; 840.

2972. *J. E. Ives.* On the wave length of free vibrations in antennae and closed oscillating currents. E.W. 43. 260.

2973. *N. N.* Institute meeting on air and circuits under high voltages. E.W. 43. 471.

2974. *M. B. Field.* Idle currents. T.E. 56. 845; 884.

2975. *C. R. Underhill.* Relation of pull to diameter of solenoids. E.W. 46. 615.

2976. *C. R. Underhill.* Calculation of pull due to solenoids. E.W. 45. 881.

2977. *C. F. Guilbert.* Calculation of the equivalent Ampere-turns of windings for single and polyphase currents. E.W. 43. 516; 556; 603.

2978. *A. D. Cole.* The turning of thermoelectric receivers for electric waves. E.W. 45. 43.

2979. *G. Rößler.* Die Fernleitung hochgespannter Wechselströme. E.Z. 26. 734. — *F. Emde.* 872.

2980. *F. Breisig.* Vorschläge zur Definition der elektrischen Eigenschaften gestreckter Leiter, insbesondere von Mehrfach-Leitersystemen. E.Z. 26. 460; 633. — *W. Guttsman.* 764; 856; 936. — *F. Emde.* 851; 935; 1045.

2981. *C. P. Steinmetz.* High-power surges in electric distribution systems of great magnitude. E.N. 54. 7.

2982. *E. Waltz.* Über 90°-Schaltungen, mit besonderer Berücksichtigung magnetisch verketteter Stromverzweigungen. E.Z. 26. 230; 254; 273.

2983. *O. L. Gotti.* Sur une méthode pour le calcul des réseaux de distribution. E.E. 44. 281.

2984. *E. Kr.* Übersichtliche graphische Darstellung der Leitungsquerschnitte bei verschiedenen Betriebsspannungen. Z.E.W. 23. 568.

2985. *G. Seibt.* Über Spannungserhöhungen in elektrischen Leitungen und Apparaten. E.Z. 26. 25; 157. — *G. Benischke, v. Kalnassy.* 156.

2986. *C. P. Nachod.* Line effects due to a moving load. E.W. 45. 800.

2987. *F. Evens.* Zur Frage des blanken oder isolierten Mittelleiters. E.Z. 26. 900; 1002; 1129. — *Epie.* 1002. — *B. Soschinski, A. Kastalski.* 1128. — *R. Skutsch.* 1129.

2988. *E. F. Northrup.* Measurement of the insulation resistance of an electric wiring system. E.W. 43. 966.

2989. *J. Revilliod.* Sur les mesures d'isolements par la méthode de la perte de charge. E.E. 42. 366.

2990. *D. Bercowitz.* Über Isolationsmessungen an Gleich- und Wechselstromanlagen. Z.D.M. 28. 491.

2991. *H. J. Ryan.* Insulation for high pressures. T.E. 54. 186.

2992. *J. T. Morris.* Electric mains for power transmission. T.E. 56. 428.

2993. *F. J. Sprague.* Long distance power transmission by direct current E.W. 46. 1117.

2994. *H. Pender.* Regulation and efficiency of transmission lines. E.W. 46. 18.

2995. *F. F. Fowle.* The measurement of distributed leakage on transmission lines. E.W. 43. 262.

2996. *B. B. Brackett.* Belt transmission of power as an analogue of electric transmission. E.W. 46. 986.

2997. *J. E. Wallace.* Economies of a 200-mile transmission. E.W. 44. 771.

2998. *F. W. Carter.* Technical considerations in electric railway engineering. T.E. 56. 596; 626.

2999. *H. H. Kennedy.* Power calculations for electric vehicles. Am.M. 28 A. 52.

3000. *S. W. Ashe.* The relation of variable load to cost of transmission in electric railway problems. E.N. 54. 34.

3001. *Pforr.* Stromverbrauch bei Wechselstrombahnen. O.F.E. (2) 42. 291. — *Cserháti.* 307.

3002. *F. Niethammer.* Die elektrischen Bahnsysteme der Gegenwart. Z.V.D.I. 49. 1068; 1153.

3003. *B. Valatin.* Beförderung schwerer Eisenbahnfahrzeuge mit elektrischem Strom. E.B.B. 3. 494; 513; 533.

3004. *E. Cserháti.* Neue elektrische Lokomotiven-Type R.-A. 1903 für die Valtellinabahn. Z.E.W. 23. 221; 237.

3005. *E. Cserháti.* Versuchsergebnisse über Stromverbrauch und -Rückgewinn auf der Valtellinabahn und einige Eigenheiten der Drehstromtraktion. Z.Ö.I. A.V. 57. 345.

3006. *M. Freimark.* Dimensions of bus-bars. E.W. 44. 906.

3007. *L. R. Pomeroy.* The electrification of trunk lines. R.G. 38. 531.

3008. *A. Müller.* Beitrag zum Entwurf von Gleichstrommaschinen. Z.E.W. 23. 575.

3009. *E. Noeggerath.* Aperiodische Gleichstrommaschinen. E.B.B. 3. 233.

3010. *M. Breslauer.* Gleichstrommaschinen mit Hilfspolen. Versuche und Dimensionierung. E.Z. 26. 640; 787; 959. — *R. Pohl.* 786; 873; 959.

3011. *J. Marqueyrol.* Enroulements des dynamos à courant continu. E.E. 41. 81; 126; 168; 201; 241.

3012. *W. Linke.* Zur Trennung der Verluste in Gleichstrommaschinen. E.Z. 26. 610.

3013. *F. Niethammer.* Deflection of stator of direct-current and three-phase generator. E.W. 44. 330.

3014. *M. Breslauer.* A study in the design of a 500 K.W. continuous-current generator. T.E. 56. 835; 918.

3015. *C. E. Canfield.* Calculation of alternator regulation. E.W. 44. 369.

3016. *T. Torda-Heymann.* Theoretical basis for the experimental predetermination of the regulation of alternators. T.E. 53. 6.

3017. *C. F. Guilbert.* On the theory of regulation of alternators. E.W. 44. 1047.

3018. *L. Druebert.* Application des diverses méthodes de détermination de la chute de tension des alternateurs. E.E. 42. 401; 441; 481.

3019. *G. Benischke.* Der Einfluß der Ankerrückwirkung auf die Wellenform von Wechselstrommaschinen. Z.E.W. 23. 681.

3020. *T. Torda.* Die Vorausberechnung der Kurzschlußcharakteristik von Wechselstromgeneratoren. E.Z. 26. 470.

3021. *A. E. T. Atchison.* Some properties of alternators under various conditions of load. T.E. 53. 103; 236; 316; 388; 484.

3022. *J. B. Henderson* and *J. S. Nicholson.* Armature reaction in alternators. T.E. 53. 642.

3023. *H. M. Hobart* u. *F. Punga.* Eine neue Methode zur Prüfung von Wechselstromgeneratoren. E.Z. 26. 441.

3024. *H. M. Hobart* and *F. Punga.* A new method of testing alternating-current generators. E.W. 45. 759.

3025. *H. S. Meyer.* Design of turbo-alternators. T.E. 56. 498.

3026. *A. Müller.* Über die Berechnung der effektiven elektromotorischen Kraft von Drehstrommaschinen. Z.E.W. 23. 31.

3027. *C. Feldmann.* Die azyklische Maschine von J. E. Noeggerath. E.Z. 26. 831.

3028. *A. Still.* Armature losses in double-current generators. E.W. 46. 265.

3029. *E. Ziehl.* Doppelfeld-Generatoren für Ein- und Mehrphasenstrom. E.Z. 26. 617.

3030. *C. F. Guilbert.* Détermination graphique des caractéristiques des dynamos compound. E.E. 41. 321.

3031. *A. Preß.* Dynamo heating time constants. E.W. 46. 735.

3032. *B. Soschinski,* Zug exzentrisch gelagerter Anker im magnetischen Felde. Z.E.W. 23. 153.

3033. *B. Loewenherz* und *A. H. van der Hoop.* Wirbelstromverluste im Ankerkupfer elektrischer Maschinen. Z.V.D.I. 49. 1337; E.Z. 26. 776.

3034. *R. Rüdenberg.* Wirbelstromverluste in massiven Polschuhen. E.Z. 26. 181.

3035. *A. Preß.* Dynamo iron loss increment on full load. E.W. 46. 612.

3036. *C. P. Nachod.* Booster field control. E.W. 45. 1171.

3037. *W. A. del Mar.* Booster calculations. E.W. 43. 687.

3038. *A. Russell.* The kinetic variation of pressure in electric generators. T.E. 55. 627.

3039. *F. Niethammer.* Entwurf von Turbodynamos. Z.G.T. 2. 1; 17; 33.

3040. *J. Dalemont.* Turbo-dynamos et turbo-alternateurs. E.E. 43. 415.

3041. *F. Niethammer.* On turbo-dynamos. E.W. 43. 558; 595; 44. 641.

3042. *H. W. Richardson.* The power factor indicator. E.W. 44. 1089. — *W. F. Shaw.* 45. 351.

3043. *P. Habets.* Electric winding machines. Eg. 79. 850.

3044. *E. Rosenberg.* Eine neue Dynamomaschine und ihre Anwendung zur Beleuchtung von Eisenbahnwagen. E.Z. 26. 392.

3045. *K. Kuhlmann* u. *W. Hahnemann.* Rosenbergs Zugbeleuchtungsdynamo. E.Z. 26. 525. — *E. Rosenberg.* 637.

3046. *R. Wotruba.* Die Wirkungsweise und Konstruktion des Elektromotors. G.F.W. 1. 16.

3047. *J. L. Dickson.* Variation of motor speed with variable line voltage. E.W. 43. 1157.

3048. *A. Thomälen.* Die Zerlegung der Ampèrewindungen des Einphasenmotors in entgegengesetzt umlaufende Ampèrewindungen. E.Z. 26. 1111; 1136.

3049. *J. Bethenod.* Sur la théorie du moteur série compensé monophasé. E.E. 41. 1; 281; 42. 161; 209; 250.

3050. *J. K. Sumec.* Zur Berechnung einphasiger Kommutatormotoren. Z.E.W. 23. 255; 351. — *R. Richter.* 350.

3051. *J. Bethenod.* Sur le moteur Shunt composé monophasé. E.E. 42. 321; 387.

3052. *J. Bethenod.* Sur le dimensionnement des moteurs monophasés à collecteurs. E.E. 45. 201; 324.

3053. *T. Lehmann.* Moteurs monophasés compensés balais d'excitation. E.E. 45. 441.

3054. *H. Zipp.* Einiges über Wechselstrommotorenprobleme und deren graphische Behandlung. E.B.B. 3. 424; 634.

3055. *F. Creedy.* The alternating-current series motor. T.E. 55. 21; 46; 85; 118.

3056. *A. E. Kennelly.* A working diagram of the alternating current synchronous motor. E.W. 45. 195.

3057. *M. Latour.* Commutation in alternating current motors at starting. E.W. 44. 930.

3058. *A. Hoerberger.* Kommutatormotore für einphasigen Wechselstrom. P.J. 320. 737; 759; 776; 794.

3059. *J. K. Sumec.* Die Berechnung von Drehstrommotoren. Z.E.W. 23. 507.

3060. *R. Moser.* Streuungsmessung an Drehstrommotoren und Bestimmung der Leerlaufskonstanten. E.Z. 26. 2.

3061. *O. S. Bragstad.* Messung und Trennung der Eisenverluste in den asynchronen Drehstrommotoren. Z.E.W. 23. 381.

3062. *J. Bache-Wiig* u. *O. S. Bragstad.* Messung und Berechnung der Eisenverluste in den asynchronen Drehstrommotoren. Z.E.W. 23. 713.

3063. *W. Angermann.* Verlusttrennung bei asynchronen Drehstrommotoren. E.Z. 26. 295.

3064. *K. Pichelmayer.* Berechnung von σ bei Drehstrommotoren. Z.E.W. 23. 93.

3065. *J. Dalemont.* Anwendung der Kondensatoren bei dauerndem Betrieb von Drehstrommotoren. E.Z. 26. 1007.

3066. *T. H. Charton.* Notes on alternating-current induction motors. T.E. 56. 73.

3067. *H. M. Hobart.* The design of induction motors. E.W. 43. 805.

3068. *H. M. Hobart.* A method of designing induction motors. T.E. 54. 420.

3069. *H. M. Hobart.* Methode zur Berechnung von Inductionsmotoren. E.Z. 26. 149.

3070. *H. C. Specht.* A practical vector-diagram for induction motors. E.W. 45. 388; 46. 1126.

3071. *W. C. Way.* The practical application of the Heyland diagram for induction motors. E.W. 46. 1069.

3072. *A. A. Averrett.* Power factor in induction motors. E.W. 46. 278.

3073. *A. Preß.* The induction motor leakage coefficient. E.W. 46. 443.

3074. *C. V. Drysdale.* Measurement of the slip of induction motors. T.E. 55. 734.

3075. *H. M. Hobart.* A choice of air gap diameters for induction motors. E.W. 43. 170.

3076. *C. P. Feldmann.* A new design for slow speed induction motors. E.W. 45. 343.

3077. *E. Alexanderson.* Method for measuring the outpout of induction motors. E.W. 44. 212; T.E. 53. 869.

3078. *B. G. Bergman.* Single phase induction regulator. E.W. 46. 56.

3079. *A. Tian.* Mesure du glissement d'un moteur asynchrone. E.E. 44. 321.

3080. *T. Roßkopf.* Konstruktion eines Stromdiagrammes eines Mehrphasen-Asynchronmotors. Z.E.W. 23. 367.

3081. *J. Rey.* Sur l'attraction dissymétrique du rotor dans les moteurs asynchrones. E.E. 41. 257.

3082. *K. Schnetzler.* Ein neuer Repulsionsmotor und seine Vorausberechnung. E.Z. 26. 72; 91.

3083. *K. Faber.* The inverted repulsion motor. E.W. 44. 93.

3084. *A. Blondel.* Champ tournant des moteurs à répulsion. E.E. 42. 41.

3085. *E. Danielson.* Die günstigste Anordnung von Wickelungen und Bürstenstellungen bei kompensierten Repulsionsmotoren. E.Z. 26. 322.

3086. *J. Bethenod.* Sur le moteur à répulsion compensé Lehmann. E.E. 45. 41.

3087. *M. Latour.* Commutation au démarrage des moteurs à collecteur. E.E. 42. 1.

3088. *C. W. Hill.* Crane motors and controllers. T.E. 56. 663; 747; 794.

3089. *L. Fleischmann.* Zur Theorie des Winter-Eichberg-Motors. E.Z. 26. 767.

3090. *S. Sugiyama.* Single-phase commutator motors. E.W. 44. 725; 768.

3091. *A. E. Kennelly* and *S. E. Whiting.* A diagram of the circuits of the dynamomotor. E.W. 45. 1024.

3092. *A. H. Bate.* Notes on heating and sparking limits in variable speed motors. T.E. 55. 14.

3093. *K. Morris* and *G. A. Lister.* The Eddy current brake for testing motors. T.E. 55. 88; 131.

3094. *A. Blondel.* Quelques remarques sur l'influence des propriétés de l'arc électrique dans les phénomènes oscillatoires des réseaux E.E 43. 401; 44. 201.

3095. *B. Frankenfield.* Regulation and compounding of lighting balancers. E.W. 46. 1067.

3096. *R. de Valbreuze.* L'éclairage électrique des trains de chemin de fer. E.E. 43. 201.

3097. *H. B. Stabler.* Two methods for locating faults in telephone cables. E.W. 44. 326.

3098. *A. V. Abbott.* Transfer systems and the multiple board in telephone exchanges. E.W. 46. 181.

3099. *R. Nowotny.* Die erste Pupinsche Telephonleitung in Österreich. Z.E.W. 23. 189.

3100. *E. Gehrcke.* Über die Messung der Wellenlänge elektrischer Schwingungen. E.Z. 26. 697.

3101. *F. Braun.* Phase-shifted high-frequency oscillations. T.E. 56. 546.

3102. *C. Tissot.* Note on the use of the bolometer as a detector of electric waves. T.E. 56. 848.

3103. *N. N.* Die Grundlage der Wellentelegraphie und ihre Entwicklung. C.Z.O.M. 26. 83; 94; 106; 129; 144; 160.

3104. *N. N.* Wireless telegraph theory. E.W. 43. 41.

3105. *J. S. Stone.* The theory of wireless telegraphy. T.E. 54. 134.

3106. *W. M.* Richtfähige Telegraphie ohne Draht nach Artom. E.Z. 26. 730.

3107. *J. Erskine-Murray.* Recent advances in wireless telegraphy. T.E. 56. 355.

3108. *A. Prasch.* Neuerungen auf dem Gebiete der Wellentelegraphie. P.J. 320. 379.

3109. *J. F. King.* New American system of wireless telegraphy. E.W. 45. 719.

3110. *G. Eichhorn.* Abstimmung in der drahtlosen Telegraphie. P.J. 320. 13.

3111. *A. Slaby.* Die Abstimmung funkentelegraphischer Sender. E.Z. 26. 1003; 1026; 1149.

3112. *J. S. Sachs.* Untersuchungen über den Einfluß der Erde bei der drahtlosen Telegraphie. P.J. 320. 459; 475; 492.

3113. *W. Duddell* and *J. E. Taylor.* Wireless telegraphy measurements. Eg. 79. 785.

3114. *O. Heaviside.* The charging of a cable through a condenser and resistance. T.E. 54. 394.

3115. *A. E. Kennelly.* The alternating current theory of transmission speed over submarine telegraph cables. T.E. 54. 224.

3116. *W. Gaye.* The duplex balancing of telegraph cable. T.E. 53. 905; 954; 994; 1019.

3117. *B. Field.* Eddy currents in cable sheaths. T.E. 53. 12; 56.

3118. *H. W. Fisher.* Special methods for locating faults in electric cable. E.W. 44. 1045.

3119. *C. C. Anthony.* Installation and maintenance of storage battery for track circuits. R.G. 38. 582.

3120. *C. R. Underhill.* The design of multiple-coil windings. E.W. 46. 652.

3121. *N. N.* Design of armature coils. E.W. 44. 461.

3122. *J. Jessen.* Ein neuer Selbstanlasser. E.Z. 26. 809.

3123. *C. A. Adams.* Reactance EMF and the design of commutating machines. E.W. 46. 346.

3124. *A. Press.* Commutation theory E.W. 46. 1027.

3125. *E. Arnold.* Einiges über Kommutation und Wendepole. Z.E.W. 23. 698; 765; 776. — *A. Müller* 715.

3126. *A. Keller.* A practical test of commutation. E.W. 44. 288.

3126a. *A. S. Mc Allister.* Efficiency curves of rotary converters. E.W. 43. 1077.

3127. *P. Riebesell.* Über den Kurzschluß der Spulen und die Vorgänge bei der Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. E.Z. 26. 1104.

3128. *M. Latour.* Commutation at starting of alternating current motors with commutator. E.W. 45. 97.

3129. *F. G. Baum.* Synchronous converters. E.W. 43. 691.

3130. *O. J. Ferguson.* A graphical method of representing voltage ratios in synchronous converters. E.W. 44. 733.

3131. *L. Drucbert.* Essai des transformateurs. E.E. 45. 161; 241.

3132. *T. Gray.* The elementary principles of transformer design. E.W. 43. 765; 809.

3133. *P. Drude.* Sur la construction rationnelle des transformateurs Tesla. E.E. 44. 1.

3134. *L. Lichtenstein.* Transformer with a large electrostatic capacity. T.E. 54. 57.

3135. *E. G. Reed.* Predetermination of transformer regulation. E.W. 43. 515.

3136. *E. S. Johonnott.* Iron losses in loaded transformers. Z.W. 44. 8.

3137. *W. Hahnemann.* Über eine einfache graphische Ermittelung des Spannungsabfalles bei Transformatoren. E.Z. 26. 700. — *L. Bloch*; *K. Faye-Hansen* 828.

3138. *A. E. Kennelly.* The efficiency curves of constant-potentia transformers. E.W. 43. 723.

3139. *A. E. Kennelly* and *S. A. Whiting.* On the parallel working of delta- and star-connected three-phase transformers. E.W. 44. 56; T.E. 53. 767.

3140. *R. Pohl* und *H. Bohle.* Berechnung von Transformatoren auf den Mindestbetrag an Kosten des wirksamen Materials. E.Z. 26. 897; 1067; — *A. Müller* 1067.

3141. *M. U. Schoop.* Contribution à la théorie de l'accumulateur Jungner-Edison E.E. 42. 201.

3142. *E. Sieg.* Die letzten Neuerungen auf dem Gebiete transportabler Akkumulatoren. E.Z. 26. 311.

3143. *C. Liebenow.* Über Leitungen sparende Zellenschalter für Akkumulatorenbatterien. E.Z. 26. 437.

3144. *Bo.* Kapazitätsprüfung von Akkumulatorbatterien. Z.B.D. 9. 242.

3145. *N. N.* Some new electrical instruments. T.E. 56. 559.

3146. *W. E. Sumpner.* The use of iron in alternate-current instruments. T.E. 54. 221; 280; 318.

3147. *A. H. Ford.* The design of motor starting rheostats. E.W. 43. 97. *F. Meurer* and *A. Simon* 519. *F. Freimark* 520.

3148. *J. Kuhn.* Eine Zurückführung der Thomson'schen Brücke auf die Wheatstone'sche Brücke. C. G. U. 23. 402.

3149. *Orlich, H. Schultze.* Elektrometrische Untersuchungen. E.Z. 26. 885.

3150. *L. Trouilhet.* Les compteurs d'énergie électrique. E.E. 41. 496.

3151. *N. N.* Three-phase power measurement without wattmeters. T.E. 55. 555.

3152. *L. A. Freudenberger.* The choice of signs in Wattmeter problems. E.W. 45. 346.

3153. *N. N.* Prüfungen von Wattmetern. C.Z.O.M. 26. 246.

3154. *C. V. Drysdale.* Wattmeter correcting factors. T.E. 55. 556.

3155. *L. A. Freudenberger.* Single Wattmeter on Edison three-wire system. E.W. 45. 717.

3156. *L. Legros.* Sur l'application de la méthode de 2 wattmètres à des courants triphasés de forme quelconque. E.E. 43. 42; 81.

3157. *F. R. Stove.* An expression for the torque of a polyphase Wattmeter. E.W. 43. 1022.

3158. *J. L. Dickson.* Measurement of current by copper voltameter. E.W. 43. 130.

3159. *J. A. Poynting.* The theory of phasemeters. T.E. 56. 102.

3160. *W. E. Sumpner.* Phasemeters and their calibration. T.E. 56. 760.

3161. *P. Drude.* Die Eichung von Wellenmessern, insbesondere beim Slaby'schen Multiplikationsstabe. E.Z. 26. 339.

3162. *A. Hruschka.* Elektrotechnische Aufgaben im Tunnelbau. Z.E.W. 23. 321; 341; 357.

3163. *J. Rothmüller.* Der elektrische Teil des preisgekrönten Schiffshebewerk-Projektes „Universell". Z.Ö.I.A.V. 57. 393; 405.

3164. *G. A. Campbell.* The shielded balance. E.W. 43. 646.

3165. *F. Neesen.* Die Schaltung der Blitzableiter und der Einfluß der Drosselspulen. E Z. 26. 301.

3166. *F. Vogel.* Über den Einfluß benachbarter Leiter bei Blitzschutzvorrichtungen. A.G.B. 56. 28.

3167. *A. S. Mc Mister.* A convenient and economical electrical method for determining mechanical torque. E.W. 43. 871.

3168. *R. Edler.* Über den Entwurf von Kontrollern mit Wanderkontakten. Z.E.W. 23. 289.

3169. *A. Fisch.* Contribution à l'étude des contacts imparfaits. E.E. 41. 521; 42. 11.

3170. *C. P. Nachod.* Design of a pantagraph trolley. E.W. 45. 1078.

3171. *E. W. Marchand* and *F. A. Lawson.* The operation of circuit breakers and fuses. T.E. 56. 792.

3172. *A. Schwartz* and *W. H. N. James.* Zincfuses. T.E. 56. 184.

3173. *A. Schwartz* and *W. H. N. James.* Aluminium fuses. T.E. 56. 468.

3174. *M. Corsepius.* Erdungsprüfer. E.Z. 26. 966.

Erddruck.

3175. *C. W. Crockett.* A new form of procedure for earthwork computations and a slide rule therefore. E.N. 54. 654.

3176. *W. Airy.* The problem of grain pressure. Eg. 79. 1.

3177. *W. E. Hunter* and *J. S. Myers.* A problem in the storage of granular and lump material. E.N. 54. 89.

3178. *H. W. Sheley.* Is the prismoid formula commonly used? E.N. 53; 41

3179. *H. P. Boordman.* Concerning retaining walls and earth pressures. E.N. 54. 166; 522. — *J. S. Fielding* 521.

3180. *C. Warthington.* The design of retaining walls. E.N. 54. 519.

3181. *F. F. Sinks.* Analysis and design of a reinforced concrete retaining wall. E.N. 53. 8.

3182. *F. F. Sinks.* Design of reinforced concrete retaining wall. R.G. 37. 676.

3183. *C. F. Graff.* High reinforced concrete retaining wall construction at Seattle Wash. E.N. 53. 262.

Fehlerrechnung.

3184. *H. Sossna.* Zentrieren exzentrisch beobachteter Richtungen. Z.V. 34. 569.

3185. *E. Hammer.* Mittlerer Kilometerfehler aus den Differenzen von Doppelnivellierungen bestimmter Strekken. Z.V. 34. 457.

3186. *C. Koppe.* Über die zweckentsprechende Genauigkeit der Höhendarstellung in topographischen Plänen und Karten für allgemeine Eisenbahnvorarbeiten. O.F.E. (2) 42. 73; 91.

3187. *M. Rosenmund.* Die Schlußergebnisse der Absteckung des Simplontunnels. S.B.Z. 46. 137.

3188. *E. Cellerier.* Étude sur les erreurs d'inscription des leviers enregistreurs de mouvement. R.D.M. 16. 22.

3189. *B. Soschinski.* Die Ausgleichsrechnungen in geschlossenen Leitungsnetzen und die Gauß'schen Näherungsverfahren zur Auflösung der Netzgleichungen. E.Z. 26. 1069; 1093.

3190. *N. N.* Standard loading screws. E. 100. 172; 198; 249.

3191. *J. Bürgin.* Über die Bestimmung der Neigung zwischen Limbus- und Alhidadenachse des Repetitionstheodoliten und den Einfluß dieses Fehlers auf die Winkelmessungen der badischen Haupttriangulierung. Z.V. 34. 473.

(Fortsetzung folgt.)

Zur Keplerschen Bewegung.

Von Professor M. Tolle in Karlsruhe.

I.

Im 44. Bande dieser Zeitschrift hat Herr Liebmann auf Seite 355 unter der Überschrift: „Einfaches Beispiel eines Punktsystems, das bei seiner Bewegung einer nicht holonomen Bedingung unterworfen ist" den Satz abgeleitet: *Wenn der Punkt B der nicht holonomen Bedingung unterworfen ist, daß er sich immer senkrecht gegen die Verbindungslinie mit A bewegt, so führt B relativ gegen A eine Zentralbewegung aus, genau als ob A den Punkt nach dem Newtonschen Gesetz anzöge.*

Der Satz ist in dieser allgemeinen Fassung *unrichtig.* Um dies einzusehen, braucht man sich nur vorzustellen, Punkt A sei in Ruhe, B bewege sich auf einer Kugelfläche um A, dann bewegt sich B stets senkrecht zu AB, trotzdem wird je nach der Bahn und der Geschwindigkeit von B dessen Beschleunigung eine ganz beliebige Richtung und Größe haben können.

Schon die Folgerungen, die Bd. 44, Seite 356 aus der Grundbedingung:

$$0 = (x_2 - x_1)\,\delta x_2 + (y_2 - y_1)\,\delta y_2 + (z_2 - z_1)\,\delta z_2$$

gezogen sind, lassen sich nicht sämtlich daraus ziehen; vor allem folgt aus dieser Gleichung nicht

$$x_1'' = 0; \quad y_1'' = 0; \quad z_1'' = 0,$$

und es darf deshalb nicht heißen: „A bewegt sich also gradlinig mit konstanter Geshwindigkeit". Vielmehr ergeben sich erst aus der weiteren *Annahme*, daß sich A geradlinig gleichförmig bewegt, daß also $x_1'' = 0$; $y_1'' = 0$ und $z_1'' = 0$ ist, die drei Gleichungen auf Seite 356: $x_2'' = \lambda(x_2 - x_1)$; $y_2'' = \lambda(y_2 - y_1)$ und $z_2'' = \lambda(z_2 - z_1)$, aus denen Herr Liebmann (mit Herrn Voss) weiterhin folgert, daß „B relativ gegen A eine Zentralbewegung ausführt, so als ob die Kraft $\lambda\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ in der Richtung der Verbindungslinie wirkte. B bleibt also immer

relativ zu A in einer Ebene und in dieser Ebene gilt der Flächensatz". Aber auch diese Schlußfolgerung ist unrichtig, wie man sich sofort an folgendem Beispiel klar machen kann: A bewege sich geradlinig gleichförmig, B bleibe auf einem Kreise mit A als Mittelpunkt, dessen Ebene stets rechtwinklig zur geraden Bahn von A steht, alsdann bewegt sich B beständig rechtwinklig zum Halbmesser AB. Beide Voraussetzungen für die Gültigkeit der Gleichungen $x_2'' = \lambda (x_2 - x_1)$; $y_2'' = \lambda (y_2 - y_1)$; $z_2'' = \lambda (z_2 - z_1)$ sind also erfüllt und trotzdem kann je nach der Geschwindigkeit, mit welcher sich B in dem Kreise um A bewegt, die Beschleunigung eine ganz verschiedene Richtung haben, sie braucht keineswegs nach A gerichtet zu sein.

Offenbar sind also noch weitere Bedingungen zu erfüllen, wenn der Satz richtig sein soll. Ich will mich darauf beschränken, diejenige Bewegung zu kennzeichnen, die in der Tat sicher eine Zentralbewegung als Relativbewegung von B gegen A liefert, und zwar eine solche, als ob A den Punkt B nach dem Newtonschen Gesetz anzöge. Daß dann diese Bewegung in der Tat die einzige ist, welche die letztgenannte Bedingung erfüllt, wird man unschwer aus der Entwicklung einsehen. Ich würde nicht auf den Satz von Herrn Liebmann zurückgekommen sein, wenn nicht darin eine außerordentlich anschauliche und elementar bequem zu verwertende Eigenschaft der nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz erfolgenden Zentralbewegung enthalten wäre, die ich nachstehend zeigen und benutzen werde.

II.

Wir betrachten folgende einfache Bewegung: *Ein Punkt P hat in jedem Augenblick zur Geschwindigkeit die geometrische Summe zweier Geschwindigkeiten v_a und v_c; diese beiden Komponenten sind der Größe nach konstant; v_c hat außerdem stets die gleiche Richtung, während v_a beständig zu dem von einem festen Punkte O nach P gezogenen Fahrstrahl r rechtwinklig steht und in derselben Ebene bleibt, in der auch v_c gelegen ist.* Der Punkt P bewegt sich also in einer Ebene.

1) Dreht sich der Fahrstrahl r um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$, so erfährt v eine Änderung gleich der geometrischen Summe der Änderung ihrer beiden Komponenten v_a und v_c. Da v_c nach Richtung und Größe konstant bleibt und v_a sich nur der Richtung nach ändert, sich nämlich, weil stets rechtwinklig zu r, um den Winkel $d\varphi$ dreht, so ist die gesamte Geschwindigkeitsänderung von v *rechtwinklig* zu v_a, d. h. nach O gerichtet, und von der Größe $v_a \cdot d\varphi$. Die Beschleunigung b des Punktes P ist folglich beständig nach O gerichtet, die *Bewegung ist eine Zentralbewegung um O.*

2) Die *Größe der Beschleunigung* findet sich aus der Geschwindigkeitsänderung $v_a d\varphi$ zu

$$b = v_a \frac{d\varphi}{dt}.$$

Bei jeder Zentralbewegung ist bekanntlich die Flächengeschwindigkeit konstant. Setzen wir die doppelte Flächengeschwindigkeit $= c_f$, so gilt für jede Zentralbewegung, also auch hier

$$\frac{2df}{dt} = \frac{r^2 \cdot d\varphi}{dt} = c_f,$$

woraus allgemein folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c_f}{r^2},$$

Hier war nun die Beschleunigung

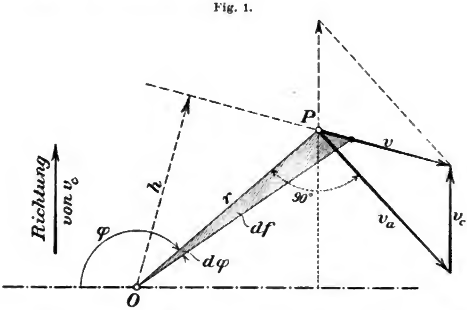
$$b = v_a \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

mithin ist hier

$$b = \frac{v_a \cdot c_f}{\cdot r_2},$$

d. h. bei unserer Bewegung ist die Beschleunigung dem Quadrate des Fahrstrahles r umgekehrt proportional, wir haben eine *Bewegung nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz.*

Fig. 1.



3) Um die *Gleichung der Bahnlinie* zu bestimmen, wählen wir die Senkrechte zur Richtung von v_c durch O als Abszissenachse. Für die resultierende Geschwindigkeit v und ihre Komponenten gilt dann nach dem Momentensatz für den Momentenpunkt O die Gleichung:

$$vh = v_a r + v_c r \cos\varphi.$$

vh ist identisch mit der doppelten Flächengeschwindigkeit c_f, folglich

$$c_f = v_a r + v_c r \cos\varphi$$

oder

$$r = \frac{c_f}{v_a + v_c \cos\varphi} = \frac{\frac{c_f}{v_a}}{1 + \frac{v_c}{v_a}\cos\varphi}.$$

Dies ist die Polargleichung eines Kegelschnitts mit O als Brennpunkt, mit dem Parameter:

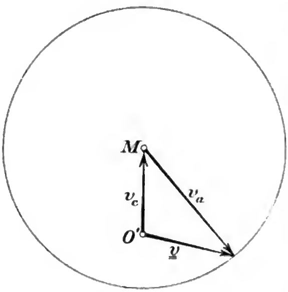
$$p = \frac{c_f}{v_a}$$

und der numerischen Exzentrizität:

$$\varepsilon = \frac{v_c}{v_a}.$$

Die große Achse des Kegelschnitts steht zu v_c rechtwinklig.

Fig. 2.



4) Der *Hodograph* der Keplerschen Bewegung ist somit, da v die geometrische Summe von v_c und v_a ist, v_c konstante Größe und Richtung, v_a konstante Größe hat, *ein Kreis* (siehe Fig. 2) mit dem Halbmesser v_a, in dem der Anfangspunkt O' der Geschwindigkeiten v von dem Kreismittelpunkt um die Strecke v_c entfernt liegt. (v_a ist hierin stets rechtwinklig zum Fahrstrahl r.)

5) Um zu entscheiden, wann sich bei beliebig gegebener Anfangslage des Punktes P, vorgeschriebener Geschwindigkeit v und vorgeschriebener Beschleunigung b eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ergibt, beachten wir, daß der Kegelschnitt

eine Ellipse wird,	wenn $\varepsilon < 1$	d. h. wenn $\frac{v_c}{v_a} < 1$	oder	$v_c - v_a < 0$
„ Hyperbel „	„ $\varepsilon > 1$	„	„	$v_c - v_a > 0$
„ Parabel „	„ $\varepsilon = 1$	„	„	$v_c - v_a = 0$

ist. In dem Geschwindigkeitsdreieck (Fig. 3) sei der Winkel zwischen v und $v_a = \gamma$, dann ist

$$v_c^2 = v^2 + v_a^2 - 2\,v\,v_a \cos\gamma$$

oder

$$v_c^2 - v_a^2 = v^2 - 2v_a \cdot v \cos\gamma.$$

Da γ auch der Winkel zwischen h und r ist, so wird $\cos\gamma = \frac{h}{r}$, oder $v_a \cdot v \cos\gamma = v_a \cdot \frac{vh}{r} = v_a \cdot \frac{c_f}{r}$. Ferner war

$$b = \frac{v_a c_f}{r^2} \text{ oder } v_a c_f = br^2,$$

folglich ist

$$2 v_a v \cos\gamma = 2\,\frac{br^2}{r} = 2br,$$

somit

$$v_c^2 - v_a^2 = v^2 - 2br.$$

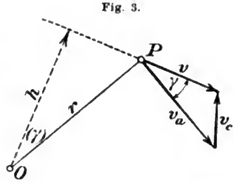
Der Kegelschnitt wird also

eine Ellipse, wenn $v^2 - 2br < 0$ d. h. $v < \sqrt{2br}$

„ Hyperbel „ $v^2 - 2br > 0$ „ $v > \sqrt{2br}$

und „ Parabel „ $v^2 - 2br = 0$ „ $v = \sqrt{2br}$ ist.

Fig. 3.



6) Zum Schlusse werde noch die Umlaufdauer T für eine elliptische Bahn berechnet. Mit der doppelten Flächengeschwindigkeit c_f findet sich die ganze Ellipsenfläche $\pi AB = \frac{c_f}{2} T$ oder $T = \frac{2\pi AB}{c_f}$.

Nun war $b = \frac{v_a c_f}{r^2}$; nennt man die Beschleunigung im Abstande 1 vom Zentrum O: b_1, so ist $b_1 = br^2$, hiermit also $c_f \cdot v_a = b_1$. Ferner war $\frac{c_f}{v_a} = p$; mithin ist $c_f^2 = b_1 \cdot p$ oder die doppelte Flächengeschwindigkeit $c_f = \sqrt{b_1 p}$. Folglich

$$T = \frac{2\pi AB}{\sqrt{b_1 p}} = \frac{2\pi AB}{\sqrt{b_1}\,\frac{B}{A}} = 2\pi\sqrt{\frac{A^3}{b_1}}.$$

Ist der Kegelschnitt durch p und ε gegeben und außerdem die Beschleunigung b_1 für den Abstand 1 bekannt, so finden sich mit der doppelten Flächengeschwindigkeit

$$c_f = \sqrt{b_1 p}$$

die Geschwindigkeiten unserer Bewegung

$$v_a = \frac{c_f}{p} = \frac{\sqrt{b_1 p}}{p} = \sqrt{\frac{b_1}{p}}$$

und

$$v_c = \varepsilon \cdot v_a \quad = \varepsilon\sqrt{\frac{b_1}{p}}.$$

Im Vorstehenden habe ich dargetan, wie einfach und anschaulich sich die Keplersche Bewegung behandeln läßt, wenn man von den beiden konstanten Geschwindigkeitskomponenten v_a (senkrecht zum Fahrstrahle r) und v_c (mit gleichbleibender Richtung) ausgeht.

III.

Zur Richtigstellung des von Herrn Liebmann ausgesprochenen Satzes diene nachfolgende Betrachtung.

Einer Zentralbewegung, wie oben beschrieben, mit dem festen Zentrum A und dem beweglichen Punkte B (um wieder die Bezeichnungen des Herrn Liebmann zu gebrauchen) entsprechend den beiden Geschwindigkeitskomponenten v_a (der Größe nach konstant und senkrecht zu AB) und v_c (der Größe und Richtung nach unveränderlich) erteilen wir die zusätzliche Parallelbewegung mit der Geschwindigkeit $-v_c$; dann hat also Punkt A eine geradlinige gleichförmige Bewegung (in der Ebene der Zentralbewegung) und Punkt B eine Bewegung mit der *konstanten* absoluten Geschwindigkeit v_a *stets rechtwinklig* zum Fahrstrahl AB, während die Relativbewegung von B zu A ungeändert (d. h. eine Zentralbewegung) bleibt. Geben wir weiter noch dem System eine zusätzliche Geschwindigkeit v_0 rechtwinklig zur Ebene der Relativbewegung von B gegen A, so erhält Punkt A eine konstante Geschwindigkeit v_A, welche die geometrische Summe von $-v_c$ und v_0 ist, und Punkt B eine konstante Geschwindigkeit $v_B =$ der geometrischen Summe von v_a und v_0, die offenbar, weil ihre unveränderlichen Komponenten v_a und v_0 stets rechtwinklig zu r stehen, ebenfalls beständig rechtwinklig zum Fahrstrahle r gerichtet ist und mit der Ebene der Relativzentralbewegung einen konstanten Winkel bildet. Eine zusätzliche Geschwindigkeit, die eine veränderliche Komponente senkrecht zur Ebene der Relativbewegung lieferte, würde eine senkrecht zu r stehende Beschleunigung voraussetzen, also nicht mehr eine relative Zentralbewegung zulassen. Wir bekommen somit folgenden Satz:

Bewegt sich ein Punkt A geradlinig gleichförmig und hat ein Punkt B stets eine Geschwindigkeit von konstanter Größe, die rechtwinklig zur Verbindungslinie AB steht und so gerichtet bleibt, daß die Verbindungslinie der Endpunkte der Geschwindigkeiten von A und B beständig einer unbeweglichen Ebene E, die irgend einer der Lagen des Fahrstrahles AB parallel ist, parallel bleibt, so beschreibt Punkt B relativ gegen A eine Zentralbewegung in einer zu der unbeweglichen E parallelen Ebene so, als ob A den Punkt nach dem Newtonschen Gesetz anzöge.

Über Spannungsverteilungen in Balken aus Eisenbeton.

Von K. WIEGHARDT in Braunschweig.

Inhalt.

Einleitung.

Im Folgenden sollen keine auf die unmittelbaren Bedürfnisse der ausübenden Technik zugeschnittenen, allgemeinen Rechnungsregeln für Balken aus Eisenbeton (armiertem Beton) aufgestellt werden. Unser Interesse ist vielmehr ein theoretisches; wir wollen — in den hauptsächlich vorkommenden Belastungsfällen — die merkwürdige Wirkungsweise des Eisenbetons auf Grund der theoretischen Elastizitätslehre verstehen lernen, indem wir versuchen, die elastischen Differentialgleichungen unter den jeweilig entsprechenden Randbedingungen zu integrieren und zwar bis zu konkreten, *zahlenmäßigen* Ergebnissen hin. Wer sich jemals mit Randwertaufgaben beschäftigt hat, wird von vornherein überzeugt sein, daß dieses Ziel im allgemeinen jedenfalls nur dann erreichbar sein wird, wenn der Eisenbetonbalken in ziemlich einfacher Weise aus seinen Grundbestandteilen Eisen und Beton zusammengesetzt ist. Auf die verwickelten Verhältnisse, wie sie in Wirklichkeit häufig vorliegen, sind also im allgemeinen unsere Ergebnisse höchstens qualitativ anwendbar. Dafür haben unsere Untersuchungen den Vorzug, von sonst üblichen, aber willkürlichen Annahmen — von der Art z. B., daß gewisse ebene Querschnitte des Balkens bei der Formänderung eben bleiben — gänzlich frei zu sein; Annahmen, zu deren Einführung man anderseits einfach gezwungen ist, wenn man den verwickelten Verhältnissen der Wirklichkeit überhaupt beikommen will.

Über die physikalische Natur des Eisenbetons bilden wir uns die folgenden — idealen — Vorstellungen: Wir fassen den Beton auf als einen elastischen Körper, der bei nicht zu großer Inanspruchnahme dem (Hookeschen) Gesetze vom linearen Zusammenhange zwischen Spannung und Formänderung gehorcht und nehmen ferner an, daß an den Berührungsstellen zwischen Eisen und Beton bei nicht zu großer Inanspruchnahme beide Materialien aneinander *haften*.

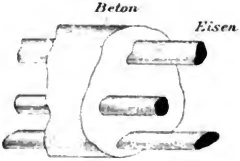
So bekommen wir in einer Reihe von Belastungsfällen schließlich die ganze Spannungsverteilung heraus, wie sie in einem Eisenbetonbalken herrscht und indem wir diese nun mit der Spannungsverteilung vergleichen, welche bei gleicher Belastung in einem ausschließlich aus Beton bestehenden Balken herrschen würde, bekommen wir ein anschauliches Bild von dem Grade des Nutzens, den die Armierung des Betons in dem betreffenden Falle gewährleistet. —

I. Allgemeine Entwicklungen.

a) Das mathematische Problem der Spannungsermittlung für Eisenbeton.

Wir werden allgemein den Eisenbeton betrachten als einen elastischen Körper, welcher aus zwei verschiedenen elastischen Materialien von verschiedenen Elastizitätskonstanten, Eisen und Beton, so zusammengesetzt ist, daß beide längs gewisser Flächen, die wir „*Scheidewände*“ nennen wollen, aneinanderstoßen (s. Fig. 1). Zur völligen Kennzeichnung des Wesens unseres mathematischen Problems haben wir dann den bekannten Entwicklungen der theoretischen Elastizitätslehre nur noch die Überlegung hinzuzufügen, wie sich die Verhältnisse an den Scheidewänden gestalten mögen.

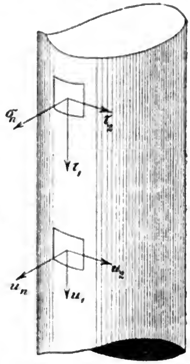
Fig. 1.



Mit Rücksicht auf das Gleichgewicht solcher Teilchen Eisenbeton, die teils im Eisen, teils im Beton liegen, wird man hier auf alle Fälle die Bedingung haben, daß diejenigen drei von jenen sechs an jeder Stelle vorhandenen Spannungskomponenten, welche an den Flächenelementen einer Scheidewand angreifen (σ_n, τ_1 und τ_2 in Fig. 2), vom einen zum andern Material *stetig* übergehen. Die übrigen Bedingungen, welche geradezu die mathematische Definition des *Haftens* der beiden Materialien darstellen, sind einfach die, daß alle drei Verrückungskomponenten (u_n, u_1 und u_2 in Fig. 2) — also die Verrückungen schlechthin — an den Scheidewänden einen *stetigen* Verlauf vom einen zum

andern Material nehmen.[1]) Kennzeichnet man also die zum Beton und zum Eisen gehörigen Größen beziehungsweise durch die Indizes $^{(b)}$ und $^{(e)}$, so stellen sich die *Scheidewandbedingungen* durch folgende Gleichungen dar:

Fig. 2.



$$(1)\qquad \begin{matrix} u^{(b)} = u^{(e)}, & v^{(b)} = v^{(e)}, & w^{(b)} = w^{(e)}, \\ \sigma_n^{(b)} = \sigma_n^{(e)}, & \tau_1^{(b)} = \tau_1^{(e)}, & \tau_2^{(b)} = \tau_2^{(e)}. \end{matrix}$$

Bei der Ermittlung der Spannungen, die bei gegebenen Oberflächenspannungen oder -verrükkungen in einem Körper aus Eisenbeton herrschen, handelt es sich also um folgendes mathematische Problem:

Die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen sechs Spannungskomponenten:

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z;\ \tau_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{xy}$$

und die drei Verrückungskomponenten:

$$u,\ v,\ w$$

sind als Funktionen von x, y, z so zu bestimmen, daß

1. überall im Beton und im Eisen die elastischen Differentialgleichungen befriedigt sind, nämlich die Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \\[2ex] \sigma_x = \dfrac{m' E'}{(m'+1)(m'-2)}\left[(m'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right], \\[2ex] \sigma_y = \dfrac{m' E'}{(m'+1)(m'-2)}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + (m'-1)\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right], \\[2ex] \sigma_z = \dfrac{m' E'}{(m'+1)(m'-2)}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + (m'-1)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right]; \\[2ex] \tau_{yz} = \dfrac{m' E'}{2(m'+1)}\left[\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right], \\[2ex] \tau_{zx} = \dfrac{m' E'}{2(m'+1)}\left[\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right], \\[2ex] \tau_{xy} = \dfrac{m' E'}{2(m'+1)}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right], \end{cases}$$

---

1) Von komplizierteren Definitionen, die der Wirklichkeit vielleicht mehr entsprechen würden, sei hier abgesehen.

und zwar so, daß überall da, wo das Material Beton ist, E' und m' den sog. Elastizitätsmodul und das Verhältnis von Längsdehnung zu Querkontraktion für Beton bedeuten und überall da, wo das Material Eisen ist, die entsprechenden Konstanten für Eisen,

2. daß an der äußeren Oberfläche des Eisenbetonkörpers die Spannungen und Formänderungen so herauskommen, wie es den dort vorgeschriebenen Bedingungen entspricht, und

3. daß an allen Scheidewänden die Bedingungen (1) erfüllt sind.

Wenn man insbesondere nach Lage der Dinge annehmen darf, daß in allen Ebenen, die zu einer bestimmten Ebene parallel sind, gleiche oder doch merklich gleiche Verhältnisse herrschen, so vereinfacht sich unser räumliches Problem in ein ebenes mit nur fünf (statt neun) Unbekannten:

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy};\ u,\ v.$$

(indem man die *Z*-Achse senkrecht zu jenen Ebenen wählt). Die Scheidewandbedingungen (1) gehen dann in folgende über:

(1a)
$$u^{(b)} = u^{(e)},\quad v^{(b)} = v^{(e)}$$
$$\sigma_n^{(b)} = \sigma_n^{(e)},\quad \tau_1^{(b)} = \tau_1^{(e)},$$

während die Differentialgleichungen (2) sich wie folgt vereinfachen:

(2a)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \tau}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\[2mm] \sigma_x = \dfrac{m'E'}{(m'+1)(m'-2)}\left[(m'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right], \\[2mm] \sigma_y = \dfrac{m'E'}{(m'+1)(m'-2)}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + (m'-1)\dfrac{\partial v}{\partial y}\right], \\[2mm] \tau = \dfrac{m'E'}{2(m'+1)}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right]. \end{cases}$$

In dem Falle, daß es sich um Körper handelt, die nach einer Richtung unendlich schmal sind, wobei dann in dieser Richtung keine Kräfte wirken, vereinfacht sich das Problem natürlich in ganz ähnlicher Weise; wir gehen nicht näher darauf ein.

Die *Eindeutigkeit* der Lösung unseres Spannungsproblems folgt ganz ähnlich wie im Falle eines homogenen elastischen Körpers (aus einem einzigen Material). Dort nimmt man zwei verschiedene Lösungen als möglich an und bildet aus der Differenz beider ein über den ganzen Körper erstrecktes Raumintegral, welches infolge Bestehens der ersten

drei Gleichungen (2) identisch verschwindet. Nach den Greenschen Sätzen formt man dieses dann in der Weise um, daß man hat:

Identisch verschwindendes Raumintegral = Randintegral — positives Raumintegral.

Das Randintegral verschwindet, weil die oben erwähnte Differenz der beiden Lösungen auf dem Rande verschwindet; damit verschwindet auch das positive Raumintegral, und daraus wiederum ergibt sich leicht die tatsächliche Identität der beiden als verschieden betrachteten Lösungen. Versucht man nun hier dieselbe Schlußweise, indem man sie auf jeden einzelnen Beton- und Eisenbestandteil des Körpers anwendet, so bekommt man zunächst eine Anzahl von Gleichungen vonder Form:

Identisch verschwindendes Raumintegral = Randintegral (dies kann auch fehlen) + Scheidewandintegral — positives Raumintegral.

Die Randintegrale verschwinden wieder aus demselben Grunde wie oben, aber nicht so die Scheidewandintegrale. Summiert man aber alle Gleichungen, so heben sich die Scheidewandintegrale zu je zweien gegenseitig fort, weil an den Scheidewänden stetiger Übergang von Spannungskomponenten und Verrückungen statthat. Das Endergebnis ist also, daß eine Summe (mit gleichen Vorzeichen) von lauter positiven Raumintegralen verschwinden muß, mithin auch jedes einzelne dieser Integrale verschwindet. Von da an gelten dann wieder dieselben Schlüsse wie beim homogenen Körper.

b) Über die elastischen Konstanten des Eisenbetons.

Da wir in dieser Abhandlung zahlenmäßigen Ergebnissen zustreben, werden wir zu überlegen haben, bis zu welchem Grade dabei die Zahlenwerte der je zwei elastischen Konstanten der beiden Grundmaterialien Eisen und Beton eine Rolle spielen; denn, was beim elastischen Körper aus einem einzigen Material (unter sehr allgemeinen Bedingungen) zutrifft, nämlich, daß sie gar keine Rolle spielen, wird bei unserem inhomogenen Eisenbeton nicht der Fall sein.

Der sog. Elastizitätsmodul des Betons — den wir mit B bezeichnen wollen — kann nach zahlreichen Versuchen von Bach als eine bekannte, wenn auch nicht eben sehr konstante Größe angesehen werden; es ist etwa

$$B = 200\,000 \text{ bis } 300\,000 \frac{\text{kg}}{\text{qcm}},$$

während der entsprechende Modul für Eisen — wir bezeichnen ihn mit E — etwa gleich:

$$E = 2\,000\,000 \frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$$

gesetzt werden kann; das Verhältnis beider:

$$\frac{E}{B} = \omega$$

ist also ungefähr

$$\omega = 7 \text{ bis } 10;$$

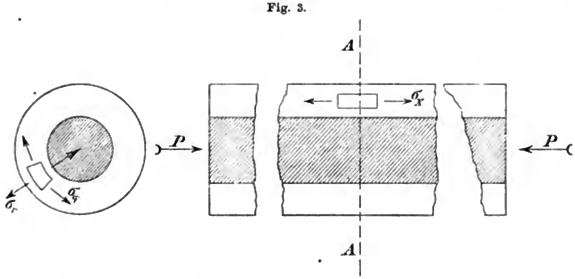
innerhalb dieses Intervalles wählen wir nachher den Wert von ω so, wie es für die jeweilige Rechnung bequem ist.

Sehr mißlich wäre es, wenn für unsere Rechnungen der genaue Wert der anderen Konstanten des Betons, nämlich des Verhältnisses zwischen Längsdehnung und Querkontraktion — m — ernstlich in Betracht käme. Denn einmal wäre diese Größe für Beton nur sehr unsicher zu ermitteln, anderseits ist es aber für die folgenden Rechnungen *wesentlich*, daß man tatsächlich, ohne die in Betracht kommenden Ergebnisse merklich zu ändern, die Konstante m beim Beton einfach gleich der entsprechenden Konstanten für Eisen setzen kann, einerlei, ob dies wirklich zutrifft oder nicht. Es hängt dies mit folgenden Tatsachen zusammen. Unsere Eisenbetonkörper sind *Balken*, d. h. nach *einer* Richtung im Vergleich zu allen anderen Richtungen besonders stark ausgedehnte Körper, die — wie es den in der Praxis vorkommenden Fällen entspricht — immer so beansprucht werden, daß die *gefährlichen* und deshalb hauptsächlich zu beachtenden Spannungen diejenigen Zugspannungen und Druckspannungen sind, welche in jener bevorzugten Richtung — also der Längsrichtung des Balkens — wirken, und welche man insgesamt unter dem gemeinsamen Namen „*Biegungsspannungen*“ zusammenzufassen pflegt (eine Benennung, welche davon herrührt, daß fast immer in Wirklichkeit die Formänderung des Balkens im wesentlichen eine Verbiegung ist). In der Tat kommen im Vergleich zu diesen Biegungsspannungen die in den Querrichtungen des Balkens wirkenden Zug- und Druckspannungen und ferner die Schubspannungen des Balkens nicht sehr in Betracht; die Biegungsspannungen aber sind nun von den speziellen Werten der Konstanten m beim Beton und beim Eisen nicht sehr abhängig, was durch die folgende Überlegung plausibel gemacht werden soll.

Wir betrachten (Fig. 3) einen langen Eisenbetonbalken, dessen Querschnitt aus einem kreisförmigen Eisenkern vom Halbmesser ϱ und einem Betonring von den Halbmessern ϱ und R besteht und auf deren Endfläche je ein Gesamtdruck P wirkt. Die Spannungen an einem Querschnitt AA der Figur werden dann — als in einiger Entfernung von den Balkenenden gelegen — nach einem schon von St. Venant

benutzten Prinzip[1]) von der Art und Weise, wie die Gesamtdrucke P auf die Endfläche verteilt sind, merklich unabhängig sein, so daß es nur darauf ankommt, irgend eine alle sonstigen Bedingungen der Aufgabe befriedigende Spannungsverteilung zu finden, welche auf den Endflächen *irgend eine* Druckverteilung mit der Resultierenden P liefert. Mit Einführung der Zylinderkoordinaten x, r, φ, der entsprechenden Verrückungen $u, v, (w = 0)$, der Zugspannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_r, \sigma_\varphi$

Fig. 3.



(Fig. 3) werden dann, wenn wir von vornherein annehmen, daß alle Schubspannungen verschwinden, folgende Differentialgleichungen zu befriedigen sein:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\sigma_x = \frac{m' E'}{(m'+1)(m'-2)}\left[(m'-1)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right],$$

$$\sigma_r = \frac{m' E'}{(m'+1)(m'-2)}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + (m'-1)\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right],$$

$$\sigma_\varphi = \frac{m' E'}{(m'+1)(m'-2)}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + (m'-1)\frac{v}{r}\right],$$

wobei natürlich in den letzten drei Gleichungen m' und E' beziehungsweise die elastischen Konstanten des Betons — sagen wir m und B — und die des Eisens — sagen wir n und E — bedeuten, je nachdem

1) S. z. B. A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität. Aut. deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. A. Timpe. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1907. Seite 155.

die betreffende Stelle x, r, φ im Beton oder im Eisen gelegen ist. Dazu kommen als Randbedingungen:

$$\sigma_r^{(b)} = 0 \quad \text{für} \quad r = R$$

$\int \sigma_x dF = - P$, wo dF ein Element der Endfläche des Balkens ist und als Bedingungen an der Scheidewand $r = \varrho$:

$$u^{(b)} = u^{(e)}, \quad v^{(b)} = v^{(e)}, \quad \sigma_r^{(b)} = \sigma_r^{(e)}.$$

Mit dem Ansatze:

$$u = bx, \quad v = dr + \frac{e}{r} \quad \text{im Beton,}$$

$$u = \beta x, \quad v = \delta r \qquad \text{im Eisen,}$$

wo b, d, e, β, δ beliebige Konstante sind, wird man, wie man leicht nachrechnet, allen Bedingungen des Problems gerecht. Die Schlußergebnisse, soweit sie für uns in Betracht kommen, sind folgende:

$$\sigma_x^{(b)} = X \cdot e, \quad \sigma_r^{(b)} = \frac{mB}{m+1} e\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right), \quad \sigma_\varphi^{(b)} = \frac{mB}{m+1} e\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$

wobei folgende Abkürzungen gelten:

$$e = \frac{P}{\pi[X(R^2 - \varrho^2) + Y\varrho^2]},$$

$$X = \frac{mB[(m-1)(m-2)n(m-n)E + R^2(n+1)(n-2)(m^2-m-2)H]}{R^2 E n(m-n)(m+1)(m-2)},$$

$$Y = \frac{nE[(n-1)(m-2)n(m-n)E + R^2(n+1)(n-2)(mn-m-2)H]}{R^2 E n(m-n)(n+1)(n-2)} + \\ + \frac{2nE}{(n+1)(n-2)\varrho^2},$$

$$H = \frac{mB}{m+1}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{\varrho^2}\right) - \frac{nE}{(n+1)(n-2)}\left(\frac{m-2}{R^2} + \frac{n}{\varrho^2}\right).$$

Hätten wir dagegen von vornherein $m = n$ gesetzt, so hätten wir bekommen:

$$\sigma_x^{(b)} = \frac{B}{B(R^2 - \varrho^2) + E\varrho^2} \cdot \frac{P}{\pi}, \quad \sigma_r^{(b)} = \sigma_\varphi^{(b)} = 0.$$

Das Verhältnis von Längsdehnung zu Querkontraktion liegt nun erfahrungsmäßig zwischen 3 und 4; demgemäß bilden wir uns folgende drei Fälle:

a) $m = 4, \quad n = 3$

b) $m = 3, \quad n = 4$

c) $m = n$ [Zahlenwert gleichgültig]

und finden, daß in allen drei Fällen übereinstimmend die Spannungen $\sigma_r^{(b)}$ und $\sigma_\varphi^{(b)}$ gegen $\sigma_x^{(b)}$ nicht in Betracht kommen und ferner, daß die

Spannungen $\sigma_x^{(b)}$ in allen drei Fällen noch in der zweiten Dezimale miteinander übereinstimmen. Es ist nämlich in allen drei Fällen:

$$\sigma_x^{(b)} = 0{,}08 \frac{P}{\pi \varrho^2}.$$

Selbst wenn nun auch die unbekannte Konstante m für Beton nicht in dem Intervalle 3 bis 4 gelegen wäre, sondern etwas kleiner als 3 oder etwas größer als 4 wäre, könnten nach Obigem hinsichtlich der in Betracht kommenden Spannungen $\sigma_x^{(b)}$ keine nennenswerten Unterschiede herauskommen. *Aus diesem Ergebnis schöpfen wir die Berechtigung, künftig die beiden Konstanten m und n für Eisen und Beton einander gleich zu setzen und ihnen im übrigen innerhalb des Intervalles 3 bis 4 denjenigen Wert zu erteilen, der für die Rechnung gerade bequem ist. Wir setzen also*:

$$3 \leqq m = n \leqq 4.$$

c) Über die Erkenntnis des Nutzens der Armierung des Betons mit Eisen.

Wie groß der Nutzen des Eisenbetons im Vergleich zum reinen Beton im einzelnen Falle ist, wird man erkennen, wenn man die Spannungsverteilung im Eisenbetonbalken mit derjenigen vergleicht, welche unter gleichen Umständen in einem reinen Betonbalken herrschen würde. Bei diesem Vergleich wird das Hauptaugenmerk darauf gerichtet sein müssen, daß dem Beton keine nennenswerten Zugspannungen zugemutet werden dürfen. Liefert also die Rechnung für den reinen Betonbalken irgendwo große Zugspannungen, so wird man in diesem Falle die Armierung des Betons mit Eisen dann als zweckmäßig anzusehen haben, wenn in dem Beton des armierten Balkens nirgendwo mehr beträchtliche Zugspannungen auftreten. In zweiter Linie und soweit es sich mit der eben erwähnten Bedingung verträgt, wird man dann noch wünschen, daß auch die Druckspannungen im Beton des armierten Balkens recht klein ausfallen möchten.

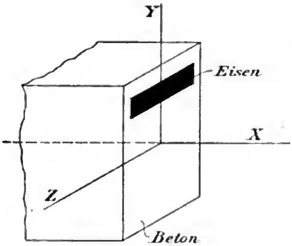
II. Zahlenmäßige Berechnung der Spannungsverteilung in bestimmten Fällen.

a) Rein auf Dehnung, Pressung oder Biegung beanspruchter Balken.

Es sei ein Eisenbetonbalken in Form eines Zylinders von horizontaler Achse und von einem Querschnitt mit vertikaler Symmetrieachse, der sonst beliebig ist, gegeben (Fig. 4); auch die Eisenverteilung des Querschnittes seien Zylinder von derselben Achse und Querschnitten

mit derselben Symmetrieachse wie oben. Die Achse des Zylinders, die etwa durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen möge, wählen wir zur X-Achse, die vertikale Symmetrieachse eines der Querschnitte zur Y-Achse und die zu beiden senkrechte Horizontale zur Z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystemes. Der reinen Dehnung (Pressung) unter dem Einflusse der Zugkraft P (bezw. der Druckkraft P) (Fig. 5 links) entsprechen dann an den beiden Endflächen des Balkens die Randbedingungen:

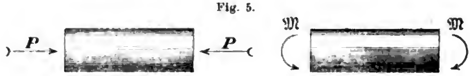
Fig. 4.



$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \int \sigma_x df_e + \int \sigma_x df_b &= \pm P, \\ \int y\sigma_x df_e + \int y\sigma_x df_b &= \mathfrak{M} \end{aligned}$$

mit $\mathfrak{M} = 0$ und ferner entsprechen dem Falle der reinen Biegung unter dem Einflusse der beiden Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ in Fig. 5 rechts eben dieselben Randbedingungen mit $P = 0$, wobei unter df_e und df_b beziehungsweise die unendlich kleinen Flächenelemente Eisen und Beton auf den beiden Endquerschnitten verstanden sind. Außer den

Fig. 5.



angeschriebenen sind an den Endflächen noch weitere Bedingungen zu erfüllen, die wir aber von vornherein fortlassen, da sie nachher von selbst durch unsere Ansätze befriedigt werden. Auf der äußeren Zylinderfläche müssen ferner die Schub- und Normalspannungen verschwinden und an den Scheidewänden die Bedingungen (1) von Seite 121 befriedigt sein, ebenso natürlich die elastischen Differentialgleichungen (2) von Seite 121. Alles das geschieht, wenn wir folgenden Ansatz wählen (auf den man leicht von der weiter unten folgenden einfachen Spannungsverteilung aus kommt):

$$\begin{aligned} u^{(e)} &= \frac{1}{E}(c_0 x + c_1 xy), \\ v^{(e)} &= -\frac{1}{mE}(c_0 y + \tfrac{1}{2} c_1 y^2) - \frac{c_1}{2E}\left(x^2 - \frac{z^2}{m}\right), \\ w^{(e)} &= -\frac{1}{mE}(c_0 z + c_1 yz) \end{aligned}$$

im Eisen,

$$u^{(b)} = \frac{1}{B}(k_0 x + k_1 xy),$$
$$v^{(b)} = -\frac{1}{mB}(k_0 y + \tfrac{1}{2}k_1 y^2) - \frac{k_1}{2B}\left(x^2 - \frac{z^2}{m}\right),$$
$$w^{(b)} = -\frac{1}{mB}(k_0 z + k_1 yz)$$

im Beton,

wo bereits $n = m$ gesetzt wurde. Dieser Ansatz befriedigt zunächst mit ganz beliebigen Konstanten $c_0 c_1 k_0 k_1$ die Differentialgleichungen (2), aber auch die Randbedingungen an der äußeren Zylinderfläche. Er liefert nämlich folgende Spannungsverteilung:

(4) $$\sigma_x^{(e)} = c_0 + c_1 y, \quad \sigma_x^{(b)} = k_0 + k_1 y,$$
$$\sigma_y^{(e)} = \sigma_z^{(e)} = \tau_{yz}^{(e)} = \tau_{zx}^{(e)} = \tau_{xy}^{(e)} = \sigma_y^{(b)} = \sigma_z^{(b)} = \tau_{yz}^{(b)} = \tau_{zx}^{(b)} = \tau_{xy}^{(b)} = 0.$$

Unter der *wesentlichen* Voraussetzung nun, daß man die Konstante m für beide Materialien gleichsetzen darf (was oben bereits geschehen ist), befriedigt man die Bedingungen an den Scheidewänden, soweit sie nicht schon von selbst befriedigt sind, indem man unsere vier willkürlichen Konstanten den beiden Bedingungen:

$$\frac{c_0}{k_0} = \frac{c_1}{k_1} = \frac{E}{B}$$

unterwirft. Man sieht weiterhin, daß für die Endflächen tatsächlich nur die Bedingungen (3) übrig bleiben, welche dann mit obigen beiden Bedingungen die vier Konstanten völlig bestimmen.

Seien nunmehr:

f_e und f_b die Flächen Eisen, bezw. Beton im Querschnitt des Zylinders $\left(\int df\right)$,

S_e „ S_b ihre statischen Momente in bezug auf die Z-Achse: $\left(\int y\,df\right)$,

J_e „ J_b ihre Trägheitsmomente „ „ „ „ „ $\left(\int y^2 df\right)$,

dann ergibt eine einfache Rechnung:

(5) $$k_0 = \pm \frac{\omega J_e + J_b}{\Delta} \cdot P - \frac{\omega S_e + S_b}{\Delta} \cdot \mathfrak{M},$$
$$k_1 = \mp \frac{\omega S_e + S_b}{\Delta} \cdot P - \frac{\omega f_e + f_b}{\Delta} \cdot \mathfrak{M}$$

mit:

$$\Delta = (\omega f_e + f_b)(\omega J_e + J_b) - (\omega S_e + S_b)^2.$$

Hieraus sind die Spannungen im Beton (und im Eisen) des Eisenbetons zu ermitteln. Auch die Spannungen in einem entsprechenden reinen Betonbalken können daraus leicht gefunden werden, indem man einfach $\omega = 1$ setzt.

Will man nun auf Grund unserer Formel in unserem Falle der reinen Pressung (Dehnung) oder Biegung den Nutzen der Armierung des Betons mit Eisen feststellen, indem man die Spannungen des Betons im Eisenbetonbalken mit denen des reinen Betonbalkens vergleicht, so darf man nicht vergessen, daß dieser Vergleich hinkt, weil die Art, wie der Punkt P, bezw. das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ auf die Endflächen verteilt ist, in beiden Fällen verschieden ist. Einen Sinn hat — gemäß dem bereits oben erwähnten St. Venantschen Prinzip — der Vergleich nur dann, wenn man ihn auf die mittleren Teile des Balkens, als von den Endflächen einigermaßen entfernte Teile, beschränkt.

Ist nun z. B. der Balkenquerschnitt nicht nur hinsichtlich der Y-Achse, sondern auch in bezug auf die Z-Achse symmetrisch, sodaß:

$$S_e = 0\,, \quad S_b = 0$$

wird, und liegt reine Pressung vor (ist also $\mathfrak{M} = 0$), so haben wir gemäß obigen Formeln (4) und (5) für den Beton des Eisenbetons:

$$\sigma_x = -\frac{P}{\omega f_e + f_b}$$

und für den des reinen Betons

$$\sigma_x = -\frac{P}{f_e + f_b}.$$

In unserm Falle der reinen Pressung (Dehnung) werden also durch die Armierung des Betons die Spannungen an den einzelnen Stellen im Verhältnis

$$\frac{f_e + f_b}{\omega f_e + f_b}$$

verkleinert, betragen also z. B. mit $f_e : f_b = 1:20$, $\omega = 10$ *nur noch etwa* $^2/_3$ *der Spannungen eines reinen Betonbalkens.* —

Wir wollen uns jetzt überzeugen, daß man nach den Formeln (4) und (5) die Armierung des Betons zweckmäßig in der *oberen* Hälfte des Balkens anbringt, falls der Balken nach Art der Fig. 5 rechts rein auf Biegung beansprucht werden soll ($P = 0$). Der Einfachheit halber sei auch jetzt wieder angenommen, der Balkenquerschnitt sei auch in bezug auf die Z-Achse symmetrisch (aber jetzt natürlich unter Vernachlässigung des Materialunterschiedes, denn die Eisenverteilung ist ja jetzt nach Voraussetzung unsymmetrisch); es ist dann also:

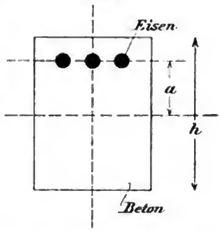
$$S_e + S_b = 0\,.$$

Die Spannung σ_x an irgend einer Stelle y des armierten Betons ist dann

$$\sigma_x = \frac{-(\omega - 1) S_e + (\omega f_e + f_b)\, y}{(\omega f_e + f_b)(\omega J_e + J_b) - (\omega - 1)^2 \cdot S_e^2} \cdot \mathfrak{M}\,.$$

Soll nun σ_x in der oberen Balkenhälfte, wo ja im reinen Betonbalken jedenfalls Zugspannungen herrschen, möglichst klein positiv oder, was noch besser ist, gar negativ werden, so muß nach dieser Formel jedenfalls S_e positiv sein, d. h. man hat die Armierung in der oberen Hälfte des Balkens und dort möglichst hoch anzubringen. *Bei einem Zahlenbeispiel an einem Balken von rechteckigem Querschnitt mit einer Armierung wie in Fig. 6 werden mit*

Fig. 6.



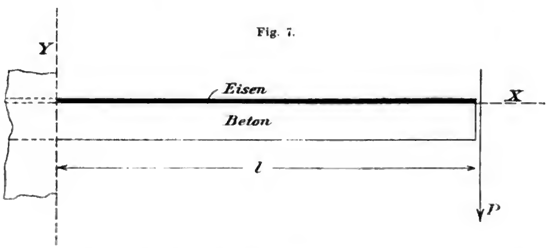
$$a = \tfrac{3}{8}h, \quad f_e = \tfrac{1}{30}bh, \quad \omega = 9$$

durch die Armierung die Spannungen an den gefährlichen Stellen (in der oberen Hälfte des Balkens) etwa auf $^3/_5$ derjenigen Werte heruntergedrückt, die sie in einem reinen Betonbalken haben würden.

b) An einem Ende eingespannter und am anderen transversal belasteter Balken.

Hier und im Folgenden überhaupt läßt sich unsere Spannungsaufgabe nicht mehr so allgemein lösen wie bisher. Wir sind darauf angewiesen, das *ebene* Problem zu behandeln und überdies beschränken

Fig. 7.



wir uns — dies freilich nur der Einfachheit halber — auf eine besonders einfache Art von Armierung; es soll nämlich nur eine einzige Scheidewand vorhanden sein (Fig. 7.). Den Durchschnitt dieser mit der Zeichenebene machen wir zur X-Achse, die Y-Achse gehe nach der Fig. 7 vertikal nach oben. Als Bedingungen der Einspannung des linken Balkenendes sehen wir die folgenden an:

$$u = 0, \; v = 0, \; \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, y = 0. \tag{6}$$

Daß wir hierbei gerade den Koordinatenanfangspunkt wählen, ist bequem aber willkürlich; nach dem mehrfach erwähnten St. Venantschen Prinzip aber wird für die Spannungsverteilung in einiger Entfernung vom eingespannten Ende die Wahl des Punktes, für welchen die Bedingungen (6) gelten sollen, merklich gleichgültig sein.

Der Balken habe die Länge l, die Höhen der Teilbalken aus Beton und Eisen seien K und C, sodaß die Gesamthöhe des Balkens $K+C$ ist. Am freien Ende wirke eine nach unten gerichtete Schubkraft P In einiger Entfernung vom freien Ende wird es nach dem St. Venantschen Prinzip für den Spannungszustand auf die Art dieser Verteilung nicht sehr ankommen. Die Längsflächen des Balkens seien gänzlich unbelastet. Die Scheidewandbedingungen lauten:

$$u^{(b)} = u^{(e)},\ v^{(b)} = v^{(e)},\ \sigma_y^{(b)} = \sigma_y^{(e)},\ \tau^{(b)} = \tau^{(e)} \quad \text{für} \quad y = 0.$$

Unter der wesentlichen Voraussetzung nun, daß man die Konstante m bei Eisen und Beton gleichsetzen darf, werden die Scheidewandbedingungen, alle Randbedingungen des Problems und die elastischen Differentialgleichungen (2a) durch folgenden Ansatz, wie man leicht nachrechnet[1]), befriedigt:

$$\frac{m^2}{m+1}\cdot E'u = 2(m-1)\left(lx - \tfrac{1}{2}x^2\right)(a_2 + 3a_3 y) + 2m a_1 y$$
$$+ (2m-1)(a_2 y^2 + a_3 y^3),$$
$$\frac{m^2}{m+1}\cdot E'v = -(l-x)(2a_2 y + 3a_3 y^2) - a_3(m-1)(3lx^2 - x^3);$$
$$\sigma_x = (l-x)(2a_2 + 6a_3 y),$$
$$\sigma_y = 0,$$
$$\tau = a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2;$$

worin die Konstanten

$$E',\ a_1,\ a_2,\ a_3$$

für Eisen und Beton beziehungsweise durch

$$E,\ c_1,\ c_2,\ c_3$$
$$B,\ k_1,\ k_2,\ k_3$$

1) Für Leser, welche mit der *Airyschen Spannungsfunktion* vertraut sind, sei die naturgemäße Herleitung dieses Ansatzes angedeutet: Besteht der Balken aus einem einzigen Material, so ist die Spannungsfunktion bekanntlich (s. z. B. F. Klein und K. Wieghardt: *Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme usw.* im Archiv der Math. u. Phys. III. Reihe VIII. 1. Heft) gleich dem Produkt aus $l-x$ und einem gewissen Polynom dritten Grades in y; auf unsern Ansatz kommt man nun, wenn man statt dieses Polynoms das *allgemeinste* Polynom dritten Grades in y wählt, was man tun darf, da die Differentialgleichung der Spannungsfunktion $\nabla\nabla F = 0$ befriedigt bleibt.

zu ersetzen sind und die neuen Konstanten c und k folgende Bedeutung haben:

$$c_1 = -\frac{6\omega KC(K+C)}{6\omega\, KC(K+C)^2 + 3(K^2-\omega C^2)^2 - 2(K+\omega C)(K^3+\omega C^3)} \cdot P$$

$$c_2 = -\frac{K^2-\omega C^2}{2KC(K+C)} \cdot c_1,$$

$$c_3 = -\frac{K+\omega C}{3KC(K+C)} \cdot c_1,$$

$$k_1 = c_1, \quad k_2 = \frac{c_2}{\omega}, \quad k_3 = \frac{c_3}{\omega}.$$

Besteht der ganze Balken aus Beton, so bekommt man dieselben Formeln mit $C = B$ oder $\omega = 1$; insbesondere wird

$$k_1 = c_1 = -\frac{6KC}{(K+C)^3} \cdot P, \quad k_2 = c_2 = -\frac{K-C}{2KC} k_1, \quad k_3 = c_3 = -\frac{1}{3KC} k_1.$$

Der Nutzen der Armierung des Betons läßt sich in unserm Falle erst nach Einführung zahlenmäßiger Werte gut übersehen. Mit

$$K = 9, \quad C = 1, \quad E : B = \omega = 9$$

bekommt man

1) für den Eisenbetonbalken:

$$\sigma_x^{(e)} = (l-x)[0{,}103 + 0{,}052\,y] \cdot P, \quad \tau^{(e)} = [-0{,}129 + 0{,}103\,y + 0{,}026\,y^2] \cdot P,$$

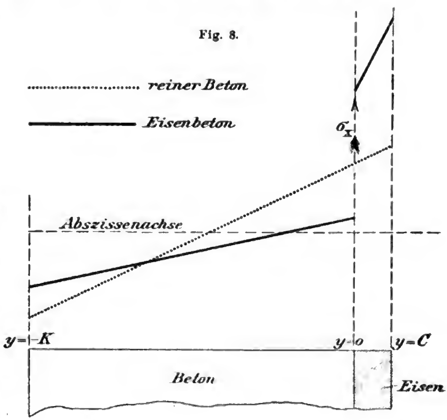
$$\sigma_x^{(b)} = (l-x)[0{,}011 + 0{,}006\,y] \cdot P, \quad \tau^{(b)} = [-0{,}129 + 0{,}011\,y + 0{,}003\,y^2] \cdot P,$$

2) für den reinen Betonbalken:

$$\sigma_x = (l-x)[0{,}048 + 0{,}012\,y] \cdot P, \quad \tau = [-0{,}054 + 0{,}048\,y + 0{,}006\,y^2] \cdot P.$$

Veranschaulicht man diese Ergebnisse in den beiden Figuren 8 und 9, so erkennt man zunächst an der Figur 8 deutlich, wie zweckmäßig die Armierung des Betons in unserm Falle ist:

Fig. 8.

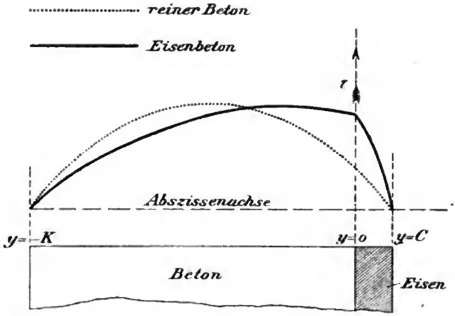


In unserm Falle des eingespannten Balkens mit transversaler Last am freien Ende ist die größte Zugspannung σ_x, die im Beton des armierten Balkens herrscht, etwa sechsmal so klein wie die größte Zugspannung des nicht

armierten Betonbalkens und nebenbei ist auch noch die größte Druckspannung kleiner als beim nicht armierten Balken.

Ein analoger Vergleich der Schubspannungen nach Fig 9 liefert nichts besonders Bemerkenswertes. Die beiden Flächen zwischen Schubspannungskurve und Abszissenachse sind natürlich gleich, da sie beide

Fig. 9.

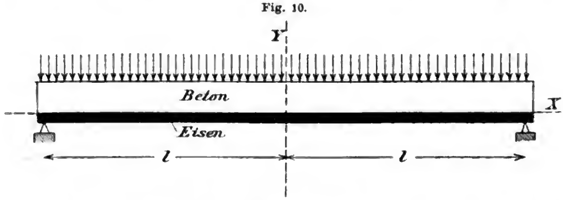


mit der Last P in derselben Weise proportional sind. Für die Scheidewand ($y = 0$) wird gemäß den Scheidewandbedingungen: $\tau^{(b)} = \tau^{(e)}$, aber nicht gleich Null, wie es bisher immer der Fall war.

c) Balken, dessen eine Längsfläche einem gleichmäßigen Normaldrucke ausgesetzt ist.

Der Balken von der Länge $2l$, der Höhe $K + C$, wo K und C die Teilhöhe des Beton- und Eisenbestandteiles bedeuten, sei längs

Fig. 10.



seiner oberen Grenzfläche pro Längeneinheit mit dem Drucke p belastet (Fig. 10). An den beiden Enden $x = \pm l$ sei der Balken irgendwie gestützt; auf die Art der Stützung kommt es nach dem St. Venantschen Prinzip für die Spannungsverteilung in einiger Entfernung von den Enden nur wenig an.

Die Untersuchung gestaltet sich hier ganz ähnlich wie beim eingespannten Balken unter b). Den Schnitt der Scheidewand mit der Zeichenebene machen wir zur X-Achse, die Symmetrieachse der Figur zur Y-Achse. Ein allgemeiner Ansatz, welcher zunächst die elastischen Differentialgleichungen (2a) befriedigt, ist der folgende[1]):

$$\frac{m^2}{m+1}\cdot E'u = (m-1)[(l^2x - \tfrac{1}{3}x^3)(2a_2 + 6a_3y) + x(2b_2 + 6b_3y + 4a_2y^2 + 4a_3y^3)] + 2x(a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3),$$

$$\frac{m^2}{m+1}\cdot E'v = -2(m-1)[a_0y + \tfrac{1}{2}a_1y^2 + \tfrac{1}{3}a_2y^3 + \tfrac{1}{4}a_3y^4] - (l^2 - x^2)(a_1 + 2a_2y + 3a_3y^2) - 2b_2y - 3b_3y^2 - \tfrac{4}{3}a_2y^3 - a_3y^4 + (m-1)[(2a_1 - 3b_3)(x^2 - l^2) - a_3(3l^2x^2 - \tfrac{1}{2}x^4) + \tfrac{5}{2}a_3l^4];$$

$$\sigma_x = (l^2 - x^2)(2a_2 + 6a_3y) + 2b_2 + 6b_3y + 4a_2y^2 + 4a_3y^3,$$

$$\sigma_y = -2(a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3),$$

$$\tau = 2x(a_1 + 2a_2y + 3a_3y^2).$$

Die noch willkürlichen Konstanten:

$$E'a_0a_1a_2a_3b_2b_3$$

sind für das Eisen mit:

$$Ec_0c_1c_2c_3c_2'c_3'$$

und für den Beton mit:

$$Bk_0k_1k_2k_3k_2'k_3'$$

zu vertauschen und die Konstanten $cc'kk'$ müssen dann so bestimmt werden, daß die Scheidewand- und Randbedingungen befriedigt sind. An der Scheidewand muß gelten:

$$u^{(b)} = u^{(e)},\ v^{(b)} = v^{(e)},\ \sigma_y^{(b)} = \sigma_y^{(e)},\ \tau^{(b)} = \tau^{(e)};$$

am Rande $y = -C$: $\tau = 0$, $\sigma_y = 0$,

am Rande $y = K$: $\tau = 0$, $\sigma_y = -p$.

1) Er wird ganz ähnlich gewonnen wie der Ansatz unter b). Nach Maxwell u. a. (siehe z. B. die in der Fußnote von Seite 132 zitierte Abhandlung) ist die Airysche Spannungsfunktion, welche unserm Problem für einen Balken aus einem einzigen Material entspricht, gleich

$$F(xy) = (l^2 - x^2)\,\mathfrak{P}_1(y) + \mathfrak{P}_2(y),$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gewisse Polynome in y sind. Man ersetze diese durch Polynome dritten und fünften Grades in y, welche so allgemein sind, daß eben noch die Differentialgleichung der Spannungsfunktion $\nabla\nabla F(xy) = 0$ befriedigt bleibt.

Als Bedingungen an den Rändern $x = \pm l$, die bis zu einem gewissen Grade willkürlich sind, wählen wir die, daß die resultierenden Normalkräfte und resultierenden Biegungsmomente verschwinden und daß die Punkte $x = \pm l$, $y = 0$ nur horizontale Verrückungen erleiden sollen. Hierzu kommt dann natürlich noch, daß die Schubkräfte an unsern Rändern $x = \pm l$ sich zusammen mit den Normaldrucken p ins Gleichgewicht setzen müssen. Insgesamt haben wir also:

$$\text{Für } x = \pm l: \left\{ \begin{array}{ll} \int\limits_{-C}^{K} \sigma_x dy = 0, & \int\limits_{-C}^{K} \tau dy = pl, \\ \int\limits_{-C}^{K} y \sigma_x dy = 0, & v = 0 \text{ für } y = 0. \end{array} \right.$$

Unter der wesentlichen Voraussetzung nun, daß man die elastische Konstante m bei Eisen und Beton gleichsetzen darf, lassen sich alle Konstanten aus diesen Bedingungen eindeutig berechnen. Die Ausrechnung ist aber ziemlich verwickelt und vereinfacht sich nur dann merklich, wenn man über das Verhältnis der Teilhöhen C und K eine bestimmte Annahme einführt, nämlich die Annahme:

$$\frac{K}{C} = \sqrt{\frac{E}{B}} = \sqrt{\omega}.$$

Setzen wir abkürzend

$$\varrho = \sqrt{\omega},$$

so ergeben sich unter dieser Annahme für die Konstanten folgende Werte:

$$k_0 = \frac{1}{2(1+\varrho)} \cdot p, \qquad c_0 = k_0,$$

$$k_1 = \frac{3}{4(1+\varrho)} \cdot \frac{p}{C}, \qquad c_1 = k_1,$$

$$k_2 = 0, \qquad c_2 = 0,$$

$$k_3 = -\frac{1}{4\varrho^2(1+\varrho)} \cdot \frac{p}{C^3}, \qquad c_3 = \varrho^2 \cdot k_3 = -\frac{1}{4(1+\varrho)} \cdot \frac{p}{C^3},$$

$$k_2' = \frac{17(1-\varrho)}{16\varrho(1+\varrho)} \cdot p, \qquad c_2' = \frac{\left(\frac{13}{4}\varrho - 1\right)(1-\varrho)}{4(1+\varrho)} \cdot p,$$

$$k_3' = \frac{\frac{1}{16}(1-\varrho+\varrho^2) - \frac{3}{4}(1-\varrho)}{\varrho^2(1+\varrho)} \cdot \frac{p}{C}, \qquad c_3' = \frac{\frac{1}{16}(1-\varrho+\varrho^2) - \frac{1}{8}(1-\varrho) + \frac{5}{8}\varrho(1-\varrho)}{1+\varrho} \cdot \frac{p}{C}.$$

Weiterhin setzen wir nun:

$$\omega = 9, \quad C = 1 \text{ (also } K = 3\text{)};$$

alsdann bekommen wir für unsern Eisenbetonbalken folgende Biegungsspannungen heraus:

$$\sigma_x^{(b)} = -\left[\tfrac{1}{24}(l^2 - x^2)y + \tfrac{17}{48} - \tfrac{11}{30}y + \tfrac{1}{36}y^3\right] \cdot p,$$

$$\sigma_x^{(e)} = -\left[\tfrac{3}{8}(l^2 - x^2)y + \tfrac{35}{16} + \tfrac{21}{5}y + \tfrac{1}{4}y^3\right] \cdot p,$$

während sich für den reinen Betonbalken ($\omega = 1$) ergibt:

$$\sigma_x = \left[\tfrac{3}{32}(l^2 - x^2)(1 - y) - \tfrac{7}{80} - \tfrac{3}{80}y + \tfrac{3}{16}y^2 - \tfrac{1}{16}y^3\right] \cdot p.$$

Ist der Balken sehr lang und beschränken wir die Betrachtung auf die Balkenteile in der Nähe seiner Symmetrieachse ($x = 0$) — was zum Zwecke der Anwendung des St. Venantschen Prinzips ohnehin geboten ist — so kann man obige Gleichungen mit großer Annäherung durch folgende ersetzen:

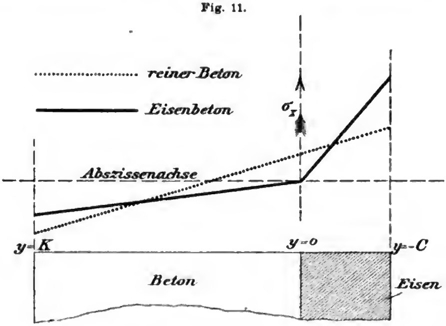
$$\sigma_x^{(b)} = -\tfrac{1}{24}(l^2 - x^2) \cdot y,$$

$$\sigma_x^{(e)} = -\tfrac{3}{8}(l^2 - x^2) \cdot y,$$

$$\sigma_x = \tfrac{3}{32}(l^2 - x^2)(1 - y).$$

Was diese Gleichungen aussagen, zeigt sich am deutlichsten bei graphischer Darstellung (Fig. 11). Vergleicht man diese Figur mit der

Fig. 11.



für den eingespannten Balken geltenden Fig. 8, so sieht man deutlich, daß die Zweckmäßigkeit der Armierung des Betons im vorliegenden Falle genau so zu beurteilen ist, wie beim eingespannten Balken unter b):

Die Zugspannungen des Betons werden außerordentlich verkleinert (in unserem speziellen Zahlenbeispiel werden sie sogar Null); die Druckspannungen fallen ebenfalls etwas kleiner aus als beim nichtarmierten Balken. —

Untersuchungen zur Statik des Stabpolygons, insbesondere die Gestaltbestimmung betreffend.

Von ALFRED JATHO, Oberlehrer an der Germaniaschule zu Buenos-Aires.

Einleitung.

Schon Varignon hat in seinem für die geometrische Statik grundlegenden Werke, der im Jahre 1725 erschienenen Mécanique Nouvelle, die Bedingungen dargelegt, unter denen sich die in den Ecken eines Seilpolygons angreifenden äußeren Kräfte das Gleichgewicht halten. Das Hauptergebnis seiner Untersuchung besteht in der Konstruktion des Kräftepolygons und in der Herleitung der Beziehungen, welche dieses mit dem Seilpolygon verbinden. Die sich naturgemäß darbietende Frage, welche *Gestalt* das Seilpolygon annimmt, wenn die in seinen Ecken angreifenden Kräfte nach Größe und Richtung gegeben sind, hat Varignon dagegen ganz unberührt gelassen. Bei der Gründlichkeit, mit welcher die Eigenschaften des Seilpolygons in der Mécanique Nouvelle diskutiert werden, wird man zwar kaum annehmen dürfen, daß das Problem der Gestaltbestimmung von Varignon unbeachtet geblieben ist. Aber er mochte wohl erkennen, daß eine strenge Lösung durch elementare Konstruktionen im Sinne der Euklidischen Geometrie nicht möglich ist.

Als es dann durch die Ausbildung der analytischen Mechanik möglich geworden war, die Untersuchung eines jeden mechanischen Problems auf die Lösung eines Systems von Gleichungen zurückzuführen, wurde das Seilpolygon wieder in den Kreis der Betrachtung gezogen und von verschiedenen Mathematikern im Vertrauen auf die durchgreifende Kraft der Analysis auch die Bestimmung seiner Gestalt in Angriff genommen. Ihre Bemühungen sollten nicht ganz vergeblich sein, insofern es gelang[1]), durch den Übergang zur oberen Grenze eine neue Ableitung für die Gleichung der Kettenlinie zu gewinnen. Aber die ursprüngliche Aufgabe, die Gestalt des Seilpolygons zu ermitteln, blieb auch jetzt ungelöst. Ja schon bei dem Versuche, für die einfachsten Fälle die Ansatzgleichungen aufzulösen, stieß man[2]) auf so außerordentliche Schwierigkeiten, daß es verlorene Mühe zu sein schien, sich mit der Lösung des allgemeinen Falles zu befassen. Jedenfalls mußte man es für ausgeschlossen ansehen, daß sich eine auf endliche mathematische Operationen be-

1) Vgl. Broch, Lehrbuch der Mechanik, 1854, Kap. IV.

2) Vgl. Decher, Handbuch der rationellen Mechanik, 1860, 3. Bd., § 48.

schränkende Lösung finden lasse. Daher wurde die Aufgabe als nicht recht diskutabel wieder beiseite gestellt. Es waren eben nicht praktische Bedürfnisse gewesen, welche auf sie geführt hatten und die eine Lösung mit einem gewissen Zwange forderten; sie hatte sich vielmehr den Blicken des Theoretikers als interessantes Übungsbeispiel für die Anwendung der Prinzipien der Mechanik dargeboten, als solches sich aber infolge der auftretenden analytischen Schwierigkeiten als wenig tauglich erwiesen.

In unseren Tagen hat jedoch das Problem des Seilpolygons eine ganz andere Bedeutung gewonnen; das Seilpolygon steht in seiner Verbindung mit dem Kräftepolygon im Mittelpunkt der graphischen Statik und besitzt nicht länger bloß eine theoretische Bedeutung, sondern ist für den Konstrukteur eins der wichtigsten mathematischen Hilfsmittel geworden. Wenn wir daher in der vorliegenden Arbeit von neuem an die Aufgabe der Gestaltsbestimmung herangetreten sind, so war in erster Linie den Anforderungen des Praktikers Rechnung zu tragen, es mußte für uns also das Bestreben leitend sein, nach einer solchen Lösung zu suchen, die nicht nur allgemein, sondern vor allem auch so einfach ist, daß sich ihre Durchführung in konkreten Fällen verlohnt. Und eine nach dieser Seite billigen Ansprüchen genügende Lösung hoffe ich durch die im nachfolgenden geschilderte Lösung zu geben. Außer diesem praktischen Ergebnis, daß auch die verwickelsten Aufgaben über das Seilpolygon auf einem verhältnismäßig mühelosen Wege zugänglich werden, glaube ich aber auch einige allgemeine Sätze der graphischen Statik vorlegen zu können, die von Interesse sein dürften.

Der allgemeinen Orientierung halber sei der Gedankengang der später in ihren Einzelheiten zu entwickelnden Lösung bereits an dieser Stelle kurz dargelegt. Die Lösung ist eine *Näherungslösung*; eine solche konnte ja allein in Frage kommen, wenn wie in unserem Falle die strengen Methoden versagen. Zunächst wird mit Benutzung der Beziehungen zwischen dem Seil- und dem Kräftepolygon zeichnerisch ein Gebiet bestimmt, welches die gesuchten Wurzeln enthalten muß. Die genauere Lage der Wurzeln wird dann weiter durch eine einfache Interpolation zu den Grenzen dieses Gebietes in Beziehung gesetzt. Um die so durch die Zeichnung gefundenen Näherungswerte auch rechnerisch zu verschärfen, werden hierauf die in der Zeichnung ausgeführten Konstruktionen in die Sprache der Algebra übertragen und die sich jetzt noch ergebenden Abweichungen der Lösungswerte zum Ausgange einer sich auf den Taylorschen Lehrsatz stützenden Korrekturrechnung gemacht.

Da die benutzte Methode sich auf die Lösung der Aufgaben über die Gestalt des Seilpolygons mit so großem Vorteil anwenden ließ, so

schien es angezeigt, sie auch auf die Behandlung von anderen das Seilpolygon betreffenden Aufgaben zu übertragen und dadurch auf der gleichen Grundlage eine möglichst erschöpfende Darstellung der Statik des Seilpolygons aufzubauen. Entsprechend dieser Erweiterung des Themas zerfällt unsere Arbeit in mehrere Hauptabschnitte. In dem ersten dieser Teile wird zunächst gezeigt, wie sich die Gestalt eines unter dem Einfluß äußerer Kräfte stehenden Seilpolygons oder allgemeiner eines Stabpolygons von beliebiger Gliederzahl ermitteln läßt, falls die Endpunkte des Polygons festgehalten werden. Hieran wird weiter die Lösung einer geometrischen Aufgabe der Maxima- und Minimarechnung angeschlossen, deren algebraische Behandlung ganz analoge Schwierigkeiten wie das Problem des beweglichen Stabpolygons verursacht. Den Beschluß des ersten Teiles bildet die Untersuchung des allgemeineren Falles, daß auch die Endpunkte des Stabpolygones als beweglich angesehen werden.

In dem zweiten Teile werden wir umgekehrt voraussetzen, daß die Gestalt des Polygons gegeben ist, und die Frage erörtern, wie über die in den Ecken des Polygons angreifenden Kräfte zu verfügen ist, damit sie sich im Gleichgewichte halten.

In dem dritten Teile werden wir aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichungen des Gleichgewichtes der beweglichen Stabkette ableiten und den Grad feststellen, welchen die aus ihnen folgende Elimintionsgleichung annehmen müßte, falls es möglich wäre, die verschiedenen Gleichungen des Gleichgewichtes in nur eine Gleichung mit einer Unbekannten zusammenzufassen.

In einem Anhange ist schließlich der Versuch gemacht, für die Näherungslösung, die wir für das Problem der beweglichen Stabkette entwickeln werden, auch die Fehlergrenzen zu bestimmen.

Sämtliche Untersuchungen beschränken sich auf den Fall der Ebene

Erster Teil.

Aufgabe 1.

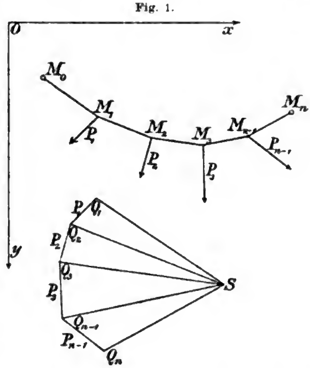
Es sind n in derselben Ebene gelegene, gewichtslose Stäbe von den Längen $M_0 M_1 = r_1$, $M_1 M_2 = r_2$, ... $M_{n-1} M_n = r_n$ durch Scharniere zu der Stabkette $M_0 M_1 M_2 \ldots . M_n$ aneinandergefügt (Fig. 1). In den Gelenkpunkten M_1, M_2, ... M_{n-1} greifen $n-1$ in der Ebene der Stabkette gelegene Kräfte an, von denen sowohl ihre Größe P_1, P_2, ... P_{n-1} wie ihre Richtungswinkel β_1, β_2, ... β_{n-1} gegen eine feste Achse, die x-Achse, bekannt sind. Man soll die Gleichgewichtslage bestimmen, in welche die Stabkette sich unter dem Einfluß der gegebenen Kräfte ein-

stellt, falls sie sich reibungslos um ihre Endpunkte M_0 und M_n, die als fest angesehen werden, drehen kann.

A. Graphostatische Lösung.

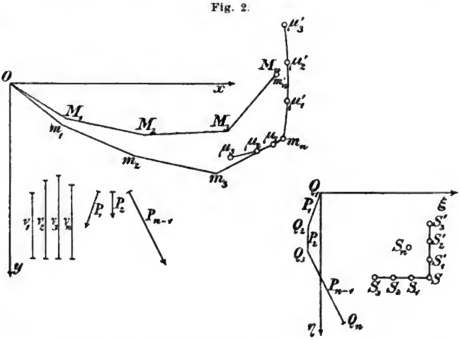
Wir benützen den folgenden, von Varignon aufgestellten Satz: Die Stabkette $M_0 M_1 M_2 \ldots . M_n$ (Fig. 1) mit den festen Endpunkten M_0 und M_n befinde sich unter dem Einflusse der Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ im Gleichgewichte und man habe das Kräftepolygon $Q_1, Q_2, \ldots . Q_n$ konstruiert, indem man die Strecken $Q_1 Q_2, Q_2 Q_3, \ldots . Q_{n-1} Q_n$ parallel und gleich den Kräften $P_1, P_2, \ldots . P_{n-1}$ zeichnet. Ferner seien durch die Ecken des Kräftepolygons $Q_1, Q_2, \ldots . Q_n$ Parallelen zu den Stabrichtungen $M_0 M_1, M_1 M_2, \ldots M_{n-1} M_n$ gezogen. Dann besteht die Bedingung des Gleichgewichts darin, daß sich diese Parallelen in einem Punkte S, dem Pole des Kräftepolygons, schneiden.

Fig. 1.



Um diesen Satz auf unsere Aufgabe anzuwenden, legen wir (Fig. 2) die Kräfte $P_1, P_2, \ldots . P_{n-1}$ nach Größe und Richtung zu dem Linienzuge $Q_1 Q_2 \ldots . Q_n$ aneinander. Dann wird jeder Lage des Poles S ein bestimmter Verlauf $m_0 m_1 \ldots m_n$ der Stabkette als Gleichgewichtsfigur entsprechen. Ist die Lage des Poles S gegeben, so erhalten wir den zugehörigen Linienzug $m_0 m_1 \ldots . m_n$, indem wir, was uns frei steht, den ersten Endpunkt, m_0 in den festen Punkt M_0 legen und die Strecke $m_0 m_1$ parallel zu dem (in der Figur nicht gezeichneten) Polstrahl $Q_1 S$

Fig. 2.



ziehen und der Länge nach gleich r_1 machen, dann weiter $m_1 m_2$ parallel zu dem Polstrahl $Q_2 S$ ziehen und der Länge nach gleich r_2 machen. So fortfahrend bekommen wir schließlich den zweiten Endpunkt m_n. Wir können auf diese Weise zu jeder Lage des Poles S den Verlauf der entsprechenden Stabkette konstruieren, und unsere Aufgabe läuft offenbar darauf hinaus, dem Pole S eine solche Lage zu erteilen, daß der Endpunkt m_n in den gegebenen zweiten festen Punkt M_n fällt. Um dieses zu erreichen, bedienen wir uns des folgenden graphischen Interpolationsverfahrens. Wir wählen die Lage des Poles von vornherein so, daß dem Augenschein nach der Endpunkt m_n in die Nähe des Punktes M_n fallen muß. Bei der Lage des Poles, die wir in unserer Figur gewählt haben, ergibt sich durch die Ausführung der angegebenen Konstruktion, daß der Endpunkt m_n zu tief nach rechts fällt. Es folgt daraus, daß der gesuchte Pol mehr nach links oben liegen muß. Wollen wir nun die richtige Lage des Poles ermitteln, so müssen wir uns darüber Aufschluß verschaffen, in welcher Weise sich die Lage des Endpunktes m_n ändert, wenn das Änderungsgesetz für den Pol S bekannt ist. Zunächst ist es klar, daß, falls sich der Pol längs einer Kurve bewegt, auch der Endpunkt m_n eine Kurve beschreiben muß. Für diese Kurve, längs deren sich der Pol bewegen möge, wählen wir als einfachsten Fall ein Paar Geraden, die wir durch die anfangs angenommene Lage des Poles S parallel zu der x-Achse, bzw. senkrecht dazu ziehen. Mit Hilfe der dargelegten Konstruktion bestimmen wir dann die Lagen μ_1, μ_2, μ_3 bzw. μ_1', μ_2', μ_3' des Endpunktes der Stabkette, welche den Lagen S_1, S_2, S_3, bzw. S_1', S_2', S_3' des Poles auf diesen beiden Geraden entsprechen. Ziehen wir jetzt noch die Kurven $m_n \mu_1 \mu_2 \mu_3$ und $m_n \mu_1' \mu_2' \mu_3'$, so können wir dieselben als die Bezugslinien eines Koordinatensystems für den festen Punkt M_n auffassen. Die Koordinaten μ_n, μ_n' des Punktes M_n in bezug auf dieses System erhalten wir näherungsweise, wenn wir durch M_n ein Paar Kurven ziehen, die zu den Bezugslinien gleichlaufend sind. Da ferner durch unsere Figur graphisch der Zusammenhang zwischen dem Gebiet des Endpunktes der Stabkette und dem Gebiet des Poles dargestellt ist, so können wir durch eine naheliegende Reduktion aus den für μ_n und μ_n' gefundenen Werten auch annähernd die gesuchte Lage S_n des Poles des Kräftepolygons bestimmen und erhalten damit zeichnerisch eine Lösung der gestellten Aufgabe.

Was die praktische Ausführung der geschilderten Polbestimmung betrifft, so empfiehlt es sich, durch einige Vorkonstruktionen zunächst eine möglichst passende Lage des Poles S zu ermitteln, derart, daß der Punkt m_n möglichst nahe an den Punkt M_n zu liegen kommt. Denn

offenbar wird man für die Koordinaten μ_n und μ'_n um so genauere Werte erhalten, je kleiner das Interpolationsgebiet ist.

B. Die numerische Korrektur des graphisch ermittelten Poles.

In dem vorigen Abschnitte ist gezeigt worden, wie man graphisch die Lage des Poles so genau bestimmen kann, als es die Zeichnung zuläßt. Das so gewonnene Resultat soll nun als Ausgangspunkt einer numerischen Korrektur benützt werden, welche es gestatten wird, unsere Aufgabe mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit zu lösen.

Wir beziehen hierzu die Stabkette auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, dessen Anfangspunkt wir in den Endpunkt M_0 der Stabkette legen. Den Neigungswinkel des Stabes $M_{\nu-1}M_\nu = r_\nu$ gegen die positive x-Achse bezeichnen wir mit α_ν und denjenigen der Kraft P_ν, wie bereits oben angegeben ist, mit β_ν. Ebenso beziehen wir das Kräftepolygon $Q_1 Q_2 \ldots . Q_n$ auf ein Paar Achsen ξ, η, das wir durch den Punkt Q_1 parallel zu den Achsen x, y ziehen. Sind demnach ξ_1, η_1; ξ_2, η_2 usw. bzw. die Koordinaten der Ecken Q_1, Q_2 usw., so finden wir zunächst

(1)
$$\begin{aligned}
\xi_1 &= P_1 \cdot \cos\beta_1;\\
\xi_2 &= P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2;\\
\xi_3 &= P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_1 &= P_1 \cdot \sin\beta_1;\\
\eta_2 &= P_1 \cdot \sin\beta_1 + P_2 \cdot \sin\beta_2;\\
\eta_3 &= P_1 \cdot \sin\beta_1 + P_2 \cdot \sin\beta_2 + P_3 \cdot \sin\beta_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ferner ist, falls die Koordinaten des graphisch gefundenen Poles ξ und η sind,

(2)
$$\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}},\\
\cos\alpha_3 &= \frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2}}, \;\ldots .\\
\sin\alpha_1 &= \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{\eta-\eta_1}{\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}},\\
\sin\alpha_3 &= \frac{\eta-\eta_2}{\sqrt{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2}}, \;\ldots .
\end{aligned}$$

Bedeuten nun x'_n, y'_n die Koordinaten des Punktes m'_n, der dem graphisch gefundenen Pole entspricht, so ist weiter

$$x'_n = r_1 \cdot \cos\alpha_1 + r_2 \cdot \cos\alpha_2 + \ldots . r_n \cdot \cos\alpha_n, \tag{3}$$

$$y'_n = r_1 \cdot \sin\alpha_1 + r_2 \cdot \sin\alpha_2 + \ldots . r_n \cdot \sin\alpha_n.$$

In diesen Ausdrücken setzen wir für $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, ...; $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, ... die Werte (2) ein. Dann folgt:

$$x'_n = r_1 \cdot \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + r_2 \cdot \frac{\xi - \xi_1}{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}} + r_3 \cdot \frac{\xi - \xi_2}{\sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}} \tag{4}$$

$$+ \ldots . + r_n \cdot \frac{\xi - \xi_{n-1}}{\sqrt{(\xi - \xi_{n-1})^2 + (\eta - \eta_{n-1})^2}},$$

$$y'_n + r_1 \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + r_2 \cdot \frac{\eta - \eta_1}{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}} + r_3 \cdot \frac{\eta - \eta_2}{\sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}}$$

$$+ \ldots . + r_n \cdot \frac{\eta - \eta_{n-1}}{\sqrt{(\xi - \xi_{n-1})^2 + (\eta - \eta_{n-1})^2}}.$$

Wären nun ξ und η die Koordinaten des wahren Pols, d. h. desjenigen, durch den die Lösung der Aufgabe bestimmt wird, so müßten die Werte für x'_n und y'_n, die wir aus den Formeln (4) auf Grund dieser Werte von ξ und η finden, mit den bekannten Werten x_n und y_n der Koordinaten des festen Punktes M_n zusammenfallen. Da dieses im allgemeinen nur näherungsweise stattfinden wird, so besteht die auszuführende Korrekturrechnung offenbar darin, den Koordinaten ξ, η solche Inkremente zu erteilen, daß die mit Hilfe der Formeln (4) zu berechnenden Werte x'_n, y'_n gleich x_n, y_n werden. Bezeichnen wie diese Inkremente mit $d\xi$, $d\eta$ und führen wir weiter für die rechten Seiten der Formeln (4) die Abkürzungen $f_a(\xi, \eta)$ und $f_b(\xi, \eta)$ ein, so muß demnach sein

$$x_n = x'_n + dx'_n = f_a(\xi + d\xi,\ \eta + d\eta),$$

$$y_n = y'_n + dy'_n = f_b(\xi + d\xi,\ \eta + d\eta).$$

Aus diesen Beziehungen folgt aber, wenn wir $f_a(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$ und $f_b(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$ nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickeln und uns dabei auf die linearen Glieder beschränken:

$$dx'_n = \frac{\partial f_a}{\partial \xi} \cdot d\xi + \frac{\partial f_a}{\partial \eta} \cdot d\eta,$$

$$dy'_n = \frac{\partial f_b}{\partial \xi} \cdot d\xi + \frac{\partial f_b}{\partial \eta} \cdot d\eta.$$

Es ist aber, wie man durch Differenziieren findet,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\xi-\xi_\nu}{\sqrt{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2}}\right]=\frac{(\eta-\eta_\nu)^2}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\xi-\xi_\nu}{\sqrt{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2}}\right]=-\frac{(\xi-\xi_\nu)(\eta-\eta_\nu)}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\eta-\eta_\nu}{\sqrt{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2}}\right]=-\frac{(\xi-\xi_\nu)(\eta-\eta_\nu)}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\eta-\eta_\nu}{\sqrt{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2}}\right]=\frac{(\xi-\xi_\nu)^2}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad dx_n' = &\left[r_1\cdot\frac{\eta^2}{\{\xi^2+\eta^2\}^{\frac{3}{2}}}+r_2\cdot\frac{(\eta-\eta_1)^2}{\{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right.\\
&\left.+\ldots.\, r_n\cdot\frac{(\eta-\eta_{n-1})^2}{\{(\xi-\xi_{n-1})^2+(\eta-\eta_{n-1})^2\}^{\frac{3}{2}}}\right]\cdot d\xi\\
&-\left[r_1\cdot\frac{\xi\cdot\eta}{\{\xi^2+\eta^2\}^{\frac{3}{2}}}+r_2\cdot\frac{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}{\{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right.\\
&\left.+\ldots.\, r_n\cdot\frac{(\xi-\xi_{n-1})(\eta-\eta_{n-1})}{\{(\xi-\xi_{n-1})^2+(\eta-\eta_{n-1})^2\}^{\frac{3}{2}}}\right]\cdot d\eta,\\
dy_n' = -&\left[r_1\cdot\frac{\xi\cdot\eta}{\{\xi^2+\eta^2\}^{\frac{3}{2}}}+r_2\cdot\frac{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}{\{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right.\\
&\left.+\ldots.\, r_n\cdot\frac{(\xi-\xi_{n-1})(\eta-\eta_{n-1})}{\{(\xi-\xi_{n-1})^2+(\eta-\eta_{n-1})^2\}^{\frac{3}{2}}}\right]\cdot d\xi\\
&+\left[r_1\cdot\frac{\xi^2}{\{\xi^2+\eta^2\}^{\frac{3}{2}}}+r_2\cdot\frac{(\xi-\xi_1)^2}{\{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right.\\
&\left.+\ldots.\, r_n\cdot\frac{(\xi-\xi_{n-1})}{\{(\xi-\xi_{n-1})+(\eta-\eta_{n-1})^2\}^{\frac{3}{2}}}\right]\cdot d\eta.
\end{aligned}
$$

Wir können jetzt in den beiden letzten Formeln die Faktoren von $d\xi$ und $d\eta$ berechnen, da in ihnen nur bekannte Größen vorkommen. Nachdem dieses geschehen ist, bilden wir die Differenzen

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad x_n - x_n' &= dx_n',\\
y_n - y_n' &= dy_n'.
\end{aligned}
$$

Sind so auch die Größen dx_n', dy_n' gefunden, so erhalten wir die gesuchten Inkremente $d\xi$, $d\eta$, indem wir die Gleichungen (5) nach $d\xi$ und $d\eta$ als Unbekannten auflösen. Dann sind, soweit die Be-

schränkung auf lineare Glieder bei der Entwicklung nach dem Taylorschen Lehrsatze zulässig war, die Koordinaten des wahren Poles

$$\xi_c = \xi + d\xi, \; \eta_c = \eta + d\eta.$$

Wir wollen aus den Gleichungen (5) noch einige Folgerungen ableiten, die wir am Schlusse dieser Arbeit zur Bestimmung der Fehlergrenzen benützen werden und deren man sich auch mit Vorteil zur Berechnung der Faktoren von $d\xi$ und $d\eta$ in den Gleichungen (5) bedienen kann.

Dazu führen wir für die als Konstanten anzusehenden Faktoren von $d\xi$ und $d\eta$ die Abkürzungen ein

$$\frac{\partial f_a}{\partial \xi} = a_1, \; \frac{\partial f_a}{\partial \eta} = a_2; \quad \frac{\partial f_b}{\partial \xi} = b_1, \; \frac{\partial f_b}{\partial \eta} = b_2,$$

wodurch die Gleichungen (5) übergehen in

$$(7) \qquad \begin{aligned} dx'_n &= a_1 \cdot d\xi + a_2 \cdot d\eta, \\ dy'_n &= b_1 \cdot d\xi + b_2 \cdot d\eta. \end{aligned}$$

Nun ist aber, wie aus den Ausdrücken für a_1, a_2; b_1, b_2 in den Gleichungen (5) hervorgeht,

$$(8) \qquad b_1 = a_2,$$

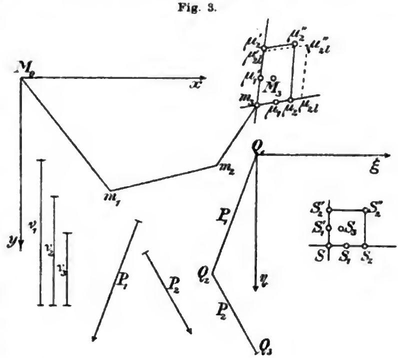
und weiter

$$(9) \qquad a_1 + b_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu}{\varrho_\nu},$$

wo ϱ_ν die Länge des Polstrahles von dem graphisch ermittelten Pole S_n nach der Ecke Q_ν des Kräftepolygons bedeutet. Um die beiden noch fehlenden Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten a_1 bis b_2 zu erhalten, denken wir uns durch den Pol S_n (in Fig. 3 S_3) parallel zu den Koordinatenachsen ξ und η ein Paar Geraden gezogen, die wir als Träger der Variabeln $d\xi$ und $d\eta$ auffassen, und ferner in dem Plane des Seilpolygons für die Nachbarschaft des dem Pole S_n entsprechenden Punktes M'_n die jene Geraden abbildenden Kurvenäste $M'_n\mu_n$ und $M'_n\mu'_n$ konstruiert. Diese Kurvenäste erhalten wir im allgemeinen mit hinreichender Genauigkeit, indem wir einfach durch den Punkt M'_n ein Paar Linien ziehen, die mit den Kurven $m_n\mu_1 \ldots \mu_3$ und $m_n\mu'_1 \ldots \mu'_3$ gleichlaufend sind. Wünscht man ihren Lauf mit größerer Genauigkeit festzustellen, so empfiehlt es sich, wie es in Fig. 3 geschehen ist, noch den Punkt μ''_2 zu konstruieren, welcher dem vierten Eckpunkt S''_2 des Rechtecks $S_2SS'_2S''_2$ zugeordnet ist. Dann braucht man den Punkt μ''_2 nur noch mit den Punkten μ_2 und μ'_2 durch ein Paar Linien zu ver-

binden, welche den gegenüberliegenden Kurvenabschnitten $\mu_2 m_n$ und $\mu_2' m_n$ bezw. ähnlich sind, um zwischen den Seiten des dadurch entstehenden Kurvenvierecks die gesuchten Kurvenäste hinlänglich genau einzeichnen zu können. Die Neigungswinkel dieser Kurvenäste können wir nun leicht zu den Gleichungen (7) in Beziehung bringen. Denn setzen wir in den Gleichungen (7) $d\eta$ gleich Null und variieren $d\xi$, mit dem Werte Null beginnend, so stellen die aus den Gleichungen (7) folgenden zusammengehörigen Werte von dx_n' und dy_n' offenbar die laufenden Koordinaten der Tangente t im Punkte M_n' an den Kurvenast $M_n' \mu_n$ dar. Es ist mithin

Fig. 3.



$$(10)\quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{d y_n'}{d x_n'} = \operatorname{tg}(dx_n', t).$$

Entsprechend finden wir, indem wir $d\xi = 0$ setzen,

$$(11)\quad \frac{b_2}{a_2} = \frac{d y_n'}{d x_n'} = \operatorname{tg}(dx_n', t'),$$

wo mit t' die Tangente im Punkte m_n' an den Kurvenast $M_n' \mu_n'$ bezeichnet ist. Da wir nun die Größen der Polstrahlen ϱ_ν und der Winkel (dx_n', t) und (dx_n', t') aus der Figur entnehmen können, so sind wir hierdurch in den Stand gesetzt, mit Hilfe der Gleichungen (8) bis (11) die Konstanten $a_1, a_2; b_1, b_2$ in einfachster Weise zu berechnen.

Die Werte, die wir so für $a_1, a_2; b_1, b_2$ erhalten, werden freilich weniger genau sein, als wenn wir zu ihrer Berechnung die Ausdrücke für sie in den Gleichungen (5) benutzen, und daher die Werte der korrigierten Polkoordinaten $\xi_c'' = \xi + d\xi$, $\eta_c'' = \eta + d\eta$ unter Umständen noch einmal zu berichtigen sein. Dies läßt sich jetzt aber mit geringer Mühe bewerkstelligen. Man berechne dazu den Punkt M_n'', der dem Pole ξ_c'', η_c'' zugehört, nenne die Abweichungen seiner Koordinaten von denen des Punktes $M_n\, dx_n''$ und dy_n'' und setze die Gleichungen an

$$dx_n'' = a_1 \cdot d\xi'' + a_2 \cdot d\eta'',$$
$$dy_n'' = b_1 \cdot d\xi'' + b_2 \cdot d\eta'',$$

wo man für die Konstanten $a_1, a_2; b_1, b_2$ wieder die bereits bestimmten

Werte benutzen darf. Löst man dann noch diese Gleichungen nach $d\xi''$ und $d\eta''$ auf, so erhält man als die Polkoordinaten die genaueren Werte

$$\xi_c = \xi_c'' + d\xi'', \quad \eta_c = \eta_c'' + d\eta''.$$

C. Zahlenbeispiel.

Die Stabkette (Fig. 3) bestehe aus drei Gliedern von den Längen $M_0M_1 = 4$ m, $M_1M_2 = 3$ m, $M_2M_3 = 2$ m; die Koordinaten der festen Endpunkte seien $x_0 = y_0 = 0$ m und $x_3 = 7$ m, $y_3 = 0$ m. In dem Punkte M_1 wirke die Kraft $P_1 = 3{,}5$ kg unter dem Neigungswinkel $\beta_1 = 110^0$ und in dem Punkte M_2 die Kraft $P_2 = 2{,}5$ kg unter dem Neigungswinkel $\beta_2 = 60^0$.

Lösung. Wir legen den Pol des Kräftepolygons $Q_1 Q_2 Q_3$ in den Punkt S. Benutzen wir für das System ξ, η den gleichen Längenmaßstab wie für das System x, y, so finden wir durch Ausmessen für die Koordinaten des Punktes S inbezug auf das System ξ, η die Werte 2 und 2,5. Hierauf konstruieren wir den Linienzug $M_0 m_1 m_2 m_3$, welcher den dem Punkte S als Pol zugehörigen Verlauf der Stabkette darstellt, und bestimmen weiter die Punkte μ_1, μ_2; μ_1', μ_2', welche den Lagen S_1, S_2; S_1', S_2' entsprechen,

In unserer Zeichnung haben wir für die Größe der Strecken $SS_1 = S_1S_2 = SS_1' = S_1'S_2'$ den Wert 0,5 gewählt. Daher müssen wir auch auf den Bezugslinien $m_3\mu_1\mu_2$ bzw. $m_3\mu_1'\mu_2'$ den Punkten μ_1 und μ_2 bezw. μ_1' und μ_2' die Werte 0,5 und $2 \cdot 0{,}5$ zuschreiben. Denken wir so auf den Bezugslinien eine Skala angebracht, so ergeben sich nach dieser Skala aus der Figur für die Koordinaten des Punktes M_3 die Werte $\mu_3 = 0{,}35$, $\mu_3' = -0{,}5$. Daher sind auch die Korrekturen der Koordinaten des Poles S gleich 0,35 bezw. $-0{,}5$. Demnach liefert die Zeichnung für die Koordinaten des gesuchten Poles die Werte $\xi = 2 + 0{,}35 = 2{,}35$ und $\eta = 2{,}5 - 0{,}5 = 2$.

Diese Werte benutzen wir als die Ausgangswerte der in Abschnitt B geschilderten Korrekturrechnung. Nach den Formeln (1) erhalten wir zunächst für die Koordinaten der Punkte Q_2 und Q_3

$$\xi_2 = 3{,}5 \cdot \cos 110^0 = -1{,}197; \qquad \eta_2 = 3{,}5 \cdot \sin 110^0 = 3{,}289;$$

$$\xi_3 = 3{,}5 \cdot \cos 110^0 + 2{,}5 \cdot \cos 60^0 = 0{,}053; \; \eta_3 = 3{,}5 \cdot \sin 110^0 + 2{,}5 \cdot \sin 60^0 = 5{,}454.$$

Setzen wir diese Werte in den Formeln (2) ein, so ergibt sich weiter

$$\alpha_1 = 40^0 24'; \quad \alpha_2 = -19^0 58', \quad \alpha_2 = -56^0 22'.$$

Für die Koordinaten des Endpunktes M_3' der Stabkette, der dem Pole $\xi = 2{,}35$, $\eta = 2$ entspricht, bekommen wir daher nach den Formeln (3) die Werte

$$x_3' = 6{,}974; \; y_3' = -0{,}097.$$

Es ist mithin

$$dx_3' = 7 - 6{,}974 = 0{,}026\,; \; dy_3' = 0 - (-0{,}097) = 0{,}097\,.$$

Wir haben jetzt die Koefffzienten von $d\xi$, $d\eta$ in den Formeln (5) zu berechnen; wir finden für sie die Werte 0,9714 und 0,1622 bezw. 0,1622 und 1,6020. Für die Berechnung von $d\xi$ und $d\eta$ ergeben sich daher die beiden Bestimmungsgleichungen

$$0{,}026 = 0{,}9714 \cdot d\xi - 0{,}1622 \cdot d\eta\,,$$

$$0{,}097 = -0{,}1622 \cdot d\xi + 1{,}6020 \cdot d\eta\,.$$

Aus ihnen folgt $d\xi = 0{,}0375$ und $d\eta = 0{,}0644$. Daher erhalten wir schließlich für die Koordinaten des Poles die korrigierten Werte

$$\xi_c = 2{,}35 + 0{,}0375 = 2{,}3875\,; \; \eta_c = 2 + 0{,}0644 = 2{,}0644\,.$$

Um jetzt den Verlauf der Stabkette zu bestimmen, der diesem Pole entspricht, setzen wir die Werte für ξ_c und η_c in den Formeln (2) ein. Dadurch finden wir für die Neigungswinkel der drei Stäbe die Werte

$$\alpha_1 = 40^0\,51'\,; \; \alpha_2 = -18^0\,52'\,; \; \alpha_3 = -55^0\,28'\,;$$

und dann weiter nach den Formeln (3) für die Koordinaten der Punkte M_1, M_2, M_3

$$x_1 = 3{,}027\,; \; y_1 = 2{,}617\,;$$

$$x_2 = 3{,}027 + 2{,}839 = 5{,}866\,; \; y_2 = 2{,}617 - 0{,}970 = 1{,}647\,;$$

$$x_3 = 5{,}866 + 1{,}134 = 7{,}000\,; \; y_3 = 1{,}647 - 1{,}647 = 0{,}000\,.$$

Beschränken wir uns also auf die Genauigkeit, welche die in vorstehender Rechnung angewandten vierstelligen Logarithmen zulassen, so fällt der Endpunkt der Stabkette genau in den gegebenen festen Punkt M_3.

Anstatt zur Berechnung der Faktoren von $d\xi$ und $d\eta$ die Ausdrücke für sie in den Gleichungen (5) zu benutzen, wollen wir die Korrektur auch nach der zweiten, sich auf die Figur stützenden Methode ausführen. Wir entnehmen aus der Zeichnung die Werte $\varrho_1 = 3{,}1$, $\varrho_2 = 3{,}5$, $r_3 = 4{,}2$ und $\measuredangle\,(dx_n', t) = -7^0{,}5$, $(dx_n', t') = 95^0$ und erhalten daher

$$a_1 + b_2 = \sum \frac{r}{\varrho} = \frac{4}{3{,}1} + \frac{3}{3{,}5} + \frac{2}{4{,}2} = 2{,}63\,,$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \operatorname{tg}(-7^0{,}5) = -0{,}132\,,$$

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} = \operatorname{tg} 95^0 = 11{,}4\,.$$

Aus diesen Gleichungen folgen für die Konstanten die Werte

$$a_1 = 1{,}05\,, \; a_2 = b_1 = -0{,}138\,, \; b_2 = 1{,}58\,.$$

Daher lauten die Korrekturgleichungen

$$0{,}026 = 1{,}05 \cdot d\xi - 0{,}138 \cdot d\eta\,,$$

$$0{,}097 = -0{,}138 \cdot d\xi + 1{,}58 \cdot d\eta\,.$$

Ihre Wurzeln sind $d\xi = 0{,}0334$ und $d\eta = 0{,}0644$ und somit die korrigierten Polkoordinaten $\xi_c = 2{,}35 + 0{,}0334 = 2{,}3834$, $\eta_c = 2 + 0{,}0644 = 2{,}0644$. Die Abweichungen dieser Größen von den nach der schärferen Methode berechneten Werten der Polarkoordinaten ist so geringfügig, daß eine nochmalige Korrektur überflüssig ist.

Bemerkung. Der in dem voranstehenden Beispiele behandelte Fall, daß die Stabkette nur aus *drei* Gliedern besteht, läßt sich auch auf die interpolative Bestimmung von nur einer Unbekannten zurückführen. Es ist indessen die Interpolation nach zwei Variabeln vorgezogen worden, da es darauf ankam, das *allgemeine*, für eine beliebige Anzahl von Stäben gültige Verfahren darzustellen.

Anwendung auf ein Problem der Geometrie.

In engem Zusammenhange mit der vorhergehenden Untersuchung steht die folgende Aufgabe der Maxima- und Minimarechnung.

Aufgabe 2.

Es ist ein starres, ebenes Polygon $Q_1 Q_2 \ldots\ldots Q_n$ gegeben. Man soll in seiner Ebene einen Punkt S so bestimmen, daß die Summe seiner Entfernungen von den Ecken des Polygons ein Minimum wird.

Lösung. Wir beziehen das Polygon auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen ξ und η; die Koordinaten der Punkte $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_n$ seien $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \ldots\ldots \xi_n, \eta_n$. Der Punkt S habe die Koordinaten ξ, η. Dann haben wir die Summe der positiven Wurzeln:

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2} + \sqrt{(\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2} + \cdots + \sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2}$$

zu einem Minimum zu machen. Nach den Vorschriften der Differentialrechnung müssen wir dazu die aufgestellte Summe partiell nach ξ und η differentiieren und die partiellen Differentialquotienten einzeln gleich Null setzen. Dadurch erhalten wir zwei Gleichungen in ξ und η, deren Wurzeln die Koordinaten des gesuchten Punktes S sind. Diese beiden Gleichungen sind

$$\frac{\xi_1 - \xi}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2}} + \frac{\xi_2 - \xi}{\sqrt{(\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2}} + \cdots + \frac{\xi_n - \xi}{\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2}} = 0,$$

$$\frac{\eta_1 - \eta}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2}} + \frac{\eta_2 - \eta}{\sqrt{(\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2}} + \cdots + \frac{\eta_n - \eta}{\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2}} = 0.$$

Bezeichnen wir nun den Neigungswinkel des Strahles SQ_ν gegen die positive ξ-Achse mit α_ν, so ist

$$\frac{\xi_\nu - \xi}{\sqrt{(\xi_\nu - \xi)^2 + (\eta_\nu - \eta)^2}} = \cos \alpha_\nu; \quad \frac{\eta_\nu - \eta}{\sqrt{(\xi_\nu - \xi)^2 + (\eta_\nu - \eta)^2}} = \sin \alpha_\nu.$$

Die beiden letzten Gleichungen gehen daher über in

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cdots + \cos \alpha_n = 0;$$

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \cdots + \sin \alpha_n = 0.$$

Diese Gleichungen können wir aber mechanisch so deuten, daß wir uns in den Ecken des Polygons Kräfte von der Größe 1 angebracht denken, deren Richtungslinien in dem Punkte S zusammenlaufen. Da die rechten Seiten der aufgestellten Gleichungen Null sind, muß die Resultante dieser Kräfte verschwinden. Wir haben also unsere Aufgabe auf die andere zurückgeführt: Die Richtungen eines Systems von Kräften von der Größe 1, die in den Ecken eines starren Polygons angreifen, sind so zu bestimmen, daß sich erstens ihre Wirkungslinien in einem Punkte schneiden und daß zweitens ihre Resultante Null wird.

Diese Aufgabe ist aber nichts anderes als ein besonderer Fall der 1. Aufgabe. Dem Kräftepolygon $Q_1 Q_2 \ldots . Q_n$ entspricht das starre Polygon $Q_1 Q_2 \ldots . Q_n$, der Pol S stellt den gesuchten Punkt des Polygons dar und die Glieder der Stabkette sind den in den Ecken des starren Polygons angreifenden Einheitskräften einzeln gleich und parallel. Da die Resultante dieser Kräfte Null sein soll, so muß die Stabkette ein geschlossenes Polygon bilden, unsere Aufgabe besteht also darin, den Pol S so zu bestimmen, daß der Endpunkt m_n der Stabkette in ihren Anfangspunkt M_0 fällt.

Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, falls das gegebene Polygon ein Dreieck oder ein Viereck ist. Für den Fall des Dreiecks folgt aus dem Gleichgewicht der drei in dem Punkte S angreifenden Einheitskräfte, daß die Strahlen SQ_1, SQ_2, SQ_3 miteinander Winkel von 120° bilden; der Punkt S ergibt sich also als Schnittpunkt von drei Kreisen über den Seiten des Dreiecks als Sehnen und mit den Peripheriewinkeln 120°. Für den Fall des Vierecks liefert der Schnittpunkt der Diagonalen den gesuchten Punkt S.

Die angegebene Interpretation läßt sich auch auf elementarem Wege leicht begründen. Zu diesem Zwecke denken wir uns in den

Ecken des Polygons und in dem Punkte S Ösen angebracht, durch welche eine Gummischnur reibungslos gleiten kann. Wir lassen die Schnur von der Ecke Q_1 ausgehen, führen sie dann nach dem Punkte S, hierauf nach der Ecke Q_2, dann nach dem Punkte S zurück, weiter nach der Ecke Q_3 usf., bis wir wieder nach der Eche Q_1 zurückkommen. Jetzt spannen wir die Schnur und verknüpfen ihre beiden Enden. Die Schnur wird sich nun möglichst zu verkürzen suchen und der Öse S eine solche Lage erteilen, daß die Summe ihrer Verbindungen mit den Ecken ein Minimum wird. Sobald Gleichgewicht eingetreten ist, muß außerdem die Schnur in ihren sämtlichen Abschnitten die gleiche Spannung besitzen und die Öse S daher nach den verschiedenen Ecken mit derselben Kraft hingezogen werden. Daraus folgt aber die Richtigkeit der obigen Zurückführung der Aufgabe auf das mechanische Problem.

Anmerkung. Die Analogie beider Probleme ist nur dann vollständig, wenn die Strecken des Seilpolygons in dem Sinne eines Umlaufes den Polstrahlen SQ — diese alle entweder auf S zugewendet oder von S abgewendet — nicht nur parallel, sondern auch dem Sinne nach gleichgerichtet sind, was aber keineswegs notwendig zu sein braucht. Bei der Minimumsaufgabe sind die Wurzeln alle positiv zu rechnen und daher lauten die Bedingungsgleichungen

$$\sum \sin \alpha_\nu = 0 \text{ und } \sum \cos \alpha_\nu = 0 ;$$

dagegen lautet die Bedingung dafür, daß das Seilpolygon von den Seillängen 1 sich schließt:

$$\sum \pm \sin \alpha_\nu = 0 , \quad \sum \pm \cos \alpha_\nu = 0 .$$

Beim Viereck z. B. stimmen tatsächlich beide Aufgaben nur überein, wenn das Viereck keine einspringende Ecke hat. Ist das aber nicht der Fall, liege z. B. die Ecke D innerhalb des Dreiecks ABC, so kann man leicht zeigen, daß der Diagonalenschnittpunkt zwar den Punkt S als richtigen Pol für die ursprüngliche Aufgabe der Gestaltsbestimmung der viergliedrigen Kette gibt, nicht aber den gesuchten Punkt für die Minimumsaufgabe. Denn es ist

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4 = 0 ,$$

das Analoge gilt für die $\cos \alpha$.

Die Gleichungen

$$\sum \sin \alpha = 0 \text{ und } \sum \cos \alpha = 0$$

haben gar keine reelle Lösung: die Minimallage des Punktes S fällt mit einem Randpunkte des Regularitätsgebietes, nämlich mit dem einspringenden Punkte D zusammen.

Aufgabe 3.

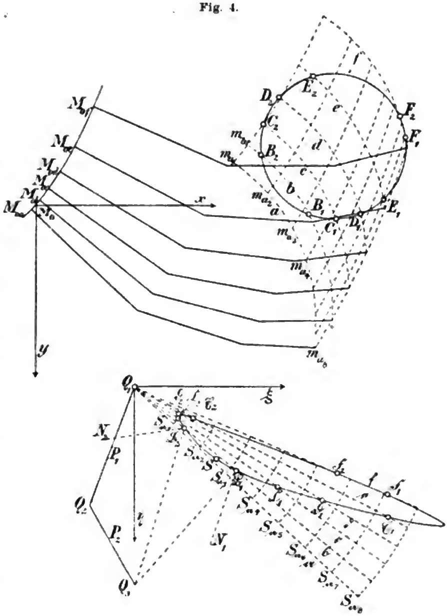
Es sei eine Stabkette $M_0 M_1 \ldots . M_n$ gegeben, deren Endpunkte M_0 und M_n sich reibungslos auf zwei Kurven $\varphi(x, y) = 0$ und $\chi(x, y) = 0$ verschieben lassen. Man soll die Gleichgewichtslage der Stabkette bestimmen, falls die in den Ecken $M_1, M_2, \ldots . M_{n-1}$ angreifenden Kräfte

$P_1, P_2, \ldots . P_{n-1}$ nach Größe und Richtung bekannt sind und ferner vorausgesetzt wird, daß die beiden Kurven und die gegebenen Kräfte in derselben Ebene liegen.

A. Graphostatische Lösung.

In der gesuchten Gleichgewichtslage muß die Stabkette zwei Bedingungen erfüllen: 1. Der erste und der letzte Stab müssen in ihren Endpunkten auf den Gleitkurven senkrecht stehen; 2. Die den Stäben der Kette parallelen Strahlen, die wir durch die Ecken des Kräftepolygons gezogen denken, müssen sich in einem Punkte, dem Pole, schneiden. Um diesen Bedingungen zu genügen, verschaffen wir uns eine Übersicht über die Gesamtheit derjenigen Gleichgewichtslagen, in denen der erste Stab senkrecht zu der Kurve $\varphi(x, y)$ gerichtet ist, während der Endpunkt M_n des letzten Stabes auf der Kurve $\chi(x, y)$ liegt, wobei aber die Winkel, welche dieser Stab mit der Kurve $\chi(x, y)$ bildet, von der verschiedensten Größe sein werden. Aus der Gesamtheit dieser Gleichgewichtslagen wählen wir dann, um die Lösung zu erhalten, diejenige aus, in welcher auch der letzte Stab senkrecht auf der Kurve $\chi(x, y)$ steht.

Fig. 4.



In dem Beispiele, an dem wir diesen Gedanken näher ausführen wollen, nehmen wir an, daß die Stabkette aus drei Stäben r_1, r_2, r_3 besteht (Fig. 4). Der Endpunkt M_0 des ersten Stabes bewege sich auf einer Parabel $\varphi(x, y) = 0$ und der Endpunkt M_3 des letzten Stabes auf einem Kreise $\chi(x, y)$. Wir fügen zunächst die beiden gegebenen Kräfte

nach Größe und Richtung zu dem Linienzuge $Q_1 Q_2 Q_3$ aneinander und berechnen für den Teil der Kurve $\varphi(x, y)$, welcher dem Augenschein nach für die Lösung in Betracht kommt, eine Reihe von Punkten M_{0a}, M_{0b}, M_{0c} ...., derart, daß die Normale der Kurve in jedem dieser Punkte mit der Normalen in dem vorhergehenden Punkte einen konstanten Winkel (in unserem Beispiel 4°) bildet. Parallel zu diesen Normalen ziehen wir durch den ersten Eckpunkt Q_1 des Kräftepolygons die Geraden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ...., und stellen auf denselben eine gleichmäßige Einteilung her, indem wir um den Punkt Q_1 eine Schar äquidistanter Kreisbogen zeichnen, welche die Geraden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ .... in den Punkten $S_{\mathfrak{a}1}, S_{\mathfrak{a}2}, S_{\mathfrak{a}3}$ ....; $S_{\mathfrak{b}1}, S_{\mathfrak{b}2}$ .... schneiden mögen. Konstruieren wir jetzt nach der in der 1. Aufgabe angegebenen Methode die Stabpolygone, welche den Punkten $S_{\mathfrak{a}1}, S_{\mathfrak{a}2}$ ....; $S_{\mathfrak{b}1}, S_{\mathfrak{b}2}$ .... zugehören, so wird jede Gruppe von Stabpolygonen, welche den Punkten eines der Strahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ .... zugeordnet ist, den ersten Stab gemeinsam haben, während die Endpunkte m_{a1}, m_{a2}, m_{a3} ....; m_{b1}, m_{b2} .... der Polygone jeder dieser Gruppen eine der Kurven bestimmen, die in unserer Figur mit a, b, c .... bezeichnet sind. Diese Kurven stellen in der Ebene des Stabpolygons die Abbildungen der Strahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in der Ebene des Kräftepolygons dar. Die Kurve a wird in unserer Figur von der Gleitlinie $\chi(x, y)$ nicht geschnitten, dagegen ist dies für die Kurven b, c, d, e, f der Fall. Den Schnittpunkten $B_1, B_1; C_1, C_2$ .... entsprechen im Kräfteplane auf den Strahlen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ... die Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2; \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ ...; deren Lage wir durch eine einfache graphische Interpolation ermitteln. Legen wir noch durch die Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1; \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ .... eine Kurve, so wird durch dieselbe die Gleitlinie $\chi(x, y)$ in den Kräfteplan abgebildet. Auf dieser Kurve, welche wir kurz die P o l k u r v e nennen wollen, muß der gesuchte Pol liegen, damit der erste Stab senkrecht zu der Gleitlinie $\varphi(x, y)$ gerichtet ist.

Um jetzt denjenigen Punkt der Polkurve zu finden, für welchen auch der letzte Stab auf der ihm zugehörigen Gleitlinie $\chi(x, y)$ senkrecht steht, ziehen wir durch die Punkte $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die Geraden $\mathfrak{B}_1 N_1$ und $\mathfrak{B}_2 N_2$ parallel zu den Normalen der Kurve $\chi(x, y)$ in den Punkten B_1 und B_2 und verbinden weiter die Punkte $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ mit dem Endpunkt Q_3 des Kräftepolygons. Würde nun etwa durch den Punkt $\mathfrak{B}_1$ die richtige Lage des Poles angegeben, so müßte der Polstrahl $\mathfrak{B}_1 Q_3$ in die Richtung der Geraden $\mathfrak{B}_1 N_1$ fallen, also der Winkel $Q\mathfrak{B}N$ Null sein. Dieser Winkel zwischen dem Polstrahl und der Richtung der Normalen der Gleitkurve ist aber sowohl für den Punkt $\mathfrak{B}_1$ wie für den Punkt $\mathfrak{B}_2$ von Null verschieden, und zwar ist Winkel $Q_3\mathfrak{B}_1 N_1 = 22^0$ und Winkel $Q_3\mathfrak{B}_2 N_2 - 64^0$. Da ferner der Punkt Q_3 innerhalb des durch die Geraden $\mathfrak{B}_1 N_1$ und $\mathfrak{B}_2 N_2$ abgegrenzten Raumes gelegen ist,

so erhalten wir annähernd die richtige Lage des gesuchten Poles S, wenn wir noch den Bogen $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ der Polkurve im Verhältnisse der Abweichungswinkel $Q_3\mathfrak{B}_1N_1$ und $Q_3\mathfrak{B}_2N_2$ teilen.

Einige Eigenschaften der Polkurve. Durch den Schnittpunkt der in unsere Figur als x-Achse eingezeichneten Geraden mit dem gegebenen Kreise denken wir uns einen zweiten Kreis gelegt, welcher den ersteren in dem bezeichneten Punkte von innen berührt. Ist der Radius dieses Kreises nur etwa doppelt so groß als der des gegebenen, so werden wir, falls wir den Anfangspunkt M_0 der Stabkette unter Beibehaltung der am Eingange eingeführten Bedingungen auf der Parabel emporschieben, zu zwei Punkten gelangen, für welche sich die Stabkette zu einer geraden Linie ausreckt. Die Spannungen in den Stäben müssen dann unendlich groß werden und die Polkurve sich daher mit zwei Ästen im Unendlichen verlieren. Die Richtungen, unter welchen dieses geschieht, lassen sich leicht angeben. Wir konstruieren dazu eine Reihe von Normalen der Parabel und machen ihre Längen gleich der Summe der Längen der verschiedenen Stäbe. Verbinden wir dann die Endpunkte der Normalen durch eine Kurve, so bestimmen die Schnittpunkte dieser Kurve mit dem Gleitkreise die fraglichen Lagen der Stabkette. Parallel zu den Richtungen, welche die zu einer Geraden ausgespannte Stabkette in diesen Lagen annimmt, laufen die beiden Äste der Polkurve ins Unendliche.

Beachtung verdient auch der Fall, daß die Polkurve durch den ersten oder letzten Endpunkt des Kräftepolypons Q_1 bezw. Q_n hindurchgeht. Es tritt dieses ein, wenn die Stabkette sich zwischen den Gleitkurven so verschieben läßt, daß der erste bezw. der letzte Stab spannungsfrei wird. Diese Nulllagen lassen sich in einfacher Weise ohne Benutzung der Polkurve ermitteln. Der erste Stab r_1 z. B. kann nur spannungsfrei sein, wenn der zweite Stab r_2 in die Richtung der Kraft P_1 fällt. Wir kennen somit die Richtung des Stabes r_2 und können daher durch wiederholte Anwendung des Satzes vom Kräfteparallelogramm oder einfacher mit Hilfe des Kräftepolygons — der Pol fällt in den Punkt Q_1 — auch die Richtung die übrigen Stäbe finden und folglich auch den Abstand des Endpunktes M_n von der zweiten Ecke M_1 nach Größe und Richtung bestimmen. Um die gesuchte Nulllage der Kette zu finden, brauchen wir dann nur noch die Endpunkte der in den verschiedenen Punkten der Kurve $\varphi(x.y)$ errichteten Normalen von der Länge r_1 durch eine Kurve zu verbinden und zwischen dieser und der Kurve $\chi(x,y)$ eine Gerade so einzuschieben, daß sie nach Größe und Richtung gleich dem gefundenen Vektor M_1M_n wird.

Die Richtung, unter welcher die Polkurve etwa durch den Punkt Q_1 hindurchgeht, ist parallel der Richtung des ersten Stabes in der zugehörigen Nulllage der Stabkette. Der Beweis folgt daraus, daß bei einer infinitesimalen Verschiebung der Stabkette in dem ersten Stabe eine Spannung entsteht, welche nach Größe und Richtung durch das von dem Punkte Q_1 ausgehende zugehörige Bogenelement der Polkurve dargestellt wird.

Schreitet der Pol auf der Polkurve durch den Punkt Q_1 hindurch, so wechselt hierbei die Spannung in dem Stabe r_1 ihr Zeichen.

Die für die Polkurve angeführten Eigenschaften bleiben bestehen, falls die Kurve $\varphi(x, y)$ zu einem Punkte zusammenschrumpft, oder mit anderen Worten, falls der Endpunkt M_0 der Stabkette als fest betrachtet wird.

C. Die numerische Korrektur des graphisch ermittelten Poles.

Wir behalten die in Aufgabe 1. benutzten Bezeichnungen bei, fassen den graphisch ermittelten Pol aber jetzt als Schnittpunkt des ersten und letzten Polstrahles auf, deren Neigungswinkel α_1 und α_n gegen die ξ-Achse wir aus der Zeichnung entnehmen. Es handelt sich darum, die für sie gefundenen Vermessungsergebnisse durch die Rechnung zu verschärfen.

Die Gleichungen der beiden bezeichneten Polstrahlen sind

$$\eta - \eta_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (\xi - \xi_1),$$

$$\eta - \eta_n = \operatorname{tg} \alpha_n \cdot (\xi - \xi_n).$$

Aus ihnen folgt für die Koordinaten ξ und η des Poles

$$(1) \qquad \xi = \frac{\eta_n - \eta_1 + \xi_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - \xi_n \cdot \operatorname{tg} \alpha_n}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_n},$$

$$\eta = \frac{\xi_n - \xi_1 + \eta_1 \cdot \operatorname{cotg} \alpha_1 - \eta_n \cdot \operatorname{cotg} \alpha_n}{\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_n}.$$

Nachdem wir die Werte von ξ und η nach diesen Formeln bestimmt haben, berechnen wir weiter die Richtung des ν-ten Polstrahles mit Hilfe der Beziehungen

$$(2) \qquad \cos \alpha_\nu = \frac{\xi - \xi_\nu}{\sqrt{(\xi - \xi_\nu)^2 + (\eta - \eta_\nu)^2}},$$

$$\sin \alpha_\nu = \frac{\eta - \eta_\nu}{\sqrt{(\xi - \xi_\nu)^2 + (\eta - \eta_\nu)^2}}.$$

Um nun den Verlauf der Stabkette zu berechnen, welche dem zu den angenommenen Werten von α_1 und α_n gehörigen Pole entspricht, müssen wir zunächst die Koordinaten x_0 und y_0 des Anfangspunktes der Stabkette als Funktionen des Winkels α_1 ausdrücken. Fassen wir daher den Winkel α_1, durch den die Richtung der Normalen der Kurve $\varphi(x, y)$ bezeichnet wird, als laufenden Parameter auf, so möge sich die Kurve $\varphi(x, y)$ durch die beiden Gleichungen darstellen lassen

(3)
$$x_0 = \Phi_x(\alpha_1),$$
$$y_0 = \Phi_y(\alpha_1),$$

Haben wir mit Hilfe dieser Gleichungen die Werte von x_0 und y_0 berechnet, die zu dem gefundenen Werte von α_1 gehören, so folgen die Koordinaten des zweiten Endpunktes der Stabkette aus den Gleichungen

(4)
$$x'_n = x'_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r_\nu \cdot \cos\alpha_\nu,$$
$$y'_n = y'_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r_\nu \cdot \sin\alpha_\nu.$$

Wären nun die aus der Zeichnung entnommenen Werte von α_1 und α_n die wahren Werte der Neigungswinkel des ersten und letzten Polstrahles, so müßten die auf Grund dieser Werte berechneten Werte von x'_n und y'_n die Gleichung der Kurve $\chi(x, y) = 0$ befriedigen. Es müßte also $\chi(x'_n, y'_n) = 0$ sein. Im allgemeinen werden wir aber für $\chi(x'_n, y'_n)$ nicht Null, sondern eine kleine Größe ε' finden. Es sei also

(5)
$$\chi(x'_n, y'_n) = \varepsilon'.$$

Um den Punkt M_n in die Kurve selbst hineinzurücken, erteilen wir den Koordinaten x'_n und y'_n die — zunächst noch unbekannten — Inkremente dx_n und dy_n. Dann sind diese Inkremente durch die Gleichung

$$\chi(x'_n + dx_n, y'_n + dy_n) = 0$$

miteinander verknüpft. Entwickeln wir die linke Seite dieser Gleichung nach dem Taylorschen Lehrsatze, indem wir uns hierbei auf die linearen Glieder beschränken, so erhalten wir

(6)
$$\chi(x'_n, y'_n) + \frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot dx_n + \frac{\partial \chi}{\partial y} \cdot dy_n = 0.$$

Wir wollen nun dx_n und dy_n als Funktionen von α_1, α_n; $d\alpha_1, d\alpha_n$ darstellen. Dazu denken wir uns für die rechten Seiten der Gleichungen (2) die Abkürzungen eingeführt

$$(7)\qquad \frac{\xi - \xi_\nu}{\sqrt{(\xi - \xi_\nu)^2 + (\eta - \eta_\nu)^2}} = f_{\xi\nu}(\xi, \eta),$$

$$\frac{\eta - \eta_\nu}{\sqrt{(\xi - \xi_\nu)^2 + (\eta - \eta_\nu)^2}} = f_{\eta\nu}(\xi, \eta).$$

Dann folgt aus den Beziehungen (2) bis (4)

$$x_n = \Phi_x(\alpha_1) + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r_\nu \cdot f_{\xi\nu}(\xi, \eta),$$

$$y_n = \Phi_y(\alpha_1) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r_\nu \cdot f_{\eta\nu}(\xi, \eta).$$

und dann weiter durch Differentiation dieser Gleichungen

$$(8)\qquad dx_n = d\Phi_x(\alpha_1) + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r_\nu \cdot df_{\xi\nu}(\xi, \eta),$$

$$dy_n = d\Phi_y(\alpha_1) + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r_\nu \cdot df_{\eta\nu}(\xi, \eta).$$

Es ist aber

$$(9)\qquad d\Phi_x(\alpha_1) = \frac{d\Phi_x}{d\alpha_1} \cdot d\alpha_1;\ d\Phi_y(\alpha_1) = \frac{d\Phi_y(\alpha_1)}{d\alpha_1}.$$

Ferner ist, wenn wir $f_{\xi\nu}(\xi, \eta)$ als Funktion von α_1 und α_n auffassen

$$(10)\quad df_{\xi\nu}(\xi,\eta) = \frac{\partial f_{\xi\nu}}{\partial \xi} \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial \alpha_1} \cdot d\alpha_1 + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha_n} \cdot d\alpha_n\right] + \frac{\partial f_{\xi\nu}}{\partial \eta}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \alpha_1} \cdot d\alpha_1 + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha_n} \cdot d\alpha_n\right].$$

Ein analoger Wert gilt für $df_{\eta\nu}(\xi, \eta)$.

Die partiellen Ableitungen von $f_{\xi\nu}(\xi, \eta) = \cos \alpha_\nu$ und $f_{\eta\nu}(\xi, \eta) = \sin \alpha_\nu$ nach ξ und η haben wir schon in Aufgabe 1, Abschnitt C angegeben, während wir die partiellen Ableitungen von ξ und η nach α_1 und α_n durch Differentiieren der Gleichungen (1) bilden. Es folgt

$$(11)\quad \frac{\partial \xi}{\partial \alpha_1} = \frac{\xi_1 - \xi}{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_n) \cdot \cos^2 \alpha_1};\quad \frac{\partial \xi}{\partial \alpha_n} = -\frac{\xi_n - \xi}{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_n) \cdot \cos^2 \alpha_n};$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \alpha_1} = -\frac{\eta_1 - \eta}{(\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_n) \cdot \sin^2 \alpha_1};\quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha_n} = \frac{\eta_n - \eta}{(\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_n) \cdot \sin^2 \alpha_n}.$$

Diese Werte setzen wir in die Gleichungen (8) ein und erhalten dadurch

$$(12)\quad dx_n = \frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha_1}\cdot d\alpha_1 + d\alpha_1 \cdot \frac{\xi_1 - \xi}{(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_n)\cdot \cos^2\alpha_1}\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu\cdot(\eta-\eta_\nu)^2}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ d\alpha_1 \cdot \frac{\eta_1 - \eta}{(\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_n)\sin^2\alpha_1}\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu\cdot(\xi-\xi_\nu)\cdot(\eta-\eta_\nu)}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$- d\alpha_n \cdot \frac{\xi_n - \xi}{(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_n)\cdot \cos^2\alpha_n}\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu\cdot(\eta-\eta_\nu)^2}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$- d\alpha_n \cdot \frac{\eta_n - \eta}{(\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_n)\cdot \sin^2\alpha_n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu\cdot(\xi-\xi_\nu)(\eta-\eta_\nu)}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

$$dy_n = \frac{\partial \Phi_y}{\partial \alpha_1}\cdot d\alpha_1 - d\alpha_1 \cdot \frac{\xi_1 - \xi}{(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_n)\cdot \cos^2\alpha_1}\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu\cdot(\xi-\xi_\nu)(\eta-\eta_\nu)}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- d\alpha_1 \cdot \frac{\eta_1 - \eta}{(\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_n)\cdot \sin^2\alpha_1}\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu\cdot(\xi-\xi_\nu)^2}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ d\alpha_n \cdot \frac{\xi_n - \xi}{(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_n)\cdot \cos^2\alpha_n}\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu\cdot(\xi-\xi_\nu)(\eta-\eta_\nu)}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ d\alpha_n \cdot \frac{\eta_n - \eta}{(\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_n)\cdot \sin^2\alpha_n}\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{r_\nu\cdot(\xi-\xi_\nu)^2}{\{(\xi-\xi_\nu)^2+(\eta-\eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese Werte für dx_n und dy_n müssen wir in die Beziehung (6) einsetzen. Führen wir für $\chi(x_n', y_n')$ noch seinen Wert ε' ein und schreiben wir für die rechten Seiten der Gleichungen (12) die Abkürzungen $F_1(d\alpha_1, d\alpha_n)$ und $F_2(d\alpha_1, d\alpha_n)$, so geht die Gleichung (6) über in

$$(13)\qquad \frac{\partial \chi}{\partial x}\cdot F_1(d\alpha_1, d\alpha_n) + \frac{\partial \chi}{\partial y}\cdot F_2(d\alpha_1, d\alpha_n) + \varepsilon' = 0\,.$$

Durch die Gleichung (13) wird das Verhältnis bestimmt, das zwischen den zu den Werten von α_1 und α_n hinzuzufügenden Inkrementen $d\alpha_1$ und $d\alpha_n$ bestehen muß, damit der Endpunkt M_n der Stabkette in die Kurve $\chi(x, y)$ oder der Pol in die Polkurve hineinrückt. Sie kann dazu benützt werden, um den Verlauf der Polkurve in der Nachbarschaft des graphisch ermittelten Poles mit der Genauigkeit kleiner Größen erster Ordnung festzustellen. Zwei Punkte S_1 und S_2 der Polkurve finden wir am einfachsten dadurch, daß wir in Gleichung (13) entweder $d\alpha_n$ oder $d\alpha_1$ gleich Null setzen. Wählen wir $d\alpha_n = 0$ und berechnen aus Gleichung (13) den zugehörigen Wert von $d\alpha_1$, so er-

halten wir den ersten Punkt S_1 als Schnittpunkt der beiden äußeren Polstrahlen mit den Neigungswinkeln $\alpha_1 + d\alpha_1$ und α_n. Wählen wir dagegen $d\alpha_1 = 0$ und berechnen aus Gleichung (13) den entsprechenden Wert von $d\alpha_n$, so ergibt sich der Punkt S_2 der Polkurve als Schnittpunkt jener Polstrahlen mit den Neigungswinkeln α_1 und $\alpha_n + d\alpha_n$.

Um nun denjenigen Punkt S_c der Polkurve zu erhalten, durch den die Lösung der Aufgabe bestimmt wird, können wir uns entweder des am Schlusse der graphischen Lösung dargelegten Interpolationsverfahrens bedienen, indem wir für die Punkte M_{n1} und M_{n2} der Kurve $\chi(x, y)$, welche den Punkten S_1 und S_2 der Polkurve zugeordnet sind, die Abweichungen der Normale der Kurve von den Richtungen berechnen, welche in beiden Fällen der letzte Stab der Stabkette besitzt, und in dem Verhältnisse dieser Abweichungen das Kurvenstück $S_1 S_2$ durch den Punkt S_c teilen; oder aber wir leiten noch eine zweite Gleichung zwischen $d\alpha_1$ und $d\alpha_n$ ab. Die Rechnung, welche zu dieser führt, ist derjenigen ganz analog, durch welche die Gleichung (13) gewonnen wurde. Wir ersetzen dazu die Gleichung der zweiten Gleitkurve $\chi(x\, y) = 0$ durch zwei Gleichungen

$$x_n = X_x(\alpha_n),$$
$$y_n = X_y(\alpha_n),$$

wo der Parameter α_n den Neigungswinkel der Normalen der Gleitkurve in dem Punkte x_n, y_n bedeutet. Die Werte von x_n und y_n, die aus diesen Gleichungen für den aus der Zeichnung entnommenen Wert von α_n folgen, seien x_n'' und y_n''. Hierauf berechnen wir die Koordinaten x_0'' und y_0'' des Anfangspunktes der Stabkette mit Hilfe der Beziehungen

$$(14) \qquad x_0'' = x_n'' + \sum_{\nu=n}^{\nu=1} (-r_\nu) \cdot \cos \alpha_\nu,$$
$$y_0'' = y_n'' + \sum_{\nu=n}^{\nu=1} (-r_\nu) \cdot \sin \alpha_\nu.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich dadurch von den ihnen entsprechenden Gleichungen (4), daß an die Stelle der Größe r_ν ihr negativer Wert $-r_\nu$ gesetzt ist, da wir jetzt die Stabkette in dem entgegengesetzten Sinne durchlaufen. Setzen wir die für x_0'' und y_0'' gefundenen Werte in die Gleichung der ersten Gleitkurve ein, so ergebe sich

$$\varphi(x_0'', y_0'') = \varepsilon''.$$

Die weitere Rechnung entspricht in allen Einzelheiten den Rechnungen, die zu der Gleichung (13) geführt haben.

C. Zahlenbeispiel.

Wir leiten das Zahlenbeispiel, welches zur Erläuterung der allgemeinen Lösung dienen soll, aus dem Beispiele der 1. Aufgabe ab. Wir konstruieren daher zwei Kurven (Fig. 4), von denen die erste durch den Punkt M_0 geht und in diesem Punkte auf der in der 1. Aufgabe berechneten Richtung des Stabes r_1 senkrecht steht, während die zweite Kurve die gleichen Bedingungen für den Punkt M_3 erfüllt. Als erste Kurve wählen wir eine Parabel, deren Achse im Abstande $x = -1{,}5$ parallel zur y-Achse läuft. Die Gleichung dieser Parabel ist

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x, y) = y + 0{,}3855\, x^2 + 1{,}1565\, x = 0\,.$$

Die zweite, durch den Punkt M_3 hindurchgehende Kurve sei ein Kreis mit dem Radius $r = 2$; seine Gleichung ist

$$\text{(b)} \qquad \chi(x, y) = (x - 8{,}314)^2 + (y + 1{,}647)^2 - 4 = 0\,.$$

Für die Neigungswinkel des ersten und letzten Stabes in der gesuchten Gleichgewichtslage entnehmen wir aus der Figur die Näherungswerte

$$\alpha_1 = \sphericalangle(\overline{SQ_1}, \xi\text{-Achse}) = 40^0\, 38',5$$
$$\alpha_3 = \sphericalangle(SQ_3, \xi\text{-Achse}) = -57^0\, 30'\,.$$

Um diese Werte rechnerisch zu korrigieren, berechnen wir zunächst die Koordinaten des Poles, indem wir in den Formeln (1) für ξ_1, η_1 und $\xi_n = \xi_3$, $\eta_n = \eta_3$ die in der 1. Aufgabe, Abschnitt C, angegebenen Werte einsetzen; es ergibt sich $\xi = 2{,}280$, $\eta = 1{,}957$. Mit Benutzung dieser Werte berechnen wir weiter nach den Formeln (2) den Neigungswinkel des zweiten Stabes; wir finden $\alpha_2 = -20^0\, 57',5$. Die Funktionen $x_0 = \Phi_x(\alpha_1)$ und $y_0 = \Phi_y(\alpha_1)$ werden für die Parabel

$$\text{(c)} \qquad x_0 = \Phi_x(\alpha_1) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}3855} \cdot \operatorname{cotg} \alpha_1 - \frac{1{,}1565}{2 \cdot 0{,}3855}\,,$$
$$y_0 = \Phi_y(\alpha_1) = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha_1 - 1{,}1565^2}{-4 \cdot 0{,}3855}\,.$$

Setzen wir in ihnen für α_1 seinen Wert $40^0\, 38',5$, so folgt $x_0' = 0{,}0110$, $y_0' = -0{,}0129$. Die Werte für x_0', y_0' und für α_1, α_2, α_3 tragen wir jetzt in die Formeln (4) ein und erhalten dadurch für die Koordinaten des Endpunktes M_3 der Stabkette die Werte $x_3' = 6{,}922$, $y_3' = -0{,}168$, und dann weiter nach den Gleichungen (5) und (b) für die Abweichung ε' den Wert $\varepsilon' = -0{,}344$. Um nunmehr dx_n und dy_n als Funktionen von $d\alpha_1$ und $d\alpha_3$ darzustellen, müssen wir zuerst die in den Formeln (12) auftretenden Koeffizienten der Inkremente $d\alpha_1$ und $d\alpha_n = d\alpha_3$ berechnen. Es ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{2 \cdot 0{,}3855 \cdot \sin^2 \alpha_1} = -3{,}057\,;$$

$$\frac{\partial \Phi_y}{\partial \alpha_1} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha_1}{2 \cdot 0{,}3855 \cdot \sin^2 \alpha_1} = 3{,}561\,;$$

$$\frac{\xi_1 - \xi}{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_3) \cdot \cos^2 \alpha_1} = -1{,}630\,; \quad \frac{\xi_3 - \xi}{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_3) \cdot \cos^2 \alpha_3} = -3{,}178\,;$$

$$\frac{\eta_1 - \eta}{(\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_3) \cdot \sin^2 \alpha_1} = -2{,}560\,; \quad \frac{\eta_3 - \eta}{(\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_3) \cdot \sin^2 \alpha_3} = 2{,}729\,;$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{r_\nu \cdot (\xi - \xi_\nu)^2}{\{(\xi - \xi_\nu)^2 + (\eta - \eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}} = 1{,}6083\,;$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{r_\nu \cdot (\xi - \xi_\nu) \cdot (\eta - \eta_\nu)}{\{(\xi - \xi_\nu)^2 + (\eta - \eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}} = 0{,}1702\,;$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{r_\nu \cdot (\eta - \eta_\nu)^2}{\{(\xi - \xi_\nu)^2 + (\eta - \eta_\nu)^2\}^{\frac{3}{2}}} = 1{,}0112\,.$$

Diese Werte setzen wir in die Formeln (12) ein und fassen die gleichnamigen Glieder zusammen. Dadurch folgt

(d) $$dx_3 = -5{,}141 \cdot d\alpha_1 + 2{,}750 \cdot d\alpha_3\,,$$
$$dy_3 = 7{,}955 \cdot d\alpha_1 + 3{,}848 \cdot d\alpha_3\,.$$

Jetzt gehen wir zu der Gleichung (13) über, in welcher auf Grund der Gleichung (b) die Ableitungen von $\chi(x, y)$ nach x und y die Werte haben

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 2\,(x_3' - 8{,}134) = -2{,}424\,,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = 2\,(y_3' + 1{,}647) = 2{,}958\,.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (d) erhalten wir daher

(e) $$36{,}00\,.\,d\alpha_1 + 4{,}720 \cdot d\alpha_3 - 0{,}344 = 0\,.$$

Um die zweite Gleichung zwischen $d\alpha_1$ und $d\alpha_3$ abzuleiten, berechnen wir zunächst die beiden Funktionen $x_3 = X_x(\alpha_3)$ und $y_3 = X_y(\alpha_3)$; wir finden

$$x_3 = X_x(\alpha_3) = 8{,}134 + 2 \cdot \cos \alpha_3\,,$$
$$y_3 = X_y(\alpha_3) = -1{,}647 + 2 \cdot \sin \alpha_3\,.$$

Da die Normale des Kreises in dem Punkte x_3'', y_3'' dem Polstrahle SQ_3 in dem Sinne der Buchstabenfolge parallel ist, so ist ihr Neigungswinkel $\alpha_3 = 180 - 57^0\,30'$. Für die Koordinaten des Kreispunktes x_3'', y_3'' folgen daher die Werte

$$x_3'' = 7{,}059\,; \; y_3'' = 0{,}0392\,.$$

Ferner ergibt sich nach den Formeln (14)

$$x_0'' = 0{,}1482;\; y_0'' = 0{,}1932\,.$$

Setzen wir diese Werte in die Parabelgleichung (a) ein, so folgt $\varepsilon'' = 0{,}373$.

Weiter finden wir

$$\frac{\partial X_x}{\partial \alpha_3} = -\,2 \cdot \sin(180^0 - 57^0 30') = -\,1{,}68\,,$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial \alpha_3} = \quad 2 \cdot \cos(180^0 - 57^0 30') = -\,1{,}074\,.$$

Die in den Gleichungen (12) auftretenden Koeffizienten von $d\alpha_1$ und $d\alpha_3$ haben wir schon berechnet. Den für die Summengrößen gefundenen Werten müssen wir indessen das entgegengesetzte Vorzeichen geben, da jetzt die Strecken r_v negativ zu rechnen sind. Daher erhalten wir

$$dx_0 = -\,2{,}084 \cdot d\alpha_1 + 1{,}603 \cdot d\alpha_3$$

$$dy_0 = \quad 4{,}394 \cdot d\alpha_1 + 2{,}774 \cdot d\alpha_3\,.$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1{,}2704\,;\; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1\,.$$

Nach der Gleichung (13) folgt daher schließlich als zweite Beziehung zwischen den Inkrementen $d\alpha_1$ und $d\alpha_3$ die Gleichung

(f) $$1{,}75 \cdot d\alpha_1 + 10{,}56 \cdot d\alpha_3 - 0{,}373 = 0\,.$$

Lösen wir noch dis Gleichungen (e) und (f) nach $d\alpha_1$ und $d\alpha_3$ auf, so finden wir für die Korrektionen die Werte

$$\text{arcus } d\alpha_1 = 0{,}00505\,,\; \text{arcus } d\alpha_3 = 0{,}0346\,,$$

oder in Minuten

$$d\alpha_1 = 17',3\,,\; d\alpha_3 = 119'.$$

Für die Neigungswinkel des ersten und letzten Stabes ergeben sich somit die Werte

$$\alpha_1 = 40^0 38',5 + 17',3 = 40^0 55'8\,,$$

$$\alpha_3 = -\,57^0 30' + 1^0 59' = -\,55^0 31'.$$

Da diese Werte von den in der 2. Aufgabe für α_1 und α_3 gefundenen Werten $\alpha_1 = 40^0 51'$ und $\alpha_0 = 55^0 28'$, die wir nach der aufgestellten Probe als genau ansehen dürfen, noch zu stark abweichen, so unterziehen wir sie einer nochmaligen Korrektur. Wir berechnen dazu nach den Formeln (1) zunächst die Koordinaten des Schnitt-

punktes der beiden Polstrahlen Q_1S und Q_3S, indem wir für die Neigungswinkel die Werte $\alpha_1 = 40^0 55',8$ und $\alpha_3 = -55^0 31'$ einsetzen; wir finden $\xi = 2{,}381$, $\eta = 2{,}065$. Hierauf berechnen wir den Neigungswinkel des Polstrahles Q_2S; es ergibt sich $\alpha_2 = -18^0 55',3$.

Ferner bestimmen wir die Punkte der Gleitkurven, für welche die Neigungswinkel der Normalen bezw. die Werte $\alpha_1 = 40^0 55',8$ und $\alpha_3 = -55^0 31'$ haben; es ergibt sich für die Koordinaten dieser Punkte

$$x_0' = -0{,}004,\ y_0' = 0{,}005;\quad x_3'' = 7{,}0014,\ y_3'' = 0{,}0014.$$

Daraus folgt weiter mit Hilfe der Gleichungen (5) bezw. (14)

$$x_3' = 6{,}9887,\ y_3' = 0{,}0064;\quad x_0'' = 0{,}0087,\ y_0'' = 0{,}0000.$$

Diese Werte setzen wir in die Gleichungen der beiden Gleitkurven ein und erhalten

$$\varepsilon' = 0{,}0457;\quad \varepsilon'' = 0{,}100.$$

Die Werte der Zahlenkoeffizienten von $d\alpha_1$ und $d\alpha_3$ in der Gleichung (13) und der ihr entsprechenden zweiten Gleichung übernehmen wir unverändert aus den Gleichungen (e) und (f), denn die Änderungen, die sie für die neuen Werte von α_1 und α_3 erfahren, kommen bei der Kleinheit der Größen ε' und s'' nicht in Betracht. Daher erhalten wir für die Berechnung der Inkremente $d\alpha_1$ und $d\alpha_3$ die Bestimmungsgleichungen

$$36{,}0 \cdot d\alpha_1 + \ \ 4{,}72 \cdot d\alpha_3 = -0{,}0457,$$
$$1{,}75 \cdot d\alpha_1 + 10.56 \cdot d\alpha_3 = \quad 0{,}010.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt

$$d\alpha_1 = -4',9;\quad d\alpha_3 = 4',07.$$

Die Neigungswinkel der beiden äußeren Polstrahlen nehmen daher die Werte an

$$\alpha_{1c} = 40^0 55',8 - 4',9 = 40^0 50',9;\quad \alpha_{3c} = -55^0 31' + 4',07 = 55^0 26',96.$$

Die Abweichungen dieser Werte von den in Aufgabe 1. gefundenen Werten ist so gering, daß wir sie der mit dem logarithmischen Rechnen verbundenen Unsicherheit der letzten Ziffer zuschreiben dürfen.

Zweiter Teil.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Stabkette ein geschlossenes Polygon von unveränderlicher Gestalt bilde, welches sich in seiner Ebene beliebig verschieben läßt, und die Beziehungen untersuchen, welche für ein System äußerer in der gleichen Ebene gelegener Kräfte, die in den

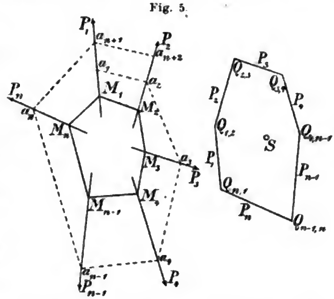
Ecken des Polygons angreifen, bestehen muß, damit Gleichgewicht vorhanden ist. Unsere Betrachtung der verschiedenen Fälle, die sich hier unterscheiden lassen, stützt sich auf einen bekannten Satz der graphischen Statik, dessen Darlegung wir zum Gegenstand der folgenden Aufgabe machen.

Aufgabe 4.

In den Ecken des starren Polygons $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n$ (Fig. 5) mögen die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ angreifen, von denen man weiß, daß ihre Resultante gleich Null ist. Wie läßt sich graphisch das Moment dieser Kräfte bestimmen?

Lösung. Wir konstruieren zunächst das Kräftepolygon $Q_{1,2} Q_{2,3} \ldots Q_{n-1,n} Q_{n1}$, indem wir die Strecke $Q_{n,1} Q_{1,2}$ gleich und parallel der Kraft P_1, die Strecke $Q_{1,2} Q_{2,3}$ gleich und parallel der Kraft P_2 zeichnen usw. Das Kräftepolygon ist geschlossen, da, wie wir vorausgesetzt haben, die Resultante der Kräfte verschwindet. Im Inneren des Kräftepolygons nehmen wir den Pol S beliebig an und denken die Polstrahlen $S Q_{1,2}$, $S Q_{2,3}$ usw. gezogen. Nunmehr ersetzen wir das starre Polygon $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n$, in dem die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ einen nicht unmittelbar zu übersehenden Spannungszustand erzeugen, durch ein Seilpolygon, an welchem sich die Spannungen je zweier aufeinander folgender Seilabschnitte mit der in ihrem Schnittpunkte angreifenden Kraft ins Gleichgewicht setzen. Dazu ziehen wir durch einen beliebigen Punkt a_1 der Kraft P_1 eine Parallele zu dem Polstrahle $S Q_{1,2}$; sie schneide die Kraft P_2 in dem Punkte a_2. Ebenso ziehen wir $a_2 a_3$ parallel zu dem Polstrahl $S Q_{2,3}$. So fortfahrend gelangen wir, nachdem wir einmal ganz um das Polygon herumgegangen sind, zuletzt zu dem Seilabschnitte $a_{n+1} a_{n+2}$. Lassen wir nun in den Seilabschnitten $a_2 a_1$ und $a_{n+1} a_{n+2}$ in der Reihenfolge der Buchstaben ein Paar Kräfte wirken, welche gleich der Länge des Polstrahls $S Q_{1,2}$ sind, so überzeugen wir uns leicht, daß diese beiden Kräfte die gegebenen Kräfte, die wir in den Ecken des Seilpolygons angreifen denken, im Gleichgewicht halten. Denn betrachten wir etwa die Kraft P_3, die in der Ecke a_3 auf die beiden Seilabschnitte $a_3 a_2$ und $a_3 a_4$ einwirkt. Die Spannungen in diesen Seilabschnitten werden durch die Längen der Polstrahlen $S Q_{2,3}$ und

Fig. 5.



$SQ_{3,4}$ gemessen; es schließen sich aber im Kräftepolygon die Kraft $Q_{2,3}Q_{34} = P_3$ und die Spannungen $Q_{3,4}S$, $SQ_{2,3}$ zu einem Dreieck, halten sich mithin im Gleichgewicht; daher muß auch die Kraft P_3 von den Spannungen der Seilabschnitte a_3a_2 und a_3a_4 im Gleichgewichte gehalten werden. Das Gleiche gilt für jede Ecke des Seilpolygons von a_2 bis a_{n+1}. Nur die in den Seilabschnitten a_2a_1 und $a_{n+1}a_{n+2}$ auf die Punkte a_1 und a_{n+2} wirkenden Spannungen, die durch die Länge des Polstrahles $SQ_{1,2}$ gemessen werden, heben sich nicht auf. Da diese beiden Spannungen nicht nur gleich, sondern auch parallel sind, so erhalten wir somit das Moment des gegebenen Kräftesystems, indem wir die Länge des Polstrahles $SQ_{1,2}$ mit dem Abstande der beiden Grenzabschnitte a_2a_1 und $a_{n+1}a_{n+2}$ multiplizieren.

Das Moment des Kräftesystems wird daher Null, d. h. für das Kräftesystem besteht Gleichgewicht, sobald die beiden Linien a_2a_1 und $a_{n+1}a_{n+2}$ zusammenfallen, und wir erhalten den bekannten Satz: Ein ebenes Kräftesystem befindet sich im Gleichgewicht, wenn sowohl das zu den Kräften gehörige Kräftepolygon als auch das mit Hilfe eines beliebigen Poles konstruierte Seilpolygon geschlossen ist.

Wir wollen nun untersuchen, wie man über die Kräfte verfügen muß, um beiden Bedingungen, die in dem angeführten Satze enthalten sind, zugleich zu genügen. Bedienen wir uns für einen Augenblick der analytischen Betrachtungsweise, so liefert die Forderung, daß das Kräftepolygon geschlossen sei, zwei Gleichungen, welche ausdrücken, daß die Summe der Komponenten der gegebenen Kräfte nach zwei beliebigen nicht parallelen Richtungen Null ist, während sich aus der Bedingung, daß sich auch das Seilpolygon schließt, eine dritte Gleichung, die Momentengleichung, ergibt. Da wir für jede Kraft Größe und Richtung zu unterscheiden haben, also im ganzen $2n$ Variable vorhanden sind, so können wir $2n-3$ Variabele beliebig wählen. Ist über diese $2n-3$ Variabele durch die Aufgabe verfügt worden, so folgen die drei noch fehlenden Bestimmungsstücke aus den drei Gleichgewichtsbedingungen. Nach der Gruppierung der gegebenen und der zu bestimmenden Größen können wir nun vier verschiedene Fälle unterscheiden, zu deren Untersuchung wir in den folgenden Aufgaben übergehen.

Aufgabe 5.

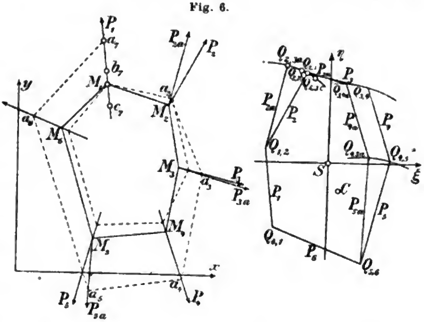
Von den in den Ecken eines starren Polygons angreifenden Kräften kennt man im allgemeinen Größe und Richtung; von dreien dieser Kräfte sei jedoch bloß ihre Größe gegeben; man soll ihre Richtungen so bestimmen, daß Gleichgewicht herrscht.

A. Graphostatische Lösung.

Das starre Polygon sei beispielsweise das Sechseck $M_1 M_2 \ldots M_6$ (Fig. 6). Man kennt die Größe und die Richtung der Kräfte P_1, P_4, P_6; von den Kräften P_2, P_3, P_5 kennt man dagegen nur ihre Größe; man soll ihre Richtungen bestimmen.

Wir fügen hierzu die Kräfte P_6 und P_1 zu der gebrochenen Geraden $Q_{5,6}\, Q_{6,1}\, Q_{1,2}$ zusammen. Die Punkte $Q_{5,6}$ und $Q_{1,2}$ können wir dann als feste Punkte ansehen, zwischen denen wir einen aus vier Abschnitten bestehenden Linienzug, dessen Teile bezw. die Größen der Kräfte P_2, P_3, P_4, P_5 besitzen, so einzuschieben haben, daß erstens der die Kraft P_4 darstellende Abschnitt die vorgeschriebene Richtung hat und daß zweitens jedes aus dem sich ergebenden Polygon mit Benutzung eines beliebigen Poles hergeleitete Seilpolygon geschlossen ist. Um diesen Linienzug zu finden, bedienen wir uns wieder der graphischen Interpolation. Wir schlagen zunächst um den Punkt $Q_{1,2}$ einen Kreisbogen mit der Größe der Kraft P_2 als Radius und ebenso um den Punkt $Q_{5,6}$ einen Kreisbogen mit der Größe der Kraft P_5 als Radius. Auf diesem Kreisbogen müssen dann die Punkte $Q_{2,3}$ bezw. $Q_{4,5}$ liegen. Aus dem Orte für den Punkt $Q_{4,5}$ können wir leicht den Ort des Punktes $Q_{3,4}$ gewinnen. Denn da die Strecke $Q_{4,5}\, Q_{3,4}$ gleich und parallel der Kraft P_4 ist, so muß der Punkt $Q_{3,1}$ ebenfalls auf einem Kreisbogen liegen. Den Mittelpunkt C dieses Kreisbogens erhalten wir, indem wir die Strecke $Q_{5,6}\, C$ parallel und gleich der Kraft P_4 ziehen; sein Radius hat die Länge der Kraft P_5. Hierauf nehmen wir auf dem Kreise, den wir um den Punkt $Q_{1,2}$ mit einem Radius von der Größe der Kraft P_2 geschlagen haben, einen Punkt $Q_{2,3a}$ so an, daß die Richtung der die Kraft P_2 darstellenden Strecke $Q_{1,2}\, Q_{2,3a}$ vermutlich die richtige ist, und schlagen weiter mit der Länge der Kraft P_3 als Radius einen Kreisbogen um $Q_{2,3a}$, welcher den Kreis mit dem Mittelpunkte C in dem Punkte $Q_{3,4a}$ schneidet. Durch den Punkt $Q_{3,4a}$ ziehen wir die Gerade

Fig. 6.



$Q_{3,4a} Q_{4,5a}$ parallel zu der Kraft P_4. Verbinden wir dann noch die Punkte $Q_{4,5a}$ und $Q_{5,6}$, so erhalten wir ein Kräftepolygon, von welchem wir annehmen dürfen, daß es näherungsweise unserer Aufgabe genügt. Um zu prüfen, wie weit diese Annahme gerechtfertigt ist, sehen wir einen beliebigen im Inneren des Kräftepolygons gelegenen Punkt S als den Pol des Kräftepolygons an und konstruieren nach der in der vorigen Aufgabe beschriebenen Methode das zu diesem Pole gehörige Seilpolygon $a_1 a_2 \ldots a_7$. Den Anfangspunkt a_1 haben wir in unserer Zeichnung in den Punkt M_1 gelegt. Aus der Lage, die wir für den Endpunkt a_7 finden, erkennen wir, daß bei der getroffenen Wahl des Punktes $Q_{2,3a}$ das sich ergebende Seilpolygon zu weit geöffnet ist. Wir gehen daher auf dem Kreise um den Punkt $Q_{1,2}$ von dem Punkte $Q_{2,3a}$ etwa um 10 Bogengrade weiter bis zu dem Punkte $Q_{2,3b}$, vervollständigen das zu $Q_{2,3b}$ gehörige Kräftepolygon und konstruieren, indem wir den Punkt S als Pol beibehalten, das zugeordnete Seilpolygon, dessen Anfangspunkt wir wie vorhin in den Punkt M_1 legen. In unserer Figur haben wir, um die Übersichtlichkeit nicht zu beeinträchtigen, von diesem Seilpolygon nur den Endpunkt b_7 verzeichnet. Da das Seilpolygon noch immer zu weit geöffnet ist, gehen wir auf dem Kreise um den Punkt $Q_{1,2}$ abermals von dem Punkte $Q_{2,3b}$ etwa um 10 Bogengrade weiter bis zu dem Punkte $Q_{2,3c}$ und führen für den Punkt $Q_{2,3c}$ die gleiche Konstruktion aus. Als Endpunkt des Seilpolygons ergibt sich dann der Punkt c_7. Aus der Lage der Punkte a_7, b_7, c_7 können wir aber durch eine einfache Interpolation die richtige Lage des Punktes $Q_{2,3}$ ermitteln und erhalten damit für unsere Aufgabe eine Lösung von einem solchen Genauigkeitsgrade, wie er durch die Zeichnung erreichbar ist.

B. Numerische Korrektur.

Für die numerische Korrektur des gefundenen Resultats bieten sich zwei Methoden dar. Am nächsten liegt der Gedanke, die einzelnen Operationen des angegebenen graphischen Verfahrens analytisch auszudrücken und für zwei Kräftpolygone, die wir an das zeichnerisch gewonnene Resultat anschließen, die zugehörigen Endpunkte a_7 des Seilpolygons durch die Rechnung zu bestimmen, um dann aus den Abweichungen dieser Punkte von dem Punkte M_1 das richtige Resultat durch Interpolation zu ermitteln. Nachdem wir aber einmal im Besitze von Näherungswerten für die Neigungswinkel sind, ist es wegen der Mühseligkeit der mit der angedeuteten Methode verknüpften Zahlenrechnung einfacher, die Korrektur auf die Grundgleichungen der analytischen Statik zu stützen. Wir wollen daher an dieser Stelle nur den letzteren Weg verfolgen.

Behalten wir die in Aufgabe 1 benutzten Bezeichnungen bei, so

wird die Bedingung, daß die Resultante des Kräftesystems verschwindet, durch die beiden Gleichungen dargestellt.

$$(1)\quad P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3 + P_5 \cdot \cos\beta_5 = - P_1 \cdot \cos\beta_1 - P_4 \cdot \cos\beta_4 - P_6 \cdot \cos\beta_6 = c_1;$$

$$(2)\quad P_2 \cdot \sin\beta_2 + P_3 \cdot \sin\beta_3 + P_5 \cdot \sin\beta_5 = - P_1 \cdot \sin\beta_1 - P_4 \cdot \sin\beta_4 - P_6 \cdot \sin\beta_6 = c_2.$$

Die Werte der rechten Seiten, für die wir die Abkürzungen c_1 und c_2 geschrieben haben, können wir, da sie nur bekannte Größen enthalten, berechnen.

Die zweite Gleichungsbedingung, welche aussagt, daß auch das Moment der Kräfte Null ist, liefert die Gleichung:

$$(3)\quad P_2 \cdot (y_2 \cdot \cos\beta_2 - x_2 \cdot \sin\beta_2) + P_3 \cdot (y_2 \cdot \cos\beta_3 - x_3 \cdot \sin\beta_3) + P_5 \cdot (y_5 \cdot \cos\beta_5 - x_5 \cdot \sin\beta_5) = - P_1 \cdot (y_1 \cdot \cos\beta_1 - x_1 \cdot \sin\beta_1) - P_4 \cdot (y_4 \cdot \cos\beta_4 - x_4 \cdot \sin\beta_4) - P_6\,(y_6 \cdot \cos\beta_6 - x_6 \cdot \sin\beta_6) = c_3.$$

Wie vorhin die Werte für c_1 und c_2 so dürfen wir hier den Wert für c_3 als bekannt ansehen.

Als Näherungslösungen für die auf den linken Seiten der Gleichungen (1) und (3) vorkommenden Unbekannten β_2, β_3, β_5 betrachten wir nunmehr die durch die Zeichnung gefundenen Werte dieser Winkel. Wir wollen sie mit β'_2, β'_3, β'_5 bezeichnen. Dann berechnen wir die Größen:

$$(1')\quad P_2 \cdot \cos\beta'_2 + P_3 \cdot \cos\beta'_3 + P_5 \cdot \cos\beta'_5 = c'_1,$$

$$(2')\quad P_2 \cdot \sin\beta'_2 + P_3 \cdot \sin\beta'_3 + P_5 \cdot \sin\beta'_5 = c'_2,$$

$$(3')\quad P_2 \cdot (y_2 \cdot \cos\beta'_2 - x_2 \cdot \sin\beta'_2) + P_3 \cdot (y_3 \cdot \cos\beta'_3 - x_3 \cdot \sin\beta'_3) + P_5 \cdot (y_5 \cdot \cos\beta'_5 - x_5 \cdot \sin\beta'_5) = c'_3.$$

Die gesuchten Inkremente der Winkel β'_2, β'_3, β'_5 mögen mit $d\beta'_2$, $d\beta'_3$, $d\beta'_5$ bezeichnet werden; es ist also:

$$(4)\qquad \beta_2 = \beta'_2 + d\beta'_2,\ \ \beta_3 = \beta'_3 + d\beta'_3,\ \ \beta_5 = \beta'_5 + d\beta'_5.$$

Wir machen jetzt wieder die Annahme, daß die Abweichungen $d\beta'_2$, $d\beta'_3$, $d\beta'_5$ klein genug sind, um bei der Fortsetzung nach dem Taylorschen Lehrsatze als Differentiale gelten zu dürfen. Dann folgt durch Subtraktion der Gleichungen (1') bis (3') von (1) bis (3):

$$P_2 \cdot d\cos\beta'_2 + P_3 \cdot d\cos\beta'_3 + P_5 \cdot d\cos\beta'_5 = c_1 - c'_1,$$

$$P_2 \cdot d\sin\beta'_2 + P_3 \cdot d\sin\beta'_3 + P_5 \cdot d\sin\beta'_5 = c_2 - c'_2;$$

$$P_2 \cdot (y_2 \cdot d\cos\beta'_2 - x_2 \cdot d\sin\beta'_2) + P_3 \cdot (y_3 \cdot d\cos\beta'_3 - x_3 \cdot d\sin\beta'_3) + P_5 \cdot (y_5 \cdot d\cos\beta'_5 - x_5 \cdot d\sin\beta'_5 = c_3) - c'_3;$$

oder wenn wir die Differentiale ausführen:

$$-P_2\cdot\sin\beta_2'\cdot d\beta_2' - P_3\cdot\sin\beta_3'\cdot d\beta_3' - P_5\cdot\sin\beta_5'\cdot d\beta_5' = c_1 - c_1',$$

$$P_2\cdot\cos\beta_2'\cdot d\beta_2' + P_3\cdot\cos\beta_3'\cdot d\beta_3' + P_5\cdot\cos\beta_5'\cdot d\beta_5' = c_2 - c_2',$$

$$(-P_2\cdot y_2\cdot\sin\beta_2' - P_2\cdot x_2\cdot\cos\beta_2')\cdot d\beta_2' + (-P_3\cdot y_3\cdot\sin\beta_3' - P_3\cdot x_3\cdot\cos\beta_3')\cdot d\beta_3' + (P_5\cdot y_5\cdot\sin\beta_5' - P_5\cdot x_5\cdot\sin\beta_5')\cdot d\beta_5' = c_3 - c_3'.$$

Wir haben somit zur Bestimmung der Inkremente $d\beta_2'$, $d\beta_3'$, $d\beta_5'$ drei lineare Gleichungen erhalten. Bedienen wir uns der Schreibweise der Determinanten, so sind die Auflösungen:

$$d\beta_2' = \frac{1}{\triangle}\cdot\begin{vmatrix} c_1-c_1' & -P_3\cdot\sin\beta_3' & -P_5\cdot\sin\beta_5' \\ c_2-c_2' & P_3\cdot\cos\beta_3' & P_5\cdot\cos\beta_5' \\ c_3-c_3' & (-P_3\cdot y_3\cdot\sin\beta_3'-P_3\cdot x_3\cdot\cos\beta_3') & (-P_5\cdot y_5\cdot\sin\beta_5'-P\cdot x_5\cdot\cos\beta_5') \end{vmatrix},$$

$$d\beta_3' = \frac{1}{\triangle}\cdot\begin{vmatrix} -P_2\cdot\sin\beta_2' & c_1-c_1' & -P_5\cdot\sin\beta_5' \\ P_2\cdot\cos\beta_2' & c_2-c_2' & P_5\cdot\cos\beta_5' \\ (-P_2\cdot y_2\cdot\sin\beta_2'-P_2\cdot x_2\cdot\cos\beta_2') & c_3-c_3' & (-P_5\cdot y_5\cdot\sin\beta_5'-P_5\cdot x_5\cdot\cos\beta_5' \end{vmatrix},$$

$$d\beta_3' = \frac{1}{\triangle}\cdot\begin{vmatrix} -P_2\cdot\sin\beta_2' & -P_3\cdot\sin\beta_3' & c_1-c_1' \\ P_2\cdot\cos\beta_2' & P_3\cdot\cos\beta_3' & c_2-c_2' \\ (-P_2\cdot y_2\cdot\sin\beta_2'-P_2\cdot x_2\cdot\cos\beta_2') & (-P_3\cdot y_3\cdot\sin\beta_3'-P_3\cdot x_3\cdot\cos\beta_3') & c_3-c_3' \end{vmatrix},$$

wo

$$\triangle = \begin{vmatrix} -P_2\cdot\sin\beta_2' & -P_3\cdot\sin\beta_3' & -P_5\cdot\sin\beta_5' \\ P_2\cdot\cos\beta_2' & P_3\cdot\cos\beta_3' & P_5\cdot\cos\beta_5' \\ (-P_2\cdot y_2\cdot\sin\beta_2'-P_2\cdot x_2\cdot\cos\beta_2') & (-P_3\cdot y_3\cdot\sin\beta_3'-P_3\cdot x_3\cdot\cos\beta_3') & (-P_5\cdot y_5\cdot\sin\beta_5'-P_5\cdot y_5\cdot\sin\beta_5'\cdot\cos\beta_5') \end{vmatrix}$$

gesetzt ist.

C. Zahlenbeispiel.

Der Figur 6 liegen die folgenden Zahlenangaben zugrunde:

$$\begin{matrix} x_1 = 32{,}3 \\ y_1 = 69{,}7 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} x_2 = 54{,}6 \\ y_2 = 62{,}4 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} x_3 = 58{,}8 \\ y_3 = 39{,}5 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} x_4 = 55 \\ y_4 = 15{,}9 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} x_5 = 28 \\ y_5 = 12{,}9 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} x_6 = 15{,}6 \\ y_6 = 53{,}1 \end{matrix}.$$

$$P_1 = 28{,}8; \quad P_2 = 31{,}6; \quad P_3 = 22{,}6; \quad P_4 = 28{,}5; \quad P_5 = 39{,}4; \quad P_6 = 55{,}2.$$

Die Näherungswerte für die gesuchten Winkel β_2, β_3, β_5 liefert die Zeichnung; wir finden

$$\beta_2' = 62^0\,35', \ \beta_3' = -12^0\,10', \ \beta_5' = -104^0\,15'.$$

Die Korrektionen $d\beta_2'$, $d\beta_3'$, $d\beta_5'$ erhalten wir durch Rechnung; es ergibt sich

$$d\beta_2' = -45'; \ d\beta_3' = 1^0\,47',5; \ d\beta_5' = -20'.$$

Die Werte der zu ermittelnden Neigungswinkel sind daher

$$\beta_2 = 61^0\,50', \ \beta_3 = -10^0\,22',5, \ \beta_5 = -104^0\,35'.$$

Bilden wir zur Probe in bezug auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems die Momente, so finden wir als Moment der rechtsdrehenden Kräfte die Zahl 3696 und als Moment der linksdrehenden Kräfte die Zahl 3695. Insofern die letzte Ziffer wegen der Anwendung vierstelliger Logarithmen um eine Einheit variieren darf, ist also das Gesamtmoment der Kräfte in der Tat gleich Null.

Bemerkung. Das voranstehende Zahlenbeispiel ist nicht nach der ausführlich entwickelten Korrekturmethode durchgerechnet worden, sondern da diese erst bei der Redaktion der Arbeit aufgestellt wurde, nach dem im Anfange des Abschnittes B angedeutetem Interpolationsverfahren.

Aufgabe 6.

In den Ecken des starren Polygones $M_1 M_2 M_3 \ldots . M_n$ greifen die Kräfte P_1, P_2, ... P_n in gegebenen Richtungen an. Bis auf drei dieser Kräfte kennt man auch ihre Größe. Welche Größe muß man den drei noch unbestimmten Kräften erteilen, damit Gleichgewicht besteht?

Lösung. Erteilen wir den drei unbekannten Kräften die Ziffern 1, 2, 3, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 = -\sum_{\nu=4}^{\nu=n} \cdot P_\nu \cdot \cos\alpha_\nu;$$

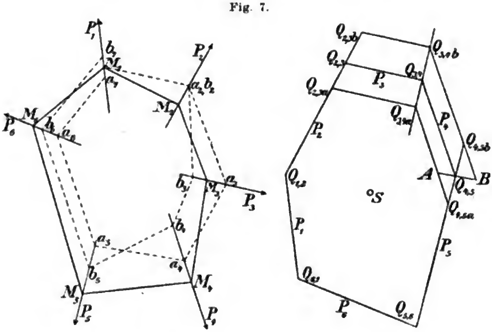
$$P_1 \cdot \sin\alpha_1 + P_2 \cdot \sin\alpha_2 + P_3 \cdot \sin\alpha_3 = -\sum_{\nu=4}^{\nu=n} \cdot P_\nu \cdot \sin\alpha_\nu;$$

$$P_1 \cdot (\cos\alpha_1 \cdot y_1 - \sin\alpha_1 \cdot x_1) + P_2 \cdot (\cos\alpha_2 \cdot y_2 - \sin\alpha_2 \cdot x_2)$$

$$+ P_3 \cdot (\cos\alpha_3 \cdot y_3 - \sin\alpha_3 \cdot x_3) + \sum_{\nu=4}^{\nu=n} \cdot (\cos\alpha_\nu \cdot y_\nu - \sin\alpha_\nu \cdot x_\nu = M = 0.$$

Wir erhalten also zur Bestimmung von P_1, P_2, P_3 drei lineare Gleichungen und schließen daraus, daß auch die graphische Lösung der

Fig. 7.



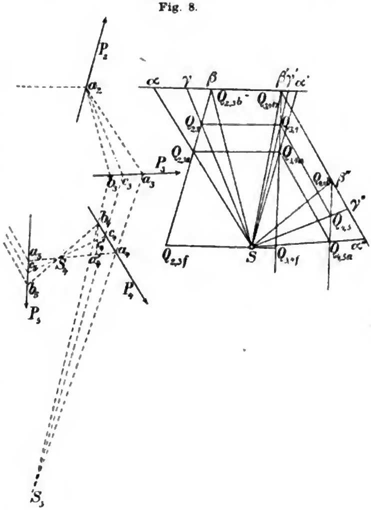
Aufgabe, der wir uns jetzt zuwenden, von linearem Charakter sein muß. Unsere Darstellung knüpfen wir wieder an den Fall eines Sechsecks (Fig. 7). Die Größen der Kräfte P_1, P_4, P_6 seien gegeben, diejenigen der Kräfte P_2, P_3, P_5 zu bestimmen. Wir legen zu diesem Zwecke die Kräfte P_6 und P_1 zu dem Linienzuge $Q_{5,6}\,Q_{6,1}\,Q_{1,2}$ aneinander und ziehen durch die Ecke $Q_{1,2}$ eine Parallele zu der Richtung der Kraft P_2 und durch die Ecke $Q_{5,6}$ eine solche zu der Richtung der Kraft P_5. Lassen wir dann die Kraft P_4 mit dem Endpunkt $Q_{4,5}$ auf der letzteren dieser Parallelen unter Beibehaltung ihrer Richtung gleiten, so wird der zweite Endpunkt der Kraft P_4 eine Gerade $Q_{3,4a}\,Q_{3,4b}$ beschreiben, welche der Geraden $Q_{5,6}\,Q_{4,5a}\,Q_{4,5b}$ parallel ist. Die Kräftepolygone

$$Q_{5,6}\,Q_{6,1}\,Q_{1,2}\,Q_{2,3a}\,Q_{3,4a}\,Q_{4,5a} \text{ und } Q_{5,6}\,Q_{6,1}\,Q_{1,2}\,Q_{2,3b}\,Q_{3,4b}\,Q_{4,5b},$$

welche der ersten Gleichgewichtsbedingung — die Resultante des Systems muß verschwinden — Genüge leisten, lassen sich daher ohne weiteres

konstruieren. Hierauf zeichnen wir die zu diesen Kräftepolygonen, deren Ecken $Q_{3,4a}$ bzw. $Q_{3,4b}$ wir auf der angegebenen Parallelen beliebig gewählt haben, zugeordneten Seilpolygone $M_1 a_1 a_2 \ldots a_7$ und $M_1 b_1 b_2 \ldots b_7$, wobei wir einen beliebigen Punkt S im Inneren der Kräftepolygone als Pol benutzen. Nach der in der Aufgabe 4 gegebenen Darlegung sind aber die Abweichungen $M_1 a_7$ und $M_1 b_7$ den Momenten der entsprechenden Kräftesysteme proportional; andererseits folgt aus dem linearen Charakter der oben aufgestellten Gleichungen des Gleichgewichts, daß auch die Konstruktion linear sein muß. Daher erhalten wir die Ecke $Q_{4,5}$ des gesuchten Kräftepolygons $Q_{1,2} \cdot \cdot Q_{4,5} \cdot \cdot Q_{6,1}$, welches auch die Momentengleichung befriedigt, indem wir durch die Gerade AB die Strecke $Q_{4,5a} Q_{4,5b}$ nach dem Verhältnis der Abweichungen $M_1 a_7$ und $M_1 b_7$ teilen.[1]) In unserer Figur haben wir hierzu die Strecken $Q_{4,5a} A$ und $Q_{4,5b} B$ gleich demselben Vielfachen der Abweichungen $M_1 a_7$ und $M_1 b_7$ gemacht.

Fig. 8.



Der Beweis für die Richtigkeit des letzten Teiles unserer Konstruktion läßt sich auch ohne die Benutzung der gegebenen Gleichungen durch eine rein geometrische Betrachtung führen. Da aus dieser zugleich eine bemerkenswerte Eigenschaft der gezeichneten Seilpolygone folgt, so möge sie ebenfalls eine Stelle finden. Wir gehen hierzu von der Annahme aus, daß sich $Q_{4,5a} Q_{4,5}$ zu $Q_{4,5} Q_{4,5b}$ wie $a_7 M_1$ zu $M_1 b_7$ verhält; dann müssen wir zeigen, daß das zu dem Kräftepolygon $Q_{5,4} Q_{6,1} Q_{1,2} Q_{2,3} Q_{3,4} Q_{4,5}$ gehörige Seilpolygon, dessen Ecken wir mit den Buchstaben c_ν bezeichnen, sich in dem Punkte M_1 schließt. Zu diesem Zwecke zeichnen wir die für den Beweis in Betracht kommenden Teile der Figur noch einmal (Fig. 8).

1) Wäre das Problem nicht vom ersten Grade, sondern von einem höheren, so würde der Interpolationsschnitt AB anstatt einer Geraden eine Kurve sein.

Die zu den drei Kräftepolygonen $Q_{5,5} \dots Q_{4,5a}$, $Q_{5,6} \dots Q_{4,5}$, $Q_{5,6} \dots Q_{4,5b}$ gehörigen Seilpolygone haben den ersten Seilabschnitt $M_1 a_2 = M_1 b_2 = M_1 c_2$ gemeinsam, da den Kräftepolygonen der entsprechende Polstrahl $SQ_{1,2}$ gleichmäßig zukommt. Den Punkten $Q_{2,3a}$, $Q_{2,3}$, $Q_{2,4b}$ des Kräftepolygons sind im Plane des Seilpolygons auf der Richtungslinie der Kraft P_3 die Punkte a_3, c_3, b_3 zugeordet. Wie aus der Konstruktion folgt, ist ferner das Strahlenbüschel $a_2, (a_3, c_3, b_3)$ dem Strahlenbüschel $S(Q_{2,3a}, Q_{2,3}, Q_{2,3b})$ kongruent. Weiter sind die Seilabschnitte $a_4 a_3, c_3 c_4, b_3 b_3$ bezw. den Polstrahlen $SQ_{3,4a}, SQ_{3,4}, SR_{3,4b}$ parallel, und wie die letzteren sich in einem Punkte, dem Pole S, schneiden, so werden wir sehen, daß auch die bezeichneten Seilabschnitte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Die Strahlenbüschel $S(Q_{2,3a}, Q_{2,3}, Q_{2,3b})$ und $S(Q_{3,4a}, Q_{3,4}, Q_{3,4b})$ mögen nämlich auf der Geraden $Q_{2,3b} Q_{3,3b}$ die Schnittpunkte α, γ, β und α', γ', β' liefern; wir behaupten, daß diese Punkte entsprechende Elemente ähnlicher Punktreihen sind. Um dieses nachzuweisen, ziehen wir noch $Q_{1,3f} Q_{3,4f}$ parallel zu $Q_{2,3} Q_{3,4}$. Dann ist die Punktreihe $Q_{2,3f}, Q_{2,3a}, Q_{2,3}, Q_{2,3b}$ perspektiv zu der Punktreihe $Q_{3,4f}, Q_{3,4a}, Q_{3,4}, Q_{3,4b}$ und die Strahlenbüschel $S(Q_{2,3a}, Q_{2,3b}, Q_{2,3}, Q_{2,3f})$ und $S(Q_{3,4a}, Q_{3,4b}, Q_{3,4}, Q_{3,4f}$ sind mithin projektiv. Dem Strahl $SQ_{2,3f} = SQ_{3,4f}$ entspricht aber auf der Geraden $Q_{2,3b} Q_{3,4b}$ der unendlich ferne Punkt. Es ist also das Doppelverhältnis $(\alpha, \beta, \gamma, \infty)$ gleich dem Doppelverhältnis $(\alpha', \beta', \gamma', \infty)$. Da in beiden Doppelverhältnissen das vierte Element der unendlich ferne Punkt ist, so ist also auch, wie wir behauptet hatten, $\alpha\gamma : \gamma\beta = \alpha'\gamma' : \gamma'\beta'$.

Aus der Kongruenz der Strahlenbüschel $S(Q_{2,3a}, Q_{2,3}, Q_{2,3b}$ und $a_2(a_3, c_3, b_3)$ folgt ferner, daß $a_3 c_3 : c_3 b_3 : \alpha\gamma : \gamma\beta$ ist; mithin ist auch $a_3 c_3 : c_3 b_3 = \alpha'\gamma' : \gamma'\beta'$. Da aber die Strahlen $S\alpha', S\gamma', S\beta'$ in einem Punkte, dem Pole S, zusammentreffen und die Seilabschnitte $a_3 a_4, c_3 c_4, b_3, b_4$ diesen Strahlen bezw. parallel sind, so bedingt die letzte Proportion, daß sich auch die Seilabschnitte $a_3 a_4, c_3 c_4, b_3 b_4$ in einem Punkte, S_3, schneiden müssen. Gerade so können wir zeigen, daß sich auch die Seilabschnitte, die sich zwischen den Richtungslinien der Kräfte P_4 und P_5 ausspannen, einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Allgemein erhalten wir den Satz:

Liegen entsprechende Ecken von Kräftepolygonen, deren Seiten einander bezw. parallel sind, auf geraden Linien, so schneiden sich entsprechende Seiten der zugehörigen Seilpolygone in einem Punkte.

Wir ziehen nunmehr die Geraden $b_4 c_4' a_4'$ parallel zu der Richtungslinie der Kraft P_5. Dann ist Dreieck $b_4 a_4' a_4$ dem Dreieck $Q_{4,5b} Q_{4,5a} a''$ ähnlich. Wie aus dem soeben aufgestellten Satze folgt, ist aber $a_4 c_4 : c_4 b_4$

$= \alpha''\gamma'' : \gamma''\beta''$, also ist auch $a'_4 c'_4 : c'_4 b_4 = Q_{4,5a} Q_{4,5} : Q_{4,5} Q_{4,5b}$. Berücksichtigen wir jetzt noch, daß die verschiedenen Seilabschnitte zwischen den Richtungslinien der Kräfte P_5 und P_6 bezw. der Kräfte P_6 und P_1 wegen der festen Lage der Polstrahlen $SQ_{5,6}$ bew. $SQ_{6,1}$ einander parallel sind, so folgt schließlich $a_7 c_7 : c_7 b_7 = a_6 b_6 : c_6 b_6 = a_5 c_5 : c_6 b_5 = a'_4 c'_4 : c'_4 b_4 = Q_{4,5a} Q_{4,5} : Q_{4,5} Q_{4,5b} = a_7 M_1 : M_1 b_7$. Vergleichen wir die beiden äußeren Verhältnisse dieser Proportion, so erkennen wir, daß der Punkt c_7 mit dem Punkt M_1 zusammenfällt; das Seilpolygon $M_1 c_2 c_3 \ldots c_7$ ist also in der Tat geschlossen.

Aufgabe 7.

Von den in den Ecken eines starren Polygons angreifenden Kräften kennt man sämtliche Bestimmungsstücke bis auf die Größe einer Kraft P_2 und die Größe P_1 und den Neigungswinkel β_1 einer anderen Kraft P_1. Welche Werte müssen die Größen P_1, P_2, β_1 haben, damit Gleichgewicht herrscht?

Lösung. Die Aufgabe läßt sich leicht auf das aus der graphischen Statik bekannte Problem der Bestimmung der Stützreaktionen eines vom Winde getroffenen Daches zurückführen, von dem die eine Ecke um ein festes Gelenk drehbar ist, während die andere Ecke auf einem Rollenlager ruht. Wir beschränken uns daher auf diesen Verweis, indem wir zugleich bemerken, daß auch die im vorhergehenden vorgetragene Methode sich unmittelbar auf unsere Aufgabe anwenden läßt. Die analytische Lösung ist einfach; wir lassen sie folgen.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$(1) \qquad P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 = -\sum_{\nu=3}^{\nu=n} P_\nu \cdot \cos\beta_\nu = c_1;$$

$$(2) \qquad P_1 \cdot \sin\beta_1 + P_2 \cdot \sin\beta_2 = -\sum_{\nu=3}^{\nu=n} P_\nu \cdot \sin\beta_\nu = c_2;$$

$$(3) \qquad P_1 \cdot (y_1 \cdot \cos\beta_1 - x_1 \cdot \sin\beta_1) + P_2 \cdot (y_2 \cdot \cos\beta_2 - x_2 \cdot \sin\beta_2) = \sum_{\nu=3}^{\nu=n} (y_\nu \cdot \cos\beta_\nu - x_\nu \cdot \sin\beta_\nu) = c_3.$$

Aus (1) bezw. (2) folgt

$$(4) \qquad P_1 \cdot \cos\beta_1 = c_1 - P_2 \cdot \cos\beta_2; \quad P_1 \cdot \sin\beta_1 = c_2 - P_2 \cdot \sin\beta_2.$$

Setzen wir diese Werte in (3) ein, so ergibt sich

$$y_1 \cdot (c_1 - P_2 \cdot \cos\beta_2) - x_1 \cdot (c_2 - P_2 \cdot \sin\beta_2) + P_2 \cdot (y_2 \cdot \cos\beta_2 - x_2 \cdot \sin\beta_2) = c_3.$$

Daher wird

$$P_2 = \frac{c_3 - c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot x_1}{(y_2 - y_1) \cdot \cos \beta_2 - (x_2 - x_1) \cdot \sin \beta_2}.$$

Um P_1 zu bestimmen, quadrieren und addieren wir die Gleichungen (4). Es folgt

$$(5) \qquad P_1^2 = (c_1 - P_2 \cdot \cos \beta_2)^2 + (c_2 - P_2 \cdot \sin \beta_2)^2.$$

Ist P_1 gefunden, so erhalten wir endlich den Neigungswinkel β_1 aus einer Gleichung (1) oder (2).

Aufgabe 8.

Man kennt sämtliche Bestimmungsstücke der in den Ecken eines starren Polygons angreifenden Kräfte bis auf die Größe der Kraft P_1 und die Neigungswinkel β_1 und β_2 der Kräfte P_1 und P_2. Man soll die Werte von P_1, β_1, β_2 für den Fall des Gleichgewichtes bestimmen.

Lösung. Auch für diese Aufgabe läßt sich die graphische Lösung nach der geschilderten Methode durchführen. Die analytische Lösung folgt wieder aus den Gleichungen (1) bis (3) der vorigen Aufgabe. Wir berechnen zunächst den Winkel β_2. Dazu setzen wir die aus den Gleichungen (1) und (2) sich für $P_1 \cdot \cos \beta_1$ und $P_1 \cdot \sin \beta_1$ ergebenden Werte in die Gleichung (3) ein. Wir erhalten

$$y_1 \cdot (c_1 - P_2 \cdot \cos \beta_2) - x_1 \cdot (c_2 - P_2 \cdot \sin \beta_2) + P_2 \cdot (y_2 \cdot \cos \beta_2 - x_2 \cdot \sin \beta_4) = c_3,$$

oder

$$P_2 \cdot (x_1 - x_2) \cdot \sin \beta_2 - P_2 \cdot (y_1 - y_2) \cdot \cos \beta_2 - c_2 \cdot x_1 = c_1 \cdot y_1.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\sin \beta_2 = z$, also $\cos \beta_2 = \sqrt{1 - z^2}$, so führt die Bestimmung des Neigungswinkels β_2 auf eine quadratische Gleichung.

Den Wert von P_1 können wir dann weiter aus der Gleichung (5) der vorigen Aufgabe berechnen, und endlich folgt der Wert des Neigungswinkels β_1 wieder aus den Gleichungen (1) und (2).

Anmerkung. Die noch übrigbleibenden Fälle, daß man nämlich alles kennt bis auf P_1, P_2, β_3 oder P_1, β_2, β_3, die zu suchen sind, lassen sich leicht nach denselben Methoden behandeln, wie die vorhergehenden Aufgaben. Die Lösung mag dem Leser überlassen bleiben.

Dritter Teil.

Die Ableitung der Gleichungen des Gleichgewichts der beweglichen Stabkette aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Als Beschluß unserer Arbeit wollen wir noch aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die um ihre Endpunkte drehbare Stabkette herleiten und aus ihnen den Grad der Eliminationsgleichung ermitteln, welche sich ergeben würde, falls es gelänge, das System der Gleichungen des Gleichgewichts auf *eine* Gleichung mit nur *einer* Unbekannten zurückzuführen. Dies wird uns am besten davon überzeugen, wie aussichtslos es ist, für das Problem der beweglichen Stabkette, welches wir durch den geschilderten Hilfsweg zugängig zu machen gesucht haben, eine geschlossene Lösung mit Hilfe der durch die analytische Mechanik gebotenen algebraischen Methoden zu suchen.

Bedienen wir uns wieder der bisher angewandten Bezeichnungen und bedeuten $\delta x_\nu, \delta y_\nu$ die Komponenten der virtuellen Verschiebung des Punktes x_ν, y_ν, so liefert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Beziehung

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} (P_\nu \cdot \cos\beta_\nu \cdot \delta x_\nu + P_\nu \cdot \sin\beta_\nu \cdot \delta y_\nu) = 0.$$

Es ist aber

$$x_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} r_\nu \cdot \cos\alpha_\lambda; \quad y_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} r_\lambda \cdot \sin\alpha_\lambda.$$

Wir variieren die erste dieser Gleichungen und erhalten

$$\delta x_\nu = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} r_\lambda \cdot \sin\alpha_\lambda \cdot \delta\alpha_\lambda,$$

oder wenn wir berücksichtigen, daß

$$\sin\alpha_\lambda = \frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{r_\lambda}$$

ist:

$$(2a) \qquad \delta x_\nu = -[(y_1 - y_0)\cdot\delta\alpha_1 + (y_2 - y_1)\delta_{\alpha 2} + \cdots + (y_\nu - y_{\nu-1})\delta\alpha_\nu].$$

Entsprechend folgt

$$\delta y_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} r_\nu \cdot \cos\alpha_\lambda \cdot \delta\alpha_\lambda,$$

oder da

$$\cos\alpha_\lambda = \frac{x_\lambda - x_{\lambda-1}}{r_\lambda}$$

ist:

(2b) $\delta y_\nu = (x_1 - x_0)\cdot\delta\alpha_1 + (x_2 - x_1)\cdot\delta\alpha_2 + \cdots + (x_\nu - x_{\nu-1})\cdot\delta\alpha_\nu.$

Die Werte (2a) und (2b) setzen wir in die Gleichung (1) und lösen die Summe auf; es folgt

$$\begin{aligned}
&- P_1\cdot\cos\beta_1\cdot(y_1 - y_0)\cdot\delta\alpha_1 + P_1\cdot\sin\beta_1\cdot(x_1 - x_0)\cdot\delta\alpha_1\\
&- P_2\cdot\cos\beta_2\cdot[(y_1 - y_0)\cdot\delta\alpha_1 + (y_2 - y_1)\cdot\delta\alpha_2]\\
&\qquad + P_2\cdot\sin\beta_2\cdot[(x_1 - x_0)\cdot\delta\alpha_1 + (x_2 - x_1)\cdot\delta\alpha_2.]\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&- P_\lambda\cdot\cos\beta_\lambda\cdot[(y_1 - y_0)\cdot\delta\alpha_1 + (y_2 - y_1)\cdot\delta\alpha_2 + \cdots + (y_\lambda - y_{\lambda-1})\cdot\delta\alpha_\lambda]\\
&\qquad + P_\lambda\cdot\sin\beta_\lambda\cdot[(x_1 - x_0)\cdot\delta\alpha_1 + (x_2 - x_1)\cdot\delta\alpha_2 + \cdots + (x_\lambda - x_{\lambda-1})\cdot\delta\alpha_\lambda]\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&- P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}\cdot[y_1 - y_0)\cdot\delta\alpha_1 + (y_2 - y_1)\cdot\delta\alpha_2 + \cdots + (y_{n-1} - y_{n-2})\delta\alpha_{n-1}]\\
&\qquad + P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}\cdot[(x_1 - x_0)\delta\alpha_1 + (x_2 - x_1)\cdot\delta\alpha_2 + \cdots\\
&\qquad + (x_{n-1} - x_{n-2})\cdot\delta\alpha_{n-1}].\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ordnen wir diese Summe nach den Variationen $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2 \ldots \delta\alpha_\lambda \ldots \delta\alpha_{n-1}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(3)\quad &\delta\alpha_1\cdot\{(y_1 - y_0)\cdot[-P_1\cdot\cos\beta_1 - P_2\cdot\cos\beta_2 \ldots - P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}]\\
&+ (x_1 - x_0)\cdot[P_1\cdot\sin\beta_1 + P_2\cdot\sin\beta_2 + \ldots + P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}]\}\\
&+ \delta\alpha_2\cdot\{(y_2 - y_1)\cdot[-P_2\cdot\cos\beta_2 - P_3\cdot\cos\beta_3 \ldots - P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}]\\
&+ (x_2 - x_1)\cdot[P_2\cdot\sin\beta_2 + P_3\cdot\sin\beta_3 + \ldots + P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}]\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \delta\alpha_\lambda\cdot\{(y_\lambda - y_{\lambda-1})\cdot[-P_\lambda\cdot\cos\beta_\lambda - P_{\lambda+1}\cdot\cos\beta_{\lambda+1} \ldots - P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}]\\
&+ (x_\lambda - x_{\lambda-1})\cdot[P_\lambda\cdot\sin\beta_\lambda + P_{\lambda+1}\cdot\sin\beta_{\lambda+1} + \ldots + P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}]\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \delta\alpha_{n-1}\cdot\{(y_{n-1} - y_{n-2})\cdot[-P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}]\\
&\qquad + (x_{n-1} - x_{n-2})\cdot[P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}]\}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung dürfen wir die Variationen $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_n$ bis auf zwei Variationen, welche von den übrigen abhängen, als willkürlich ansehen. Den Zusammenhang der beiden nicht willkürlichen Variationen mit den übrigen erhalten wir aus der Bedingung, daß die beiden Endpunkte der Stabkette fest sein sollen, die Variationen ihrer Koordinaten also Null sind. Für den Endpunkt M_n folgt daher nach den Formeln (2^a) und (2^b)

$$0 = (y_1 - y_0) \cdot \delta\alpha_1 + (y_2 - y_1) \cdot \delta\alpha_2 + \ldots + (y_n - y_{n-1}) \cdot \delta\alpha_n;$$

$$0 = (x_1 - x_0) \cdot \delta\alpha_1 + (x_2 - x_1) \cdot \delta\alpha_2 + \ldots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \delta\alpha_n.$$

Als abhängige Variationen wollen wir nun $\delta\alpha_1$ und $\delta\alpha_2$ betrachten. Durch Auflösen der beiden letzten Gleichungen erhalten wir für sie die Werte:

$$\delta\alpha_1 = \frac{-(y_2-y_1)\cdot[(x_3-x_2)\cdot\delta\alpha_3+(x_4-x_3)\cdot\delta\alpha_4+\ldots+(x_n-x_{n-1})\cdot\alpha\delta_n]+(x_2-x_1)\cdot[(y_3-y_2)\cdot\delta\alpha_3+(y_4-y_3)\cdot\delta\alpha_4+\ldots+(y_n-y_{n-1})\cdot\delta\alpha_n]}{(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)-(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)};$$

$$\delta\alpha_2 = \frac{(y_1-y_0)\cdot[(x_3-x_2)\cdot\delta\alpha_3+(x_4-x_3)\cdot\delta\alpha_4+\ldots+(x_n-x_{n-1})\cdot\delta\alpha_n]-(x_1-x_0)\cdot[(y_3-y_2)\cdot\delta\alpha_3+(y_4-y_3\cdot\delta\alpha_4+\ldots+(y_n-y_{n-1})\cdot\delta\alpha_n]}{(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)-(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)}.$$

Wir setzen jetzt diese Werte von $\delta\alpha_1$ und $\delta\alpha_2$ in die Gleichung (3) ein, multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner

$$(x_1 - x_0) \cdot (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) \cdot (x_2 - x_1)$$

herauf und ordnen nach

$$\delta\alpha_3,\ \delta\alpha_4,\ \ldots\ \delta\alpha_n.$$

Dann finden wir

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \delta\alpha_3 \cdot \{ & [(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_2)-(y_1-y_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_3-x_2)] \\
& \times[-P_1\cdot\cos\beta_1-P_2\cdot\cos\beta_2\cdot\ldots-P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}] \\
& +[(x_1-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_2)-(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_3-x_2)] \\
& \times[P_1\cdot\sin\beta_1+P_2\cdot\sin\beta_2+\ldots+P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}] \\
& +[(y_1-y_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_3-x_2)-(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(y_3-y_2)] \\
& \times[-P_2\cdot\cos\beta_2-P_3\cdot\cos\beta_3\cdot\ldots-P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}] \\
& +[(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_3-x_2)-(x_1-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_2)] \\
& \times[P_2\cdot\sin\beta_2+P_3\cdot\sin\beta_3+\ldots+P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}] \\
& +[(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(y_3-y_2)-(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_2)] \\
& \times[-P_3\cdot\cos\beta_3-P_4\cdot\cos\beta_4\cdot\ldots-P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}] \\
& +[(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_3-x_2)-(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_3-x_2)] \\
& \times[P_3\cdot\sin\beta_3+P_4\cdot\sin\beta_4+\ldots+P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}] \\
+\,\delta\alpha_4\cdot\{ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\,\delta\alpha_\lambda\cdot\{ & [(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_\lambda-y_{\lambda-1})-(y_1-y_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_\lambda-x_{\lambda-1})] \\
& \times[-P_1\cdot\cos\beta_1-P_2\cdot\cos\beta_2\cdot\ldots-P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}] \\
& +[(x_1-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_\lambda-y_{\lambda-1})-(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_\lambda-x_{\lambda-1})] \\
& \times[P_1\cdot\sin\beta_1+P_2\cdot\sin\beta_2+\ldots+P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}] \\
& +[(y_1-y_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_\lambda-x_{\lambda-1})-(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(y_\lambda-y_{\lambda-1})] \\
& \times[-P_2\cdot\cos\beta_2-P_3\cdot\cos\beta_3\cdot\ldots-P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}] \\
& +[(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_\lambda-x_{\lambda-1})-(x_1-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_\lambda-y_{\lambda-1})] \\
& \times[P_2\cdot\sin\beta_2+P_3\cdot\sin\beta_3+\ldots+P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}] \\
& +[(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(y_\lambda-y_{\lambda-1})-(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_\lambda-y_{\lambda-1})] \\
& \times[-P_\lambda\cdot\cos\beta_\lambda-P_{\lambda+1}\cdot\cos\beta_{\lambda+1}\cdot\ldots P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}] \\
& +[(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_\lambda-x_{\lambda-1})-(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_\lambda-x_{\lambda-1})] \\
& \times[P_\lambda\cdot\sin\beta_\lambda+P_{\lambda+1}\cdot\sin\beta_{\lambda+1}+\ldots+P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}]\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\,\delta\alpha_n\cdot\{ & [(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_n-y_{n-1})-(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_n-x_{n-1})] \\
& \times[-P_1\cdot\cos\beta_1-P_2\cdot\cos\beta_2\cdot\ldots P_{n-1}\cdot\cos\beta_{-1}] \\
& +[(x_1-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_n-y_{n-1})-(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_n-x_{n-1})] \\
& \times[P_1\cdot\sin\beta_1+P_2\cdot\sin\beta_2+\ldots+P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}] \\
& +[(y_1-y_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(x_n-x_{n-1})-(x_1-x_0)\cdot(y_2-y_1)\cdot(y_n-y_{n-1})] \\
& \times[-P_2\cdot\cos\beta_2-P_3\cdot\cos\beta_3\cdot\ldots P_{n-1}\cdot\cos\beta_{n-1}] \\
& +[(y_1-y_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_n-x_{n-1})-(x_1-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(y_n-y_{n-1})] \\
& \times[P_2\cdot\sin\beta_2+P_3\cdot\sin\beta_3+\ldots+P_{n-1}\cdot\sin\beta_{n-1}]\} \\
& =0.
\end{aligned}
$$

Setzen wir in der letzten Gleichung die Faktoren der nunmehr als voneinander unabhängig zu betrachtenden Variationen $\delta\alpha_3$, $\delta\alpha_4$, $\ldots.\delta\alpha_n$ einzeln gleich Null, so erhalten wir $n-2$ Bestimmungsgleichungen für die $2n-2$ Unbekannten $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots. x_\lambda, y_\lambda; \ldots. x_{n-1}, y_{n-1}$. Die noch fehlenden $(2n-2)-(n-2)=n$ Bestimmungsgleichungen ergeben sich aus der Überlegung, daß der Abstand von je zwei aufeinander folgenden Punkten der Stabkette durch die Länge des sie verbindenden Stabes bestimmt ist. Hieraus folgen die n Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 &= r_1^2; \\ (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 &= r_2^2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2 &= r_n^2. \end{aligned}$$

Wie ein Blick auf die Faktoren von $\delta\alpha_3$, $\delta\alpha_4$, $\ldots.\delta\alpha_n$ in Gleichung (4) zeigt, sind die ersten $n-2$ Bestimmungsgleichungen in bezug auf die Unbekannten vom 3ten Grade, während die Gleichungen (5) den 2ten Grad besitzen. Wir schließen hieraus, daß für jede der Unbekannten

$$N = 3^{n-2}\cdot 2^n$$

Wurzeln vorhanden sind. Wäre es daher möglich, die $2n-2$ Gleichungen mit $2n-2$ Unbekannten auf nur eine Gleichung mit einer Unbekannten zurückzuführen, so müßte diese vom $3^{n-2}\cdot 2^n$-ten Grade sein. In dem von uns durchgeführten Beispiele einer Stabkette mit $n=3$ beweglichen Gliedern würde die sich ergebende Gleichung also bereits den $3^1\cdot 2^3 = 24^{\text{ten}}$ Grad annehmen und ihre Auflösung sich somit den gewöhnlichen algebraischen Methoden gänzlich entziehen.

Anhang.

Die Fehlergrenzen der aufgestellten Näherungslösungen.

Bei der Entwicklung der im voranstehenden dargelegten Korrekturmethoden sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, daß in der Fortsetzung nach dem Taylorschen Lehrsatze kleine Größen höherer als der ersten Ordnung als belanglos fortgelassen werden dürfen. Da die Funktionen, zu denen wir gelangt sind, reguläre sind, wie sie es ja der Natur der Aufgabe nach sein müssen, so ist die Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung sicher gestattet, solange die Inkremente der Funktionswerte sehr kleine Größen sind, und es fragt sich daher, welcher Fehler im Resultat durch die Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung hervorgerufen wird, falls die Inkremente eine beträchtlichere Größe annehmen.

Was die Untersuchung dieser Frage mit den Hilfsmitteln der Analysis betrifft, so besteht sie offenbar in der Feststellung des Einflusses, welchen die verschiedenen möglichen Werte des an eine beliebige Stelle in der Entwicklung nach dem Taylorschen Lehrsatze gesetzten Restgliedes auszuüben vermögen. Eine solche Betrachtung scheint für mehrere Variable zuerst von W. Wagner[1]) durchgeführt worden zu sein. Die im folgenden geschilderte Methode stimmt in ihrem Grundgedanken, wie es nicht anders sein kann, mit derjenigen von Wagner überein, unterscheidet sich aber von ihr dadurch, daß behufs Erzielung möglichster Einfachheit die Restgliedbetrachtung nicht über die Ableitungen der ersten Ordnung hinausgeht. Hierdurch wird der Fehlerbereich entsprechend vergrößert; aber die Genauigkeit dürfte für die hier vorgetragenen geometrischen Konstruktionen ausreichen. Die Methode ist, der ganzen Art dieser Arbeit entsprechend, mehr geometrisch als analytisch.

Indem wir uns an die Bezeichnungen der Aufgabe 1 anschließen, mögen die aufzulösenden Funktionen

$$f_a(\xi,\ \eta) = x_n,$$
$$f_b(\xi,\ \eta) = y_n$$

sein, wo x_n und y_n bekannte, feste Werte besitzen. Die graphisch ermittelten Näherungswerte eines Wurzelpaares bezeichnen mir mit ξ' und η' und es sei

$$f_a(\xi',\ \eta') = x'_n,$$
$$f_b(\xi',\ \eta') = y'_n.$$

Ferner sei aus der graphischen Darstellung dieser Funktionen bekannt, daß die wahren Werte der Wurzeln in dem Intervalle $\xi_1 - \xi'$ bzw. $\eta_1 - \eta'$ enthalten sind. Nennen wir dann die gesuchten Inkremente $\varDelta\xi'$ und $\varDelta\eta'$ und ist $x_n - x'_n = \varDelta x'_n$ und $y_n - y'_n = \varDelta y'_n$, so bestehen die genauen Formeln

$$\varDelta x'_n = \frac{\partial}{\partial\xi}\Big[f_a(\xi',\ \eta' + \vartheta_1\cdot(\eta_1 - \eta'))\Big]\cdot\varDelta\xi'$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\eta}\Big[f_a(\xi' + \vartheta_2\cdot(\xi_1 - \xi'),\ \eta' + \vartheta_1\cdot(\eta_1 - \eta'))\Big]\cdot\varDelta\eta',$$
$$\varDelta y'_n = \frac{\partial}{\partial\xi}\Big[f_b(\xi',\ \eta' + \vartheta_1\cdot(\eta_1 - \eta'))\Big]\cdot\varDelta\xi'$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\eta}\Big[f_b(\xi' + \vartheta_2\cdot(\xi_1 - \xi'),\ \eta' + \vartheta_1\cdot(\eta' - \eta'))\Big]\cdot\varDelta\eta',$$

wobei $0 \leqq \vartheta_1 \leqq 1,\ 0 \leqq \vartheta_2 \leqq 1$ ist.

1) Vgl. W. Wagner, Bestimmung der Genauigkeit, welche die Newtonsche Methode zur Berechnung der Wurzeln darbietet (lateinisch 1855, deutsch 1860; Leipzig). Eine Wiedergabe der Wagnerschen Methode findet sich in O. Biermann, Über die näherungsweise Bestimmung der Lösungen mehrerer Gleichungen, Monatsschrift für Mathematik und Physik. 11. Jahrgang, 1900.

In diesen Formeln wollen wir für die Faktoren von $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$ bzw. die Abkürzungen Θ_{a1}, Θ_{a2} und Θ_{b1}, Θ_{b2} eingesetzt denken, so daß wir also auch schreiben können

$$\Delta x'_n = \Theta_{a1}\cdot\Delta\xi' + \Theta_{a2}\cdot\Delta\eta',$$

$$\Delta y'_n = \Theta_{b1}\cdot\Delta\xi' + \Theta_{b2}\cdot\Delta\eta'.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$ ergibt:

$$\Delta\xi' = \frac{\Theta_{b2}\cdot\Delta x'_n - \Theta_{a2}\cdot\Delta y'_n}{\Theta_{a1}\cdot\Theta_{b2} - \Theta_{b1}\cdot\Theta_{a2}},$$

$$\Delta\eta' = \frac{-\Theta_{b1}\cdot\Delta x'_n = \Theta_{a1}\cdot\Delta y'_n}{\Theta_{a1}\cdot\Theta_{b2} - \Theta_{b2}\cdot\Theta_{a2}}.$$

Wir hätten nunmehr die größten und die kleinsten Werte zu bestimmen, die nach diesen Formeln $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$ annehmen können, wenn wir die unbestimmten Größen ϑ_1 und ϑ_2 die Werte von 0 bis 1 durchlaufen lassen. Zwischen diesen Grenzen müßten dann die Werte von $d\xi$ und $d\eta$ liegen, die wir in der zu Aufgabe 1 gehörigen Korrektionsrechnung dadurch gewonnen haben, daß wir ϑ_1 und ϑ_2 gleich Null setzten. Diese Grenzwerte dürften sich infolge des verwickelten Charakters der Funktionen f_a und f_b wohl nur durch ein ziemlich umständliches Verfahren genau auffinden lassen.

Verzichten wir indessen auf die Genauigkeit, welche allein die analytische Behandlung zu gewähren vermag, so läßt sich auf Grund der graphishen Darstellung der aufgestellten Funktionen leicht die Größe der durch die lineare Interpolation herbeigeführten Fehler beurteilen. Die hierauf bezüglichen Erörterungen wollen wir wegen der überwiegenden Wichtigkeit der Aufgabe 1 jedoch nur für diese anstellen.

Wie wir in der graphostatischen Lösung der Aufgabe 1 gesehen haben, entsprechen den geradlinigen Polbahnen SS_1S_2 und $SS'_1S'_2$ (Fig. 3) bezw. die Kurvenabschnitte $m_3\mu_1\mu_2$ und $m_3\mu'_1\mu'_2$ im Plane des Seilpolygons. Ergänzen wir nun den rechten Winkel $S_2SS'_2$ zu dem Quadrate $S_2SS'_2S''_2$, so erhalten wir als seine Abbildung ein von krummlinigen Seiten begrenztes Viereck $\mu_2m_3\mu'_2\mu''_2$, dessen Gegenseiten annähernd gleichlaufend sind. Dieses Viereck haben wir von Zeichenfehlern abgesehen als die genaue Abbildung des bezeichneten Quadrates im Kräftepolygon aufzufassen, welche durch die Funktionen $x_n = f_a(\xi, \eta)$ und $y_n = f_b(\xi, \eta)$ vermittelt wird. In der Korrektionsrechnung haben wir diese Funktionen nach dem Taylorschen Lehrsatz fortgesetzt, wobei wir uns auf die linearen Glieder beschränkt haben. Benutzen wir

nun diese linearen Fortsetzungsfunktionen (Aufgabe 1, Abschnitt B, Gleichungen 5) als Abbildungsfunktionen, so erhalten wir als Abbildung des Quadrates $S_2SS_2'S_2''$ in der Ebene des Seilpolygons ein Parallelogramm $\mu_{2l}m_3\mu_{2l}'\mu_{2l}''$, dessen Seiten $m_3\mu_{2l}$ und $m_3\mu_{2l}'$ bezw. die Tangenten der Kurven $m_3\mu_2$ und $m_3\mu_2'$ in dem Punkte m_3 sind. Wir finden somit die Richtungen der Seiten dieses Parallelogramms dadurch, daß wir in dem Punkte m_3 an die Kurven $m_3\mu_2$ und $m_3\mu_2'$ die Tangenten konstruieren. Um auch die Längen seiner Seiten zu bestimmen, müssen wir für den Pol S die Werte der in den Abbildungsfunktionen auftretenden Faktoren von $d\xi$ und $d\eta$ berechnen, was am besten nach der am Schlusse des Abschnittes B, Aufgabe 1, dargelegten Methode geschieht. Für das in der 1. Aufgabe behandelte Zahlenbeispiel verläuft die Bestimmung dieser Größen folgendermaßen. Aus der Figur finden wir

$$\sphericalangle(\varDelta x, t) = \sphericalangle(\varDelta x, m_3\mu_{2l}) = -8^0{,}5\,,$$

$$\sphericalangle(\varDelta x, t') = \sphericalangle(\varDelta x, m_3'\mu_{2l}') = 97^0.$$

$$\varrho_1 = 3{,}2\,, \quad \varrho_2 = 3{,}28\,; \quad \varrho_3 = 3{,}56\,.$$

Für die zu berechnenden Faktoren bestehen daher die Bestimmungsgleichungen

$$a_1 + b_2 = \sum \frac{r}{\varrho} = \frac{4}{3{,}2} + \frac{3}{3{,}28} + \frac{2}{3{,}56} = 2{,}73\,,$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \mathrm{tg}\,(-8^0{,}5) = -0{,}149\,,$$

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} = \mathrm{tg}\,97^0 = -8{,}14$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen sind $a_1 = 1{,}233$, $a_2 = b_1 = -0{,}184$, $b_2 = 1{,}50$, und wir erhalten somit als Abbildungsfunktionen die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varDelta x &= 1{,}233 \cdot \varDelta\xi - 0{,}184 \cdot \varDelta\eta\,, \\ \varDelta y &= -0{,}184 \cdot \varDelta\xi + 1{,}50 \cdot \varDelta\eta\,. \end{aligned}$$

Da die Koordinaten des Punktes S_2 $\varDelta\xi = 1$, $\varDelta\eta = 0$ sind, so folgt, indem wir diese Werte in die Gleichungen (1) einsetzen, für die Koordinaten des Punktes μ_{2l} inbezug auf ein Koordinatensystem, dessen Achsen wir durch den Punkt m_3 parallel zu den Achsen x, y legen, $\varDelta x = 1{,}233$, $\varDelta y = -0{,}184$. Daher finden wir für die Länge der Parallelogrammseite $m_3\mu_{2l}$

$$\overline{m_3\,\mu_{2l}} = \sqrt{1{,}233^2 + 0{,}184^2} = 1{,}25\,.$$

Entsprechend finden wir für die zweite Parallelogrammseite, indem wir $\varDelta\xi = 0$ und $\varDelta\eta = -1$ setzen,

$$\overline{m_3\,\mu'_{2l}} = \sqrt{0{,}184^2 + 1{,}50^2} = 1{,}51\,.$$

Bei Benutzung der linearen Abbildungsfunktionen (1) entspricht demnach der Parallelogrammseite $\mu_{2l}\,\mu''_{2l}$ im Kräfteplane die Seite $S_2\,S''_2$ und daher einer Geraden, die wir durch den Punkt μ''_2 parallel zu der Seite $\mu_{2l}\,\mu''_{2l}$ gezogen denken, im Kräfteplane eine Gerade, die in bezug auf das Quadrat $S_2SS'_2S''_2$ ebenso gelegen ist wie die Parallele durch den Punkt μ''_2 inbezug auf das Parallelogramm $\mu_{2l}\,m_3\,\mu'_{2l}\,\mu''_{2l}$. In Wirklichkeit, d. h. bei Benutzung der vollständigen Abbildungsfunktionen, entspricht aber dieser Parallelen eine Linie im Kräfteplane, die sich der Seite $S_2S''_2$ anschließend diese im Punkt S''_2 schneidet. Bezeichnen wir folglich in bezug auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit den Geraden $m_3\,\mu_{2l}$ und $m_3\,\mu'_{2l}$ als Achsen die Koordinaten des Punktes μ''_2 mit μ und μ', und sind die Koordinaten des dem Punkte μ''_2 durch die linearen Abbildungsfunktionen (1) zugeordneten Poles $\varDelta\xi_l$ und $\varDelta\eta_l$, die Koordinaten des wahren Poles dagegen $\varDelta\xi$ und $\varDelta\eta$, so ergeben sich die Proportionen

$$\varDelta\xi : \varDelta\xi_l = \overline{m_3\mu_{2l}} : \mu\,,$$

$$\varDelta\eta : \varDelta\eta_l = \overline{m_3\,\mu'_{2l}} : \mu'\,.$$

Hieraus folgen für die durch die linearen Abbildungsfunktionen herbeigeführten Fehler der Koordinaten des Poles S''_2 die Werte

$$\varDelta\xi - \varDelta\xi_l = \frac{\overline{m_3\mu_{2l}} - \mu}{\mu} \cdot \varDelta\xi_l\,,$$

$$\varDelta\eta - \varDelta\eta_l = \frac{\overline{m_3\mu'_{2l}} - \mu'}{\mu'} \cdot \varDelta\eta_l\,.$$

Sollen die rechten Seiten dieser Formeln auch die obere Grenze der Fehler einbegreifen, welche sich ergeben, wenn wir mit Hilfe der linearen Abbildungsfunktionen die Polkoordinaten berechnen, welche einem beliebigen Punkte der Begrenzungskurven $\mu''_2\,\mu_2$ und $\mu''_2\,\mu'_2$ zugehören, so müssen wir die Quotienten

$$\frac{\overline{m_3\mu_{2l}} - \mu}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{m_3\mu'_{2l}} - \mu'}{\mu'}$$

auf diejenigen Punkte der Begrenzungskurven beziehen, für welche sie die größten Werte erreichen. In welchen Punkten dieses stattfindet,

läßt sich aber leicht aus der Figur ersehen. Um nun den Gültigkeitsbereich der gewonnenen Fehlerformeln auch auf das Innere des Kurvenvierecks auszudehnen, denken wir uns das Quadrat $S_2 S S_2' S_2''$ durch zwei Scharen von Parallelen zu den Seiten des Quadrats in Elementarquadrate aufgeteilt und mit Hilfe der Abbildungsfunktionen $x_n = f_a(\xi, \eta)$, $y_n = f_b(\xi, \eta)$ das Kurvenviereck $\mu_2 m_3 \mu_2' \mu_2''$ in die diesen Elementarquadraten entsprechenden Elementarvierecke zerlegt. Infolge der Stetigkeit der Abbildungsfunktionen werden diese Elementarvierecke dem Kurvenvierecke $\mu_2 m_3 \mu_2' \mu_2''$ annähernd ähnlich sein, und wir können mithin die aufgestellten Fehlerformeln auf die Elementarteile übertragen. Machen wir daher den graphisch ermittelten Pol S_3 und den ihm zugeorneten Endpunkt M_3' der Stabkette zu den Ausgangspunkten der Fortsetzung, so erhalten wir die Fehlerformeln

$$
(2)\qquad d\xi - d\xi_l = \frac{\overline{m_3' d\mu_{2l}} - d\mu}{d\mu} \cdot d\xi_l,
$$

$$
d\eta - d\eta_l = \frac{\overline{m_3' d\mu_{2l}'} - d\mu'}{d\mu'} \cdot d\eta_l,
$$

wo mit $d\mu_{2l}$ und $d\mu_{2l}'$ die Eckpunkte des Elementarparallelogramms bezeichnet sind, die den Eckpunkten μ_{2l} und μ_{2l}' des ganzen Parallelogrammes $\mu_{2l} m_3 \mu_{2l}' \mu_{2l}''$ entsprechen, während die Größen $d\mu$, $d\mu'$; $d\xi$, $d\eta$; $d\xi_l$, $d\eta_l$ eine analoge Bedeutung haben, wie die oben erklärten Größen μ, μ'; $\Delta\xi$, $\Delta\eta$; $\Delta\xi_l$, $\Delta\eta_l$.

In den Formeln (2) müssen wir noch die Differenzen $\overline{m_3' d\mu_{2l}} - d\mu$ und $\overline{m_3' d\mu_{2l}'} - d\mu'$ auf bekannte Größen zurückführen. Diese Differenzen stehen nun, infolge der Krümmung der Seiten der Kurvenvierecke zu den Größen $d\mu$ und $d\mu'$ nicht in dem gleichen Verhältnisse wie die Differenzen $\overline{m_3 \mu_{2l}} - \mu$ und $\overline{m_3 \mu_{2l}'} - \mu'$ zu den Größen μ und μ'. Um dieses zu erkennen, denken wir die Kurven $m_3 \mu_2$ und $m_3 \mu_2'$ durch ihnen sich möglichst anschmiegende Parabelbogen ersetzt. Die Gleichungen etwa des ersten dieser Bogen werden die Form haben

$$
\Delta x = a_1 \cdot \Delta\xi + a_2 \cdot \Delta\eta + a_{11} \cdot \Delta\xi^2 + a_{12} \cdot \Delta\xi \cdot \Delta\eta + a_{22} \cdot \Delta\eta^2,
$$

$$
\Delta y = b_1 \cdot \Delta\xi + b_2 \cdot \Delta\eta + b_{11} \cdot \Delta\xi^2 + b_{12} \cdot \Delta\xi \cdot \Delta\eta + b_{22} \cdot \Delta\eta^2.
$$

Substrahieren wir von diesen Gleichungen diejenigen der linearen Abbildungsfunktionen

$$
\Delta x_l = a_1 \cdot \Delta\xi + a_2 \cdot \Delta\eta,
$$

$$
\Delta\eta_l = b_1 \cdot \Delta\xi + b_2 \cdot \Delta\eta,
$$

so folgt

$$\Delta x - \Delta x_l + a_{11} \cdot \Delta \xi^2 + a_{12} \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta + a_{22} \cdot \Delta \eta^2,$$

$$\Delta y - \Delta y_l = b_{11} \cdot \Delta \xi^2 + b_{12} \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta + b_{22} \cdot \Delta \eta^2.$$

Aus diesen Gleichungen schließen wir, daß der Abstand der Linien $\mu_2 \mu_2''$ und $\mu_{2l} \mu_{2l}''$ nicht der Länge der Seite des abgebildeten Quadrates einfach proportional sondern dem Quadrate dieser Länge proportional ist. Da sich ferner $d\xi$ annähernd zu $\Delta\xi$ verhält wie $d\mu$ zu μ, so besteht somit die Proportion

$$\frac{\overline{m_3' d\mu_{2l}} - d\mu}{\overline{m_3 \mu_2}} = \frac{(d\mu)^2}{\mu^2};$$

analog ist

$$\frac{\overline{m_3' d\mu_{2l}'} - d\mu'}{\overline{m_3 \mu_2'}} = \frac{(d\mu')^2}{(\mu')^2}.$$

Führen wir die Werte, die sich für die gesuchten Differenzen aus diesen Proportionen ergeben, in die Gleichungen (2) ein, so finden wir schließlich für die durch die lineare Interpolation hervorgerufenen Fehler die Formeln

$$d\xi - d\xi_l = \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{\overline{m_3 \mu_{2l}} - \mu}{\mu} \cdot d\xi_l,$$

$$d\eta - d\eta_l = \frac{d\mu'}{\mu'} \cdot \frac{\overline{m_3 \mu_{2l}'} - \mu'}{\mu'} \cdot d\eta_l,$$

in denen wir, um das Maximum der bestimmenden Fehler zu erhalten, für μ und μ' die kleinsten aus der Figur folgenden Werte einzusetzen haben, während sich die Werte von $d\mu$ und $d\mu'$ mit Hilfe der Transformationsformeln

$$d\mu = dx_n' \cdot \frac{\sin(\Delta x,\, m_3 \mu_{2l}')}{\sin(m_3 \mu_{2l},\, m_3 \mu_{2l}')} - dy_n' \cdot \frac{\cos(\Delta x,\, m_3 \mu_{2l}')}{\sin(m_3 \mu_{2l},\, m_3 \mu_{2l}')},$$

$$d\mu' = -\, dx_n' \cdot \frac{\sin(\Delta x,\, m_3 \mu_{2l})}{\sin(m_3 \mu_{2l},\, m_3 \mu_{2l}')} + dy_n' \cdot \frac{\cos(\Delta x,\, m_3 \mu_{2l})}{\sin(m_3 \mu_{2l},\, m_3 \mu_{2l}')}$$

aus den bekannten Werten von dx_n' und dy_n' berechnen lassen.

Die Anwendung dieser Formeln auf unser Beispiel ergibt

$$d\mu = 0{,}026 \cdot \frac{\sin 97^\circ}{\sin(97^\circ - (-8^\circ{,}5))} - 0{,}097 \cdot \frac{\cos 97^\circ}{\sin(97^\circ - (-8^\circ{,}5))} = 0{,}039,$$

$$d\mu' = -0{,}026 \cdot \frac{\sin(-8^\circ{,}5)}{\sin(97^\circ - (-8^\circ{,}5))} + 0{,}097 \cdot \frac{\cos(-8^\circ{,}5)}{\sin(97^\circ - (-8^\circ{,}5))} = 0{,}140.$$

Da ferner, wie aus der Figur folgt, $\mu = 0{,}93$ und $\mu' = -1{,}57$ ist und, wie wir bereits berechnet haben, $\overline{m_3 \mu_{2l}} = 1{,}25$ und $\overline{m_2 \mu'_{2l}} = -1{,}51$ ist, so erhalten wir mithin für die gesuchten Fehler die Werte

$$d\xi - d\xi_l = \frac{0{,}039}{0{,}93} \cdot \frac{1{,}25 - 0{,}93}{0{,}93} \cdot 0{,}0375 = 0{,}00054,$$

$$d\eta - d\eta_l = \frac{0{,}140}{-1{,}57} \cdot \frac{-1{,}51 + 1{,}57}{-1{,}57} \cdot 0{,}0644 = 0{,}00022,$$

oder in Prozenten

$$100 \cdot \frac{d\xi - d\xi_l}{d\xi_l} = 1{,}45\%,$$

$$100 \cdot \frac{d\eta - d\eta_l}{d\eta_l} = 0{,}34\%.$$

Schlußbemerkung.

Die vorliegende Arbeit ist von mir im wesentlichen am Schlusse des Jahres 1905 angefertigt worden. Infolge meiner Berufung an die Germaniaschule in Buenos-Aires im Beginn des folgenden Jahres war es mir nicht mehr möglich, die Drucklegung noch selbst zu besorgen. Auf meine Bitte hat sich mein Studienfreund, Herr Professor Dr. Georg Hamel in Brünn, freundlichst der mit dem Drucke verbundenen Mühe unterzogen. Hierfür wie für die kritische Durchsicht und die Verbesserungen, die er der Arbeit hat zuteil werden lassen, statte ich ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank ab.

Bei der Anfertigung der Arbeit habe ich das Glück gehabt, mich mit meinem Stiefvater, Herrn Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe, über die zu erstrebenden Ziele unterhalten zu können. Ihm verdanke ich insbesondere die Anregung, die Untersuchung, die sich zunächst auf einen geometrischen Gedanken beschränkte, auch nach der analytischen Seite zu vervollständigen. Meinem Stiefvater widme ich die Arbeit in Dankbarkeit und Verehrung.

Buenos-Aires, den 21. November 1906.

Alfred Jatho.

Über die Anwendung der Fluchtpunktschiene in der Perspektive.

Von Friedrich Schilling in Danzig-Langfuhr.

Eine neuausgeführte Fluchtpunktschiene, die am Schlusse dieses Aufsatzes beschrieben ist, gibt mir Veranlassung, ihre Anwendung in der Perspektive überhaupt zu besprechen, vor allem aber eine neue Methode ihrer Einstellung zu entwickeln, die einfacher als alle bisher bekannten ist. Ich hoffe damit zur weiteren Verbreitung dieses nützlichen Instrumentes beizutragen.

I. Das Problem der Fluchtpunktschiene, insbesondere seine historische Entwicklung.

Es handelt sich um die folgende Aufgabe:

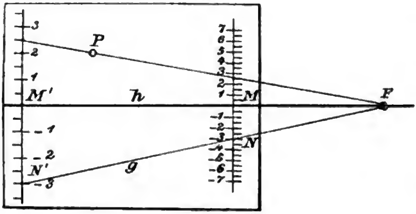
1. *Nach einem außerhalb des Zeichenblattes gelegenen Punkte F, der als Schnitt zweier gegebener Geraden g, h bestimmt ist, sind durch beliebig viele Punkte der Ebene die Verbindungsgeraden zu ziehen.*

Diese Aufgabe kommt bekanntlich besonders in der angewandten Perspektive vor, wobei es sich um den unzugänglichen Fluchtpunkt F paralleler Geraden des Raumes handelt; die eine der gegebenen beiden Geraden, in der Bildebene etwa h, ist dann zumeist der Horizont. Schon der leichteren Ausdrucksweise wegen wollen wir uns im folgenden an diese Vorstellung anlehnen und demnach die eine Gerade stets horizontal wählen und kurz als „*Horizont*“ h und den Schnittpunkt F beider Geraden g, h als *Fluchtpunkt* bezeichnen.

Von den rein konstruktiven Lösungen obiger Aufgabe — alle die zahlreichen Methoden, bei denen es sich nur um das Ziehen einer *einzigen* neuen Verbindungsgeraden nach dem unzugänglichen Punkte F handelt, kommen natürlich hier nicht in Betracht — ist mir die folgende, an sich auch recht brauchbare, als die einfachste bekannt. Man zieht zwei, die Gerade h in M und M' schneidende Parallele q, q', etwa zwei Senkrechte zu h am rechten und linken Rande des Zeichenblattes, und zeichnet auf ihnen mit Maßzahlen versehene, hinreichend nahe Einteilungen, indem man die Strecken MN und $M'N'$ zwischen den Geraden g, h zunächst in dieselbe Anzahl gleich bezifferter Teile teilt und hierbei die Punkte MM' als Anfangspunkte der Maßstäbe wählt (Fig. 1). Diejenige durch einen beliebigen Punkt P gehende

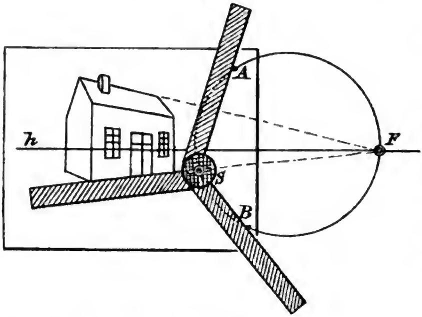
Gerade, welche die Maßstäbe auf den Hilfsgeraden q, q' in gleich bezifferten Punkten schneidet, ist dann die gesuchte Verbindungslinie PF. (Das Rechteck der Figur 1 soll hier wie in den späteren Figuren das Reißbrett andeuten.)

Fig. 1.



Die Methode erfordert immerhin große Vorbereitungen. Daher hat man besondere Instrumente zu konstruieren gesucht, welche die Aufgabe bequemer zu lösen gestatten. Unter diesen nimmt die *„dreiteilige Fluchtpunktschiene“* wegen ihrer Einfachheit weitaus die erste Stelle ein.[1])

Fig. 2.



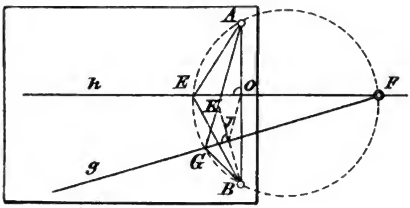
Die Fluchtpunktschiene besteht bei allen in Einzelheiten verschiedenen Konstruktionen stets aus drei Linealen, nämlich zwei *„Gleitschienen“* und einer *„Zeichenschiene“*, die um ein gemeinsames Gelenk an ihren Enden drehbar sind, nach der Einstellung auf den durch g, h bestimmten Fluchtpunkt F aber durch eine Schraube mit Mutter in der gewünschten Lage gegeneinander festgestellt werden (Fig. 2). Beim Gebrauch der Fluchtpunktschiene nach ihrer Einstellung gleiten die beiden Gleitschienen an zwei auf dem Reißbrett eingesteckten Stiften

1) Sie wurde zuerst 1814 von Peter Nicholson erfunden und 1865 aufs neue von Wilh. Streckfuß. Nähere historische Angaben enthält der von uns noch öfter zu nennende Aufsatz des Herrn R. Mehmke: Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene, Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 42, Leipzig 1897, S. 99—103. Vgl. auch W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892, S. 227 und Nachtrag, München 1893, S. 42, sowie W. Streckfuß, Lehrbuch der Perspektive, 2. Aufl. Breslau 1874, S. 54—56.

A, B, die wir zunächst als punktförmig annehmen wollen. Nach dem Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen beschreibt dann der die Gelenkmitte bildende Schnittpunkt S der „Gleitkanten“ einen Bogen des durch A, B, F bestimmten Kreises und die „Zeichenkante“ der dritten Schiene, die auch durch S geht, trifft (nötigenfalls über S hinaus verlängert) stets den Punkt F.[1])

Offenbar beruht die ganze Schwierigkeit bei der Anwendung der Fluchtpunktschiene allein darin, *wie sie auf einen durch die Geraden g, h gegebenen Fluchtpunkt F einzustellen ist*, d. h. wo die Stifte A, B zweckmäßig einzustecken und wie ihnen entsprechend die Winkel der drei Schienen gegen einander festzulegen sind. Der Einfachheit halber wollen wir wie gesagt in der folgenden Betrachtung die Stifte A, B zunächst punktförmig wählen und die Fluchtpunktschiene durch das geometrisch allein wesentliche ideelle Gebilde ersetzt denken, das aus drei um ihren gemeinsamen Schnittpunkt S drehbaren Geraden, zwei Gleitkanten und einer Zeichenkante, besteht. Schon Streckfuß (s. S. 190 Anm.) gibt zur Bestimmung der Winkel der drei Schienen eine einfache *geometrische Konstruktion* an, die ich hier wiedergeben möchte, da sie noch wenig bekannt, andrerseits sein Buch nicht leicht zugänglich ist.

Fig. 3.



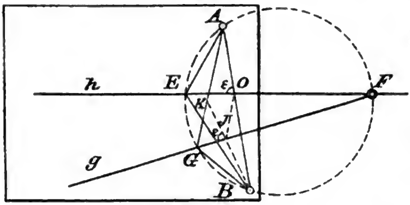
Es seien außer den Geraden g, h die Punkte A, B für die Stifte gegeben, und zwar möge zunächst AB senkrecht zu h im Punkte O gewählt sein (Fig. 3). Man fälle von B das Lot mit dem Fußpunkt J auf die Gerade g, ziehe zu OJ durch A die Parallele bis zum Schnitt G mit g. Die drei von G ausgehenden Geraden g, GA, GB bilden dann mit einander die gesuchten Winkel zwischen den Gleitkanten und der Zeichenkante. Die Einstellung der Fluchtpunktschiene geschieht nun einfach so, daß man bei gelockertem Gelenk ihre drei Kanten mit den gezeichneten drei Geraden entsprechend zur Deckung bringt und dann das Gelenk durch Anziehen der Schraube feststellt. Die Richtigkeit der Konstruktion folgt unmittelbar aus der Ähnlichkeit der von den Punkten $GBJK$ und $EBOA$ gebildeten Figuren, wo K den Schnitt-

1) Als nützliche Anwendung des genannten Peripheriewinkelsatzes sollte die Fluchtpunktschiene beim Unterricht in den unteren Klassen unserer höheren Schulen stets Erwähnung finden.

punkt von GA und BJ und E den Schnittpunkt von h mit dem durch A, B, G bestimmten Kreise bezeichnet.

Ist insbesondere $AO = OB$, so folgt aus $BJ = JK$, wenn man will, eine noch etwas einfachere Konstruktion des Punktes K und damit der Geraden GA. Ist aber andererseits die Strecke AB nicht mehr senkrecht zu h, sondern unter dem Winkel ε gegen h geneigt, so muß auch die Gerade BJ unter demselben Winkel ε gegen die Gerade g gezogen werden (Fig. 4).

Fig. 4.



So einfach das Einstellen sich auf Grund dieser geometrischen Konstruktion auch vollzieht, so sind doch, wie schon Streckfuß selbst bemerkt, praktische Methoden ohne eine solche vorhergehende Konstruktion vorzuziehen. Der vielfach gegebene Vorschlag, die Fluchtpunktschiene durch Probieren einzustellen, hat ihrer Verbreitung indes gewiß nur geschadet. Ersichtlich kann hier nur ein *auf einem exakten Grenzübergang beruhendes Einstellungsverfahren* in Betracht kommen. Es ist das Verdienst des Herrn Mehmke, ein solches genaues Verfahren in der oben genannten Arbeit angegeben zu haben; von seiner Wiedergabe, so interessant und brauchbar das Verfahren an sich ist, wollen wir hier absehen.[1])

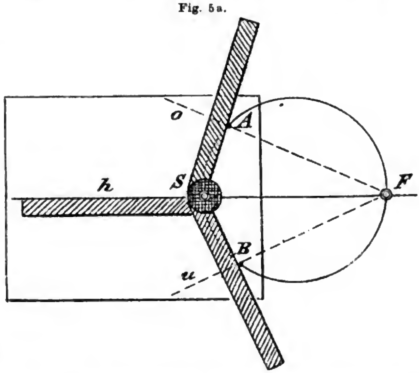
II. Einzelne Fragestellungen und Definitionen bei unserem Problem.

Ich gehe nach diesen mehr historischen Bemerkungen nun dazu über, die Anwendung der Fluchtpunktschiene in umfassenderer Weise, als es bisher geschehen ist, zu besprechen, vor allem eine neue exakte Methode ihrer Einstellung zu entwickeln, die allen andern wegen ihrer Einfachheit auch hinsichtlich des Beweises vorzuziehen ist.

1) Den Ausführungen des Herrn Mehmke möchte ich jedoch folgendes hinzufügen. Je nachdem jede Gleitschiene und der Fluchtpunkt F auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der zugehörigen Gleitkante gelegen sind (d. h. je nachdem eine Möglichkeit der Figuren 5a, c *oder* 5b, d des Textes zum Einstellen gewählt ist), ist es vorzuziehen bez. von innen *oder* von außen her in Bezug auf den Kreis durch A, B, F sich mit dem Gelenkpunkt S seiner wahren Lage zu nähern. Anderenfalls muß bei jedem neuen Schritte des Einstellens der eine Stift zunächst herausgenommen werden, bis man die zugehörige Gleitschiene über seine Stelle hinweg geschoben hat, was sowohl unbequem als auch für das Feststecken der Stifte nicht vorteilhaft ist. Dies ist z. B. gerade bei dem von Herrn Mehmke a. a. O. durch die Figuren angegebenen Beispiele notwendig.

Zunächst sind von vornherein bei der Fluchtpunktschiene *vier* Möglichkeiten ihrer Benützung zu beachten. Es kann nämlich jede Gleitschiene auf der andern Seite der zugehörigen an A oder B anschlagenden Gleitkante wie der Fluchtpunkt F gelegen sein (Fig. 5a, c) oder auf derselben Seite (Fig. 5b, d), und außerdem kann die Zeichenkante vom Gelenk S aus von dem gegebenen Fluchtpunkt ab (Fig. 5a, b) oder nach ihm hin (Fig. 5c, d) gewandt sein, demgemäß die Stifte A, B nahe bei der nach dem Fluchtpunkt F gelegenen Seitenkante des Reißbrettes eingesteckt sind oder nahe bei der anderen Seitenkante.

Fig. 5a.

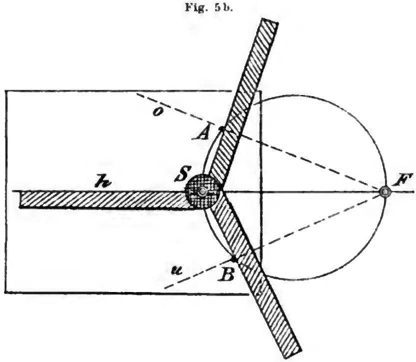


Hiernach haben wir folgende einzelne Fragen bei unserm Problem nach einander zu untersuchen:

a) *Wo sind für einen gegebenen Fluchtpunkt F die Stifte A, B am günstigsten bei der einzelnen der vier Möglichkeiten einzustecken?*

b) *Welche von den vier Möglichkeiten verdient überhaupt den Vorzug vor den anderen?*

Fig. 5b.



c) *Wie ist (nach Entscheidung für eine der vier Möglichkeiten) die Fluchtpunktschiene auf gegebene Punkte A, B, F einzustellen?*

Wir wollen nun bei der Beantwortung der ersten Frage zunächst die erste Möglichkeit (Fig. 5a) bevorzugen, um uns an eine bestimmte Anschauung anzulehnen. Wir beschränken uns auch, wie noch einmal

hervorgehoben sei, bei dieser Untersuchung der Einfachheit halber auf den Fall, um den es sich fast ausschließlich in der angewandten Perspektive handelt, daß *der fragliche Fluchtpunkt F auf dem (das Zeichenblatt durchschneidenden) Horizont h gelegen sei.* Der bequemeren Ausdrucksweise wegen sei ferner F auf einer bestimmten, etwa der *rechten* Seite des Horizontes angenommen. Außerdem sei eine Vertikale v nahe der rechten Seite des Zeichenbrettes gegeben, über die hinaus nach rechts hin die Stifte A_i, B_i, wobei die Indizes verschieden gewählte Lagen der Stifte andeuten mögen und A_i oberhalb, B_i unterhalb h gelegen sei, nicht mehr gesteckt werden sollen (Fig. 6). Ferner seien mit O und E_i die Schnittpunkte des Horizontes mit der Vertikalen v und mit dem Bogen $\widehat{A_i B_i}$ des Kreises durch A_i, B_i, F bezeichnet, und es sei $OE_i = e_i$, $OF = f$, endlich seien die senkrechten Entfernungen der Punkte A_i, B_i vom Horizonte gleich a_i, b_i gesetzt.

Fig. 5c.

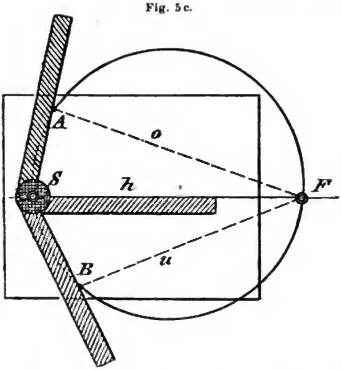


Fig. 5d.

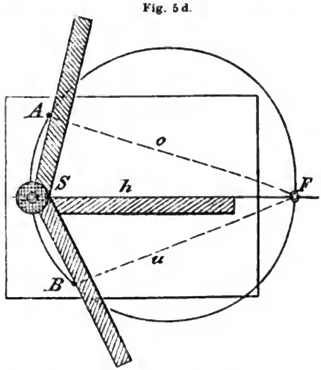
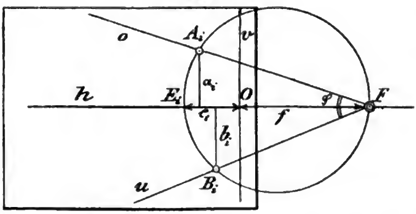


Fig. 6.



Die Grenzlagen, die der Gelenkpunkt S bei seiner Bewegung auf dem Bogen $\widehat{A_i B_i}$ des Kreises durch A_i, B_i, F einnehmen kann, fallen entweder mit den Punkten A_i, B_i selbst zusammen, wenn die Länge l_0

jeder Gleitkante größer als die Entfernung $A_i B_i$ ist, oder aber in zwei Punkten A_i^*, B_i^* des Bogens $\widehat{A_i B_i}$, wenn l_0 kleiner als $A_i B_i$ ist, wobei $\widehat{A_i^* A_i} = \widehat{B_i^* B_i}$ und $A_i^* B_i^* = l_0$ ist. (Hierbei sei z. B. im ersten Falle von dem darin beruhenden Unterschiede abgesehen, daß bei der wirklichen Schiene der Gelenkpunkt S ja nicht völlig bis zu den Punkten A_i oder B_i gelangen kann.)

2a. *Als obere und untere Grenzgeraden o und u bezeichnen wir die beiden äußersten Lagen, welche die Zeichenkante der auf F eingestellten Fluchtpunktschiene einnehmen kann, wobei also das Gelenk S in den Punkt A_i bez. A_i^* oder B_i bez. B_i^* hineingerückt ist, und als Grenzwinkel den Winkel $\varphi_i = A_i \dot{F} B_i$ bez. $A_i^* \dot{F} B_i^*$.*

2b. *Der ganze von der Zeichenkante beherrschte Bereich, der Grenzbereich, wird dann in dem einzelnen Falle stets durch die beiden Grenzgeraden und den Kreisbogen $\widehat{A_i B_i}$ bez. $\widehat{A_i^* B_i^*}$ begrenzt.*

3. *Wir wollen nun von dem Grenzbereich verlangen, daß die zugehörige Strecke e_i nicht größer als eine genügend klein vorgegebene Größe e^* wird.*

4. *Dann werden wir von zwei solchen (den sonstigen Bedingungen[1]) nach überhaupt möglichen) Bereichen denjenigen als günstiger bezeichnen, für den der Grenzwinkel größer ist oder aber bei gleichem Grenzwinkel die Strecke e_i kleiner ist, und demgemäß als möglichst günstig den (überhaupt möglichen) Bereich, der hiernach günstiger ist als jeder andere zulässige.*

III. Beantwortung der ersten Frage: Günstigstes Einstecken der Stifte.

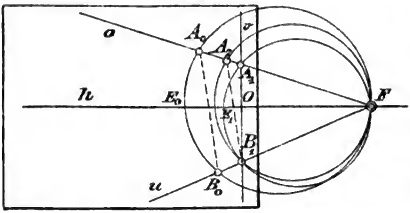
Diejenigen Stellen A, B für die Stifte können wir nach dem vorstehenden als am günstigsten gewählt ansehen, für die der Grenzbereich möglichst günstig ist.

Es seien die Punkte A_0, B_0 für die Stifte irgendwo auf dem Zeichenbrett auf verschiedenen Seiten von h gegeben. Die zugehörigen Grenzgeraden FA_0 und FB_0 bez. FA_0^* und FB_0^*, welche stets den rechten Rand des Zeichenbretts (bei rechts gelegenem Fluchtpunkte) schneiden, mögen die Vertikale v in den Punkten A_1, B_1 schneiden (Fig. 7; wir begnügen uns den einen Fall durch eine Figur zu veranschaulichen, wo die Grenzgeraden durch FA_0 und FB_0 gegeben werden). Ersetzt

1) Es kann etwa die Lage des einen Stiftes B bestimmt vorgegeben sein, sodaß nur noch A zu wählen bleibt. (Es muß auch die Sehne des halben Bogens $\widehat{A_i B_i}$ natürlich stets kleiner als die Länge l_0 jeder Gleitkante sein, damit überhaupt die Fluchtpunktschiene an die Stifte A_i, B_i angelegt werden kann.)

man die Punkte A_0, B_0 durch die Punkte A_1, B_1, so ist der Grenzbereich günstiger geworden. Denn die Grenzgeraden sind dieselben geblieben, aber es ist $E_1 O \leqq E_0 O$ oder $e_1 \leqq e_0$. Um letzteres zu erkennen, lasse man zunächst den Kreis durch FA_0B_0 sich ähnlich von F aus verkleinern, bis zuerst einer der Schnittpunkte auf den Grenzgeraden nach A_1 bez. B_1 gelangt ist, etwa der Punkt B_0 bez. B_0^* nach B_1 und dementsprechend A_0 bez. A_0^* nach A_2, und lasse darauf den Kreis durch F, A_2, B_1 sich weiter ändern, indem A_2 nach A_1 wandert, während F und B_1 fest bleiben (Fig. 7). Hierbei ist der Schnittpunkt E_i des Kreises mit dem Horizont beständig nach dem Punkt O hingewandert. Es ergibt sich also:

Fig. 7.



5. *Unter der Annahme eines Fluchtpunktes F auf dem die Zeichenfläche durchschneidenden Horizonte h lassen sich stets für beliebig vorgegebene Lagen A_0, B_0 der Stifte in der angegebenen Weise zwei andere Lagen A_1, B_1 auf der Vertikalen v am Rande der Zeichenfläche angeben, die einen günstigeren Grenzbereich liefern.*

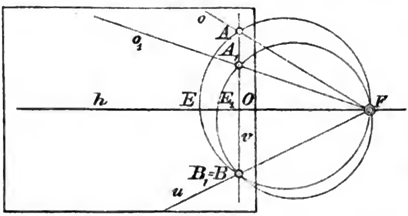
Wir wollen noch beachten, daß hierbei außerdem für die neue und alte Entfernung A_1B_1 und A_0B_0 der Stifte gilt:

$$A_1 B_1 \leqq A_0 B_0,$$

bez. auch

$$A_1 B_1 \leqq A_0^* B_0^*.$$

Fig. 8.



Wir haben demgemäß jetzt nur noch von allen Lagen der Stifte auf der Vertikalen v die günstigste auszusuchen, *wobei ersichtlich allein die an die Bedingung $A_iB_i \leqq l_0$ geknüpften Lagen in Betracht kommen.* Werden in der Figur 8 die Punkte A_1, B_1 auf der Vertikalen v, wobei $E_1O = e_1 < e^*$ sei, durch A, $B = B_1$ ersetzt, wo $a > a_1$ sei[1]), so wird zwar der Winkel φ_i des Grenzbereiches größer, zugleich aber ist $EO > E_1O$. Je nachdem

1) Dieser Fall, wo B von vornherein fest liegt, wird meist vorliegen, z. B. dann, wenn etwa B so nahe als möglich an g, doch unterhalb g gewählt wird, wobei g unterhalb h liegen möge.

daher $EO = e \leq e^*$ oder $> e^*$ ist, ist also nach den obigen Festsetzungen (3) und (4) der neue Grenzbereich zulässig und dann günstiger als der alte oder unzulässig. Bezeichnen wir noch mit l die größte in der Hinsicht überhaupt zulässige Entfernung AB auf der Vertikalen v, daß jene etwas kleiner als die Länge l_0 der Gleitkanten und als der Abstand des Punktes B von der oberen Kante des Reißbrettes ist, so ergibt sich hiernach:

6. *Bei unveränderter Lage des Punktes B auf der Vertikalen v ist diejenige Lage A auf v die günstigste, für die $AB = l$ ist, falls für diese Lage $EO \leq e^*$ ist, sonst aber diejenige Lage A, für die $EO = e^*$ ist.*

Analytisch drückt sich dieses Resultat einfacher wie folgt aus:

Es ist

(1a) $$a = l - b, \quad \text{wenn} \quad (2\text{a}) \; f \geq \frac{(l-b)b}{e^*},$$

dagegen

(1b) $$a = \frac{e^* f}{b}, \quad \text{wenn} \quad (2\text{b}) \; f < \frac{(l-b)b}{e^*} \text{ ist.} \text{ —}$$

Oft wird man nun aber nicht von vornherein den Punkt B auf v festlegen, sondern statt dessen lieber das Verhältnis $a : b = \alpha : \beta$ geben wollen, wo α und β gegebene (teilerfremde ganze) Zahlen sind. Führt man die Winkel

$$\psi_1 = \sphericalangle AFO \quad \text{und}$$

$$\psi_2 = \sphericalangle BFO$$

ein, so ist:

$$a : b = \operatorname{tg} \psi_1 : \operatorname{tg} \psi_2;$$

durch das Verhältnis $a : b = \alpha : \beta$ wird also das Verhältnis der Teile des Grenzbereiches über und unter dem Horizont, ausgedrückt durch die Tangensfunktionen der zugehörigen Winkel, angegeben. Sollen diese Winkel ψ_1 und ψ_2 und damit auch a und b einander gleich sein, so folgt dem Obigen gemäß, indem man die Größe l jetzt etwas kleiner als die Länge l_0 der Gleitschienen und als den doppelten Abstand zwischen dem Horizont und der ihm am nächsten liegenden Parallelkante des Reißbrettes wählt:

7. *Diejenigen zum Horizont symmetrischen Lagen A, B der beiden Stifte auf der Vertikalen v sind die günstigsten, für die:*

(3a) $$a = b = \frac{l}{2} \; \textit{ist, wenn} \; (4\text{a}) \; f \geq \frac{l^2}{4e^*},$$

dagegen:

(3b) $$a = b = \sqrt{e^* \cdot f}, \; \textit{wenn} \; (4\text{b}) \; f < \frac{l^2}{4e^*} \; \textit{ist.}$$

Als Resultat für beliebiges Verhältnis $\alpha : \beta$ ergibt sich aber analog: Man suche zunächst in der Proportion $p : q = \alpha : \beta$ das vierte noch unbekannte Glied q bez. p, wenn man p bez. q gleich dem oberen bez. unteren der durch h auf der rechten Reißbrettkante abgeschnittenen Teile setzt, je nachdem nämlich das Verhältnis dieser Teile $\leqq \frac{\alpha}{\beta}$ bez. $> \frac{\alpha}{\beta}$ ist, und wähle dann die Größe l etwas kleiner als die Länge l_0 der Gleitkanten und als die Summe $p + q$.

8. *Diejenigen Lagen A, B der Stifte auf der Vertikalen v, für die $a : b = \alpha : \beta$ gegeben ist, sind die günstigsten, für die*

(5a) $$a + b = l \quad \textit{oder}$$

(6a) $$\begin{cases} a = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot l & \textit{und} \\ b = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot l & \textit{ist, wenn} \quad (7\text{a}) \; f \geqq \dfrac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \dfrac{l^2}{e^*}, \end{cases}$$

dagegen:

(5b) $$a \cdot b = f \cdot e^* \quad \textit{oder}$$

(6b) $$\begin{cases} a = \alpha \cdot \sqrt{\dfrac{f \cdot e^*}{\alpha \cdot \beta}} & \textit{und} \\ b = \beta \cdot \sqrt{\dfrac{f \cdot e^*}{\alpha \cdot \beta}}, & \textit{wenn} \quad (7\text{b}) \; f < \dfrac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \dfrac{l^2}{e^*} \quad \textit{ist.} \end{cases}$$

Im *ersten* Falle ist also stets $a + b = l$, und man hat diese Größe nur im Verhältnis $\alpha : \beta$ zu teilen, um a, b selbst zu erhalten; im *zweiten* Falle ist dagegen stets $a + b < l$, und zur Bestimmung von a, b sind auch die Größen e^*, f erforderlich. Doch kommt dieser letzte Fall ersichtlich nur dann in Betracht, wenn f so klein ist, daß es genügend genau geschätzt werden kann.[1]) Die obigen Formeln sind daher praktisch sehr leicht anzuwenden, auch wenn f nicht sogleich als Zahl gegeben ist. Je größer von vornherein e^* angenommen werden kann, um so größer ist der Bereich für f, der dem ersten Falle zugehört, und um so größer sind, falls doch für gegebenes f der zweite Fall vorliegt, a, b und $a + b$.

Für die praktische Anwendung genügt folgende sich aus unserer Betrachtung ergebende Schlußregel, die zwar unbestimmter, dafür aber bequemer und geometrisch anschaulich ist:

---

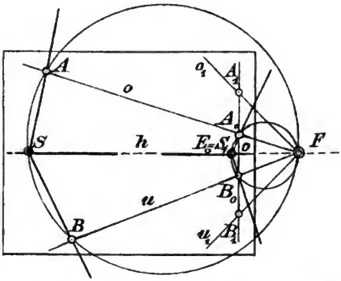
1) Denn $\frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2}$ erhält seinen Maximalwert für $\frac{\alpha}{\beta} = 1$; es ist also die rechte Seite der Ungleichung (7b) $\leqq \frac{l^2}{4 e^*}$. Zum Beispiel für $e^* = 10$ cm, $\alpha = \beta = 1$, $l = 50$ cm gilt als Grenzwert zwischen dem ersten und zweiten Falle $f = 62{,}5$ cm.

9. *Man nehme ungefähr auf einer Vertikalen v, die nahe an der dem Fluchtpunkt F zugewandten Seitenkante des Reißbretts liegt, zu beiden Seiten des (durch F gehenden) Horizontes h zwei Punkte A, B auf dem Reißbrett so an, daß ihre Abstände von dem Horizont ungefähr die gewünschten Teile des Grenzwinkels AFB über und unter dem Horizont bedingen, daß ferner ihre Entfernung voneinander kleiner als die Länge der Gleitkanten, im übrigen aber so groß als möglich ist. Man denke dann durch F und diese Punkte A, B einen Kreis gelegt, der den Horizont nach Schätzung ungefähr in einem Punkte E schneiden möge. Wenn dann dieser Punkt E nicht zu weit in die Zeichenfläche hineinragt, so kann man die Punkte A, B als Stellen für die Stifte der Fluchtpunktschiene wählen. Im anderen Falle sind die Punkte noch so weit dem Horizont zu nähern, bis der entsprechende Schnittpunkt E hinreichend nahe an v herangerückt ist.*

IV. Beantwortung der zweiten Frage: Entscheidung zwischen den vier Möglichkeiten.

Wir wenden unsern Blick nun zu den vier Möglichkeiten zurück, die auf S. 193 angegeben sind. Unserer bisherigen Betrachtung hatten wir die Möglichkeit der Fig. 5a zugrunde gelegt; doch lassen sich unsere Definitionen und Resultate unmittelbar auch auf die anderen Möglichkeiten übertragen. Man überzeugt sich jetzt aber leicht, daß die drei andern Möglichkeiten der ersten wesentlich nachstehen, *die Möglichkeit der Fig. 5b* deswegen, weil sie kein so gutes Aufliegen der Gleitschienen auf dem Zeichenbrett ergibt, wenn die Stifte dicht am Rande eingesteckt sind, — *die Möglichkeiten der Figuren 5c und 5d* einmal deswegen, weil die untere Gleitschiene in den vor dem Reißbrett liegenden Raum in störender Weise hineinragt, sodann weil bei jeder Wahl der Punkte *A*, *B* auf der linken Seite des Reißbrettes (bei rechts gelegenem Fluchtpunkt *F*) sich im allgemeinen zwei solche Stellen A_1, B_1 auf einer Vertikalen *v* nahe der rechten Reißbrettkante angeben lassen, daß die Möglichkeit der Fig. 5a für die Stifte an diesen neuen Stellen einen infolge eines größeren Grenzwinkels „günstigeren" Grenz-

Fig. 9.



bereich (vgl. die Definitionen S. 195) ergibt (Fig. 9). Denn ein „gleich günstiger" Grenzbereich, wie bei der ursprünglichen Lage der Stifte wird schon erreicht, wenn man die Schnittpunkte A_0, B_0 der Grenzgeraden FA und FB (bez. FA^* und FB^*) mit der Vertikalen v als neue Stellen für die Stifte bei der ersten Möglichkeit wählt und $e_0 \leqq e^*$ ist, wobei dann $A_0B_0 < AB$ ist. Nur für den Fall, daß der Abstand $E_0O = e_0 > e^*$ wäre (Fig. 9), könnte die dritte oder vierte Möglichkeit etwa als der ersten vorzuziehen in Frage kommen. Doch dürfte ein solcher Fall praktisch so gut wie ausgeschlossen sein.[1])

Aus diesen Gründen können wir als Resultat aussprechen:

10. *Von den oben angeführten vier Möglichkeiten ist die bei unserer bisherigen Betrachtung bereits bevorzugte erste Möglichkeit die beste von allen, so daß es einen Vorteil schon der leichteren Übersichtlichkeit wegen bedeutet, überhaupt auf sie sich zu beschränken.*

V. Beantwortung der dritten Frage: Einfachstes Einstellen der Fluchtpunktschiene.

Nachdem wir uns für die *erste* Möglichkeit entschieden und die Regel für die Wahl der Stifte A, B aufgestellt haben, gehen wir nun dazu über, eine neue einfache, auf einem exakten Grenzübergang beruhende *Methode für das Einstellen der Fluchtpunktschiene auf die gegebenen Punkte F, A, B* zu entwickeln.[2]) Bei dieser Methode brauchten übrigens die Stifte A, B, wie wir vorweg bemerken wollen, nicht notwendig auf der Vertikalen v gelegen zu sein; doch wollen wir zunächst voraussetzen, daß von den Stiften A, B stets einer oberhalb, der andere unterhalb des von den Geraden g, h auf dem Zeichenblatt begrenzten Streifens eingesteckt seien (vgl. anderenfalls S. 203, Zusatz 2).

Der Kreis durch F, A, B, wo F beispielsweise wieder rechts gelegen sei, bestimmt auf dem Horizont die gesuchte Lage E des Gelenkpunktes, wenn die Zeichenkante mit dem Horizont zusammenfällt. Man lege die Zeichenkante nun an den Horizont so an, daß der Gelenkpunkt etwa an der Stelle liegt, wo man den Punkt E nach ungefährer Schätzung annimmt, schlage bei gelöstem Gelenk die beiden Gleitschienen an die Stifte A, B an und stelle das Gelenk fest. Um diese Lage der Fluchtpunktschiene zugleich festzulegen, übertrage man eine Marke, die als

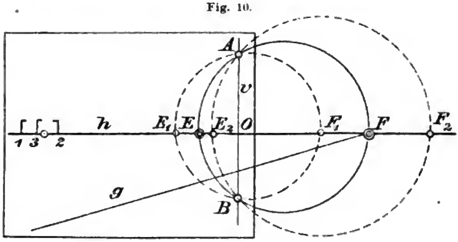
---

1) Meine später (S. 207) beschriebene neue Konstruktion der Fluchtpunktschiene läßt übrigens nur die drei Möglichkeiten der Figuren 5a, b, c zu, doch andere Konstruktionen gestatten auch noch die Möglichkeit der Fig. 5d.

2) Diese Methode knüpft an einen Gedanken von Streckfuß an, bei dem indes nur von Probieren die Rede ist.

ein kleiner Strich auf der Zeichenkante angebracht sei, auf den Horizont bei der soeben eingestellten Lage. Darauf verschiebe man die Fluchtpunktschiene längs der Stifte nach der Geraden g zu und sehe zu, ob hierbei die an der Zeichenkante zu ziehenden Linien nach einem näher oder weiter als F gelegenen Fluchtpunkt F_1 konvergieren. (Fig. 10). Am besten verschiebt man die Fluchtpunktschiene so weit, bis die Zeichenkante zu g parallel geworden ist; denn dann kann man selbst eine kleine Abweichung von der Lage des Fluchtpunktes genau erkennen. Man gehe nun mit der Zeichenkante zum Horizont zurück und verschiebe sie bei gelöstem Gelenk, je nachdem man F_1 näher oder weiter als F gefunden hat, nach rechts oder links, d. h. nach F zu oder von ihm ab, um ein *beliebiges* Stück. Dann schlage man wieder die Gleitkanten an die Stifte an, stelle das Gelenk fest, markiere die neue Lage der Marke auf dem Horizont durch einen zweiten Strich und prüfe wieder die neue Lage F_2 des Fluchtpunktes. Man kann zweckmäßig noch an den auf dem Horizont angebrachten Strichen jedesmal einen nach rechts oder links weisenden Zeiger hinzufügen, je nachdem F rechts oder links von F_1 liegt. Bekommt der zweite Strich schon einen Zeiger, der nach der andern Seite als der des ersten Striches gekehrt ist, so gibt die Strecke zwischen den Strichen bereits ein Intervall an, in dem die gesuchte wahre Lage der Marke liegen muß. Ist aber der Zeiger des zweiten Striches noch nach derselben Seite wie bei dem ersten gerichtet, so gibt dies an, daß man nochmals in derselben Richtung die Zeichenkante am Horizont weiter zu rücken hat wie soeben. Jedenfalls erhält man so sehr bald zwei (benachbarte) Striche auf dem Horizont mit gegen einander gekehrten Zeigern. Dann wähle man etwa in der Mitte ihres Intervalles bei dem nächsten Schritt die neue Lage der Marke, die hierauf die eine oder andere Hälfte des Intervalles als das neue richtige Intervall bestimmt. (Ich will nicht weiter ausführen, wie man das letzterhaltene Intervall eventuell sogleich günstiger in zwei Teile zerlegen kann.) So fortfahrend, wird man sehr bald, da ja das Intervall bei jedem neuen Schritt auf die Hälfte reduziert wird, der wahren Lage der Marke so nahe gerückt sein, daß die Zeichenkante

Fig. 10.



mit genügender Genauigkeit auch mit der Geraden g bei der entsprechenden Verschiebung der Fluchtpunktschiene sich deckt. Der Beweis für die Richtigkeit dieser sehr anschaulichen Methode ist so einfach, daß ich kein Wort darüber zu verlieren brauche. Außer der großen Anschaulichkeit dieser Methode und der Einfachheit dieses Beweises möchte ich jedoch noch folgende Vorteile hervorheben, besonders im Vergleich zu dem von Herrn Mehmke a. a. O. gegebenen Grenzübergang:

Hat sich die Fluchtpunktschiene während oder nach dem Einstellen irgendwie verstellt, so kann sie sofort wieder in die letzte Lage mit Hilfe des letzten Striches eingestellt werden, wie ja überhaupt die Striche die einzelnen Schritte des Einstellens gewissermaßen registrieren. Bei jedem nächsten Schritt werden sogleich *beide* Gleitschienen korrigiert, während bei der Methode des Herrn Mehmke hierzu zwei einzelne Schritte nötig sind. Bei jedem Schritte des Einstellens hat man bei gelöstem Gelenk nur die Zeichenschiene festzuhalten, nicht gleichzeitig die Zeichenschiene und eine Gleitschiene wie bei der Methode des Herrn Mehmke. Der Grenzübergang zur richtigen Lage des Gelenkpunktes oder der Marke auf dem Horizont findet von *beiden* Seiten statt, so daß man an der Kleinheit des letzten Intervalles der Striche sofort die erreichte Genauigkeit abschätzen kann.

Zusatz 1. Man kann noch folgendermaßen, wenn man will, das Verfahren des Einstellens abkürzen: Man merke mit dem Bleistift die Stellen A^*, B^* an, wo man ungefähr die Stifte einstecken will, und stelle nach der im Text beschriebenen Methode die Fluchtpunktschiene ungefähr auf diese Punkte ein, wozu einige wenige Schritte, meist schon zwei, genügen, so daß man also den Grenzübergang nicht sehr weit fortführt. Hat man dann die Zeichenkante an den Horizont dem letzten Markenstrich entsprechend angelegt, so ziehe man an den Gleitkanten mit dem Bleistift die beiden Geraden, die ja durch die angemerkten Stellen A^*, B^* gehen, lege darauf die Zeichenkante (ohne das Gelenk zu lösen) an die Gerade g an und zwar so, daß die Gleitkanten jetzt angenähert durch die Stellen A^*, B^* gehen. Die an den Gleitkanten gezogenen neuen Geraden schneiden dann bez. die früher gezogenen in der Nähe an A^*, B^* in zwei Punkten A, B, in die man dann die Stifte einsetzt. Man ist sicher, daß für diese Stifte die letzte Einstellung der Fluchtpunktschiene absolut genau ist (vgl. die Anm. S. 204).

Da die Geradenpaare, welche sich in A, B schneiden, sich unter demselben Winkel schneiden, wie die Geraden g, h, so sind hiernach die Punkte A, B praktisch mit derselben Genauigkeit wie der Fluchtpunkt F selbst bestimmt. Näher wollen wir indes auf diese abge-

änderte Methode nicht eingehen, nur noch folgendes bemerken: Es läßt sich mit aller Strenge zeigen, daß die Punkte A, B bei hinreichend weit geführtem Grenzübergang auch „beliebig nahe“ den Punkten A^*, B^* liegen.

Zusatz 2. Praktisch wird es oft erwünscht sein, wenn z. B. g unterhalb h gelegen ist, den unteren Stift *zwischen* die Geraden g, h (vielleicht möglichst nahe an h), den oberen möglichst hoch einzustecken. Man kann dann zum Einstellen der Fluchtpunktschiene auf so gelegene Punkte A, B sich folgender zwei Verfahren bedienen: Erstens kann man die Gerade g durch die in Bezug auf h symmetrische Gerade g_1 ersetzen, wenn letztere unterhalb A verläuft, oder sonst doch durch eine Gerade g_0, welche die Abstände zwischen g_1 und h auf irgend zwei Parallelen (Vertikalen) proportional schneidet, etwa halbiert. Oder man kann zweitens oft einfacher die Punkte A, B durch ihre Spiegelbilder A_1, B_1 an der Geraden h ersetzen, die dann nur mit dem Bleistift angegeben zu werden brauchen; man bestimmt dann zunächst durch Einstellen auf A_1, B_1 (mit Hilfe von g, h) die Lage der Marke auf dem Horizont nach der obigen Methode und schlägt, indem man die Zeichenkante demgemäß an den Horizont anlegt, nun die Gleitkanten an die jetzt in A, B eingesetzten Stifte an.

Zusatz 3. Es sei endlich außer dem Horizont h die Entfernung des auf ihm befindlichen (rechts gelegenen) Fluchtpunktes F von einem Punkte O des Horizontes (am rechten Rande) durch eine bestimmte Zahl $OF = f$ angegeben.[1]) Hat man die Punkte A, B gewählt (am besten auf der durch O gehenden Vertikalen v oder auch auf einer beliebigen durch O gehenden Geraden) und setzt man jetzt $AO = a$, $BO = b$, so berechnet sich $EO = e$ (etwa mit dem Rechenschieber) aus der einfachen Gleichung:

$$e = \frac{a \cdot b}{f} \tag{8}$$

oder

$$e = \frac{a^2}{f}, \text{ wenn } a = b \text{ ist.}^{2)} \tag{8'}$$

---

1) Man kann f auch, um die folgende Methode des Textes zum Einstellen anwenden zu können, wenn F durch die Gerade g, h bestimmt ist, als:

$$f = x \cdot \frac{y_1}{y_2 - y_1}$$

berechnen, wo y_1, y_2 die Abstände zwischen den Geraden g, h auf zwei Parallelen (etwa der Vertikalen v und einer Parallelen zu ihr) sind, die auf h die Entfernung x abschneiden.

2) Ist $AB \perp h$, so ist auch $e = a \cdot \operatorname{tg} \psi_2 = b \operatorname{tg} \psi_1$ und $\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{a}{f}$; $\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{b}{f}$.

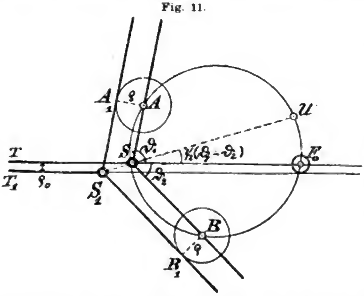
Um hiernach die Fluchtpunktschiene einzustellen, sei auf ihrer Zeichenkante der Punkt durch einen Strich markiert, dessen Entfernung vom Gelenkpunkt aus gleich einer bestimmten Strecke d, etwa gleich 10 cm, ist. Man trage dann vom Punkt O aus die Strecke $d + e$ bis D auf dem Horizont ab, lege die Zeichenkante so an den Horizont an, daß die Marke in D liegt und schlage die Gleitkanten an die Stifte A, B an, worauf man das Gelenk feststellt.

VI. Einfluß nicht punktförmiger Stifte.

Wir wollen nun noch unsere Aufmerksamkeit darauf richten, daß die Stifte nicht, wie bisher angenommen wurde, punktförmig sind, sondern kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius ϱ haben, während ihre Mittelpunkte an den ausgewählten Stellen A, B liegen. Man kann jeden Fehler, der etwa hieraus fließen könnte, von vornherein dadurch ausschließen, daß *die Gleitkanten nicht durch den Mittelpunkt des Gelenkes gehen, sondern von ihm die Entfernung ϱ haben.* Diese Einrichtung ist zuerst von Herrn Mehmke bei der von ihm konstruierten Fluchtpunktschiene (für $\varrho = 5$ mm) getroffen, und auch wir werden sie bei unserer im nächsten Abschnitt beschriebenen neuen Konstruktion der Fluchtpunktschiene anwenden.[1])

Um in diese Frage bessere Einsicht zu gewinnen, wollen wir jedoch die Benutzung einer Fluchtpunktschiene mit drei durch die Gelenkmitte selbst gehenden Kanten, wie es die älteren Konstruktionen zeigen, bei kreisförmigen Stiften einmal näher betrachten.

Fig. 11.



Wir denken zunächst für die *Punkte* A, B und einen Fluchtpunkt F_0 die ihnen entsprechenden Lagen SA, SB, ST der drei Kanten gegen einander konstruiert und parallel zu ihnen die drei Kanten S_1A_1, S_1B_1, S_1T_1 der wirklichen Fluchtpunktschiene so gezogen, daß die Kantenpaare SA, S_1A_1 und SB, S_1B_1 je den Abstand ϱ haben. (Fig. 11.) Da die konstante Strecke $S_1S = \varrho_1$

1) Bei der im Zusatz 1 des vorigen Abschnittes (S. 202) beschriebenen abgeänderten Methode hat man die Stifte dann nicht in den Schnittpunkten der gezogenen Geradenpaare selbst einzustecken, sondern in den richtigen Winkelräumen so daneben, daß jedes Geradenpaar seinen Stift berührt.

mit ihrer Verlängerung stets durch einen Punkt U des Kreises durch A, B, F_0 geht, so folgt sogleich der Satz:

11. *Während der Gelenkpunkt S der gedachten Schiene den Kreisbogen $\widehat{AB}$ beschreibt, bewegt sich der Gelenkpunkt S_1 der wirklichen Schiene, die wir mit jener starr verbunden denken können, auf dem Bogen einer Pascalschen Kurve*[1]) *mit dem Doppelpunkt U.*

Wenn ϑ_1, ϑ_2 die Winkel der Gleitkanten mit der verlängerten Zeichenkante bedeuten und ϱ_0 die (positive) Entfernung der Zeichenkanten der gedachten und der wirklichen Schiene (Fig. 11), so gilt, da $S_1\,S$ den Winkel der Gleitkanten halbiert:

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\sin\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}}$$

und ferner:

$$\varrho_0 = \pm\,\varrho_1\cdot\sin\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{2}$$

oder:

$$(9)\qquad \varrho_0 = \pm\,\varrho\cdot\frac{\sin\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{2}}{\sin\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}} = \pm\,\frac{\varrho}{AB}\cdot(AF_0 - BF_0) = \text{const} \leq \varrho,$$

das heißt:

12. *Die wirkliche Zeichenkante berührt in allen Lagen stets mit ihrer Verlängerung einen Kreis vom Radius ϱ_0 um den Fluchtpunkt F_0 der gedachten Schiene, wo ϱ_0 nicht größer als der Radius der Stifte ist, einen Kreis, den wir „Fluchtpunktkreis“ nennen wollen.*[2])

13. *Der Radius ϱ_0 wird gleich 0 oder die wirkliche Zeichenkante geht stets durch denselben Fluchtpunkt F_0 wie die gedachte Zeichenkante,*

---

1) Wegen der Pascalschen Kurven vgl. z. B. Gino Loria, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven*, Leipzig 1902, p. 137.

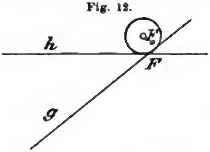
2) Die wirkliche Fluchtpunktschiene vermag ja mit ihrem Gelenkpunkt S_1 nur einen kurzen Bogen der Pascalschen Kurve zu beschreiben. Wenn wir aber das ihr zugrunde liegende geometrisch idealisierte Gebilde mit unendlich langen Gleitkanten annehmen, das mit seinem Gelenk auch ungehindert über die Stifte hinweg gleiten kann, so sieht man: Der Gelenkpunkt S muß den Kreis doppelt durchlaufen, wenn der entsprechende Punkt S_1 die ganze Pascalsche Kurve beschreiben soll. Dann hat auch die an der Zeichenkante zu ziehende Gerade mit allen ihren Lagen den Fluchtpunktkreis gerade einmal umlaufen. Hat S von einer Ausgangslage aus seinen Kreis aber erst einmal umlaufen, so ist der Punkt S_1 in die zu seiner Anfangslage in Bezug auf S symmetrische Lage S'_1 gekommen, sodaß auch die von S'_1 ausgehenden Gleitkanten die kreisförmigen Stifte nun auf der andern Seite von SA und SB berühren.

wenn $\vartheta_1 = \vartheta_2$ *ist. Dies tritt z. B. dann ein, wenn etwa die Punkte A, B symmetrisch zu dem durch* F_0 *gehenden Horizont liegen, allgemein dann, wenn* $AF_0 = BF_0$ *ist.*

Ist nun als Schnitt der zwei Geraden g und h der Fluchtpunkt F gegeben, so würde die gewünschte Einstellung der Fluchtpunktschiene bei gegebener Lage der kreisförmigen Stifte in den Punkten A, B erreicht sein, wenn der Kreis mit dem Radius ϱ_0 die Geraden g, h berührt (Fig. 12). Man überzeugt sich jedoch leicht, daß auch bei Werten von $\varrho < 0{,}5$ mm in besonders ungünstigen Fällen die nach Satz 12 eintretende Ungenauigkeit doch die überhaupt mögliche Genauigkeit des Zeichnens übersteigen kann.[1]) Dies genügt allein schon, um die von Herrn Mehmke eingeführte einfache Abänderung der Fluchtpunktschiene als wünschenswert zu rechtfertigen.

Hierzu kommt indes noch die Schwierigkeit beim Einstellen einer solchen Fluchtpunktschiene, deren Gleitkante und Zeichenkante durch die Gelenkmitte selbst gehen. Wollte man nämlich das oben beschriebene oder auch ein anderes genaues Einstellungsverfahren anwenden, so ist vor allem zu beachten: Es ist keineswegs ohne weiteres bewiesen, daß (bei allgemeiner Lage von A, B) unter Umständen nicht etwa verschiedene Grenzlagen für die Einstellung auf den durch g, h bestimmten Fluchtpunkt F möglich sind[2]), wenn zu diesen auch einander sehr nahe Lagen des Gelenkpunktes S auf dem Horizont gehören würden,

Fig. 12.



1) Um dies zu erkennen, genügt es ein Beispiel zu betrachten. Die Abstände der Punkte A, B auf einer Vertikalen v von der durch F_0 gehenden Horizontalen seien 50 cm und 10 cm, und die Entfernung des Punktes F_0 von v sei 8 cm. Daraus folgt $\varrho_0 = 0{,}63 \cdot \varrho$, und es ergibt sich für die Geraden g_1, g, die oberhalb und unterhalb des Horizonts h unter 45° gegen diesen geneigt den Fluchtpunktkreis berühren, als Entfernung F_1F ihrer Schnittpunkte mit h

$$F_1 F = 2\varrho_0 \cdot \mathrm{tg}\, 22{,}5^0 = 0{,}52 \cdot \varrho .$$

Ist dann F durch g und h als wirklicher Fluchtpunkt gegeben, so würde also die durch die Zeichenkante der Fluchtpunktschiene gelieferte Gerade g_1 und die von einem ihrer (nicht zu nahe an v gelegenen) Punkte P nach F gehende richtige Gerade eine nicht viel kleinere Strecke als F_1F auf der Vertikalen v abschneiden, eine Differenz zwischen der genauen Lage PF und ihrer Annäherung PF_1, die doch schon außerhalb der möglichen Genauigkeit des Zeichnens liegt, auch für kleine Werte von ϱ. Denn es ist z. B. für $\varrho = 0{,}5$ mm, bez. 0,3 mm $F_1F = 0{,}26$ mm bez. $= 0{,}16$ mm.

2) Bei der in der Anm. S. 205 beschriebenen geometrisch idealisierten Fluchtpunktschiene hat es gar keine Schwierigkeit nachzuweisen, daß für sie in der Tat mehr als eine Grenzlage möglich ist. Man braucht ja nur umgekehrt außer h

oder daß, wenn der Gelenkpunkt S sich auf dem Horizont stetig nach dem Fluchtpunkt zu bewegt, dann auch nach Feststellung des Gelenkes bei jeder Lage von S die von der Zeichenkante gelieferten Parallelgeraden zu g sich mit ihren (positiven oder negativen) Abständen von g stets in demselben Sinne ändern. Alles dies würde aber zu einem exakten Beweise der Ausführbarkeit des Grenzüberganges beim Einstellen um so mehr zu untersuchen notwendig sein, als in der Tat die Fluchtpunktschiene bei ihrer genauen Ausführung auch praktisch eine andere Einstellung erfordert, wenn man den Gelenkpunkt S auch nur um Bruchteile eines Millimeters längs des Horizontes verschiebt. Diese eigenartigen Schwierigkeiten, auf die bisher noch nie im einzelnen hingewiesen wurde, würden daher die Anwendbarkeit der Fluchtpunktschiene unnötig kompliziert gestalten. Man geht ihnen daher, wie wir schon sagten, aus dem Wege, *wenn man die Fluchtpunktschiene so abändert, daß die Gleitkanten von der Gelenkmitte S den Abstand ϱ besitzen.* Dann gehen eben auch die an der Zeichenkante bei bestimmter Einstellung gezogenen Geraden stets genau durch denselben Punkt F, wie wir noch einmal hervorheben wollen, und das Einstellungsverfahren, wie es oben beschrieben wurde, verläuft ohne Schwierigkeiten.

VII. Beschreibung und Vorteile der neuen Konstruktion der Fluchtpunktschiene.

Die Eigenart der neuen Konstruktion besteht zunächst darin, daß die Teile des Gelenkes aus Metall (Messing) bestehen, daher einer Abnutzung durch den Gebrauch weniger leicht unterliegen als wenn sie, wie bei den anderen Fluchtpunktschienen, aus Holz gefertigt sind. Im einzelnen ist das Gelenk folgendermaßen konstruiert: die eine der Gleitschienen hat an dem Ende des Gelenkes im oberen Drittel ihrer Dicke eine metallische Fortsetzung, die andere Gleitschiene im unteren und die Zeichenschiene im mittleren Drittel, so daß diese Teile im Gelenk vereint wieder die Dicke jeder einzelnen Schiene ergeben. Die Gleitschienen liegen dementsprechend vollständig auf dem Zeichenblatt auf, und es ist damit eine sichere Führung erreicht und der fehlerhafte Einfluß etwa schief eingesetzter Stifte möglichst vermieden.

Damit die Fluchtpunktschiene nun sowohl für rechts als links gelegene Fluchtpunkte in einfachster Weise einzurichten ist, besitzt der Gelenkteil der Zeichenschiene von seinem Ende aus einen etwas

---

eine gemeinsame Tangente von zwei Fluchtpunktkreisen, die bei verschiedener Einstellung der Schiene für dieselben Lagen A, B der Stifte und den Horizont h sich ergeben, als Gerade g zu wählen.

schmäleren Einschnitt als die Dicke der Gelenkachse, die übrigens an der unteren Gleitschiene festgenietet ist. Es kann dann bei gelockertem Gelenk die Zeichenschiene leicht mit der einen oder andern Seite nach oben gewandt in das Gelenk eingesteckt werden, jedoch nur dann, wenn die die Gelenkachse tragende Gleitschiene zur Fortsetzung der Zeichenschiene parallel gehalten wird, da die Gelenkachse beiderseits parallel zu der entsprechenden Gleitkante der Breite des genannten Einschnitts gemäß etwas abgefeilt ist.[1]) Durch diese Einrichtung wird bewirkt, daß in jeder andern Lage die Zeichenschiene an der Gelenkachse, auch bei gelockertem Gelenk, festsitzt.

Als Stifte sind Nadeln (z. B. gewöhnliche Stecknadeln) von 0,3 mm Radius zu benützen, die jederzeit leicht neu zu beschaffen sind. Diesem Radius entsprechend stehen die Gleitkanten vom Gelenkpunkt S gemäß den Bemerkungen des vorigen Abschnittes auch um 0,3 mm ab.

Es sei endlich noch bemerkt, daß der Gelenkpunkt S durch eine kleine Vertiefung auf der Unterseite der unteren Gleitschiene angegeben ist, sodaß man leicht von ihm aus bestimmte Strecken auf der Zeichenkante abtragen kann. Es ist übrigens derjenige Punkt der Zeichenkante bereits durch einen Strich markiert, dessen Entfernung vom Gelenkpunkt genau 10 cm beträgt.[2])

Bücherschau.

F. K. Ginzel. Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Das Zeitrechnungswesen der Völker. I. Band: Zeitrechnung der Babylonier, Ägypter, Mohammedaner, Perser, Inder, Südostasiaten, Chinesen, Japaner und Zentralamerikaner. Mit 6 Figuren im Text, chronologischen Tafeln und einer Karte. XII u. 584 S. Lex. 8°. Berlin, J. C. Hinrichs, 1906. Mk. 19.—.

Seit Idelers klassischem Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie (Berlin 1825/26), von dem übrigens 1883 ein Facsimile-Neudruck (Breslau) veranstaltet wurde, erschien bis jetzt kein zweites gleich umfassendes chronologisches Werk, trotzdem sich in den verflossenen 80 Jahren das Material gewaltig angehäuft hatte und die Forschung heute nicht mehr, wie zu Idelers Zeiten, in erster Linie auf die klassischen Schriftsteller angewiesen ist. Der

1) Ist die Zeichenschiene herausgenommen, so kann sie auch gut als einzelnes Lineal benutzt werden.

2) Ein paar Bemerkungen des Unterzeichneten zum vorstehenden Aufsatz, die in diesem Heft keinen Platz finden konnten, sollen im nächsten Heft abgedruckt werden. R. Mehmke.

Verf., dem wir schon zahlreiche Abhandlungen kritisch-historischen und astronomischen Charakters auf dem Gebiete der Chronologie verdanken, sah daher von einer ursprünglich ins Auge gefaßten Neubearbeitung des Ideler ab, von dem er nur den Titel herübernahm, zumal da gerade der vorliegende I. Band des auf drei Bände berechneten Werkes, nur neues Material bringt, neben dem die Klassiker lediglich als Ergänzung oder Bestätigung in Frage kommen.

Die Einleitung erklärt die astronomischen Begriffe der Chronologie. Kurz und klar unterrichtet sie über die Bewegungsverhältnisse am Himmel, die in die Zeitmessung eingehen und ihre verschiedenen Grundmaße bedingen. Neben vielen interessanten geschichtlichen Bemerkungen — so erfährt der Leser, daß den Babyloniern die Kenntnis der ungleichen Dauer der Jahreszeiten lange vor Hipparch geläufig war — finden sich kleinere bequeme Spezialtäfelchen, die chronologische Untersuchungen gewisser Art rasch erledigen lassen (z. B. wird der halbe Tagbogen mit den Argumenten Sonnenlänge und geographische Breite tabuliert). Auch über die Behandlung alter überlieferter Finsternisse, um deren Klärung sich Herr Ginzel in besonderem Grade bemüht hat, sind schon hier wertvolle Andeutungen eingestreut. Den gerade in den letzten Jahrzehnten in astronomischer, chronologischer und archäologischer Hinsicht entstandenen Hilfsmitteln mußte bei ihrer Vielfältigkeit ein ausführlicher Abschnitt gewidmet werden, der den Forscher in den Stand setzt, für jede chronologische Aufgabe das geeignete Werkzeug zur Lösung kennen zu lernen.

Der Hauptteil behandelt die Zeitrechnung einzelner Völker und zwar der Reihe nach die Babylonier, Ägypter, Mohammedaner, Perser, Inder, Südostasiaten, Zentralamerikaner, Chinesen und Japaner. Wir können natürlich nicht daran denken, den Inhalt dieser Kapitel auch nur zu skizzieren; sie sichten einen Stoff, dessen Auffindung bis in die neueste Zeit hineinreicht. Nur auf eine Tatsache, deren Bedeutung weit über die chronologische im engeren Sinne hinausgeht, sei hingewiesen: in dem eigenartigen Kalender der Mexikaner trifft man Spuren, die an Einrichtungen asiatischer Zeitrechnungsformen erinnern. Sind diese Anklänge nicht nur zufällig, so würde dies wieder ein Argument sein für die Besiedelung Amerikas von Asien her. Damit gelangen wir auf ein Gebiet, dessen Grundlinien noch geschaffen werden müssen, zur vergleichenden Chronologie, für die das Ginzelsche Werk ein ebenso reiches wie wichtiges Material liefert. Die Zeitelemente und ihre historische Entwickelung lehren, daß Bastians Völkergedanke auch hier seine Gültigkeit bewahrt; wie dann die verschiedenartige Kultur, die geographische und klimatische Beschaffenheit des Wohnsitzes die Völker bald zur einen, bald zur anderen Zeitrechnungsart mit Notwendigkeit treiben mußte, das läßt sich überzeugend verfolgen.

Den Schluß des Bandes bilden chronologische und astronomische Tafeln, unter denen die Örter von 26 Hauptsternen der nördlichen Himmelshalbkugel von — 4000 bis + 800 und die Neumonde von — 605 bis — 100 sich als besonders nützlich erweisen dürften.

Straßburg i. E. WIRTZ.

Technisches Abhandlungsregister 1905.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

(Schluß.)

Festigkeitslehre.

3192. *O. Lippmann.* Gewicht- und Festigkeitsberechnungen. D.M. 13. 74.

3193. *Mörsch.* Über den Gleitwiderstand und die Haftfestigkeit einbetonierten Eisens. M.Z.B.E. 3. 31.

3194. *N. N.* Über den Einfluß von C, P, Mn und S auf die Bruchfestigkeit des Martinstahles. S.E.D. 25. 82; 337; 402.

3195. *R. T. Dana.* The proportion of ingredients in Portland concrete. E.N. 53. 408.

3196. *E. H. Carpenter, R. A. Hadfield* and *P. Longmuir.* Iron-Nickel-Manganese-Carbon alloys. Eg. 80. 708; 745; 779.

3197. *H. Wehage.* Die zulässige Anstrengung eines Materials bei Belastung nach mehreren Richtungen. Z.V.D.I. 49. 1077.

3198. *C. Bach.* Die Änderung der Zähigkeit von Kesselblechen mit Zunahme der Festigkeit. Z.V.D.I. 49. 778.

3199. *R. Saliger.* Über den Einfluß der Schubfestigkeit und der Armierung auf die Bruchgefahr in gedrückten Steinprismen. Z.A.I (2) 10. 65.

3200. *Wehage.* Spannungen in prismatischen Röhren und Gefäßen mit vierseitigem Querschnitt. P.J. 320. 449; 469.

3201. *A. Rössler.* Die Würfel- und Pfeilerfestigkeit. B.E.B. 4. 198; 224.

3202. *E. Szarbinowski.* Radial- oder Tangentialführung. J.G.W. 48. 383. — *J. Schmidt* 603.

3203. *C. Bach.* Zur Kenntnis der Streckgrenze. Z.V.D.I. 49. 615.

3204. *F. H. Alexander.* Bending moments of ships. Eg. 79. 751.

3205. *N. N.* Maximum bending moments due to rolling loads. E. 100. 54. — *N. N.* 268.

3206. *O. Lippmann.* Biegungsfestigkeit. D.M. 13. 134.

3207. *K. Hasse.* Zur Theorie der Knickfestigkeit. Z.A.I. (2) 10. 537.

3208. *A. Sommerfeld.* Eine einfache Vorrichtung zur Veranschaulichung des Knickungsvorganges. Z.V.D.I. 49. 1320.

3209. *H. Pilgrim.* Die Knickungsberechnung nach den Versuchsergebnissen. Z.A.I. (2) 10. 73.

3210. *B. Kirsch.* Ergebnisse von Versuchen über die Knickfestigkeit von Säulen mit festeingespannten Enden. Z.V.D.I. 49. 907.

3211. *O. Lippmann.* Zugfestigkeit. D.M. 13. 6.

3212. *E. G. Izod.* The behaviour of materials under shear. Eg. 80. 847; E. 100. 647.

3213. *H. E. Wimperis.* The strength of laminated springs. E. 100. 258.

3214. *O. Lippmann.* Beanspruchung eines Zahnrades auf Biegung. D.M. 13. 264; 276; 285.

3215. *A. Lawrence.* Spiral gear calculation. Am.M. 28. A. 498.

3216. *J. H. Wright.* Bevel gear calculations. Am.M. 28. A. 73.

3217. *J. Edgar.* Bevel gear formulas Am.M. 28. A. 487; B. 534. — *E. H. Fisk* B. 435.

3218. *Bevel.* Miter gear formulas. Am.M. 28. B. 738.

3219. *E. Brown.* Standard sections. E. 99. 98.

3220. *E. Brown.* The properties of British standard sections. Eg. 79. 127.

3221. *F. Dircksen.* Querschnittsbestimmung auf Druck beanspruchter Stäbe. C.B.B. 25. 451.

3222. *M. Koenen.* Über die gefährlichen Abscherflächen in Beton eingebetteter Eisenstäbe. B.E.B. 4. 148.

3223. *J. Hawkesworth.* Ritters formula for reinforced concrete beams. E.N. 53. 21; 151; 286. — *„Engineer“* 41; 286. — *G. Solow* 287.

3224. *C. R. Steiner.* Economical construction of reinforced concrete beams and floor stabs. E.N. 53. 256.

3225. *W. K. Hatt.* Further tests of reinforced concrete beams. R.G. 38. 366.

3226. *C. E. Young.* A diagram for T-beams of reinforced concrete. E.N. 54. 518.

3227. *E. Mörsch.* Biegungsversuche mit armierten Betonbalken von 15/30 cm Querschnitt. S.B.Z. 46. 299.

3228. *F. v. Emperger.* Die Tragfähigkeit der Balken aus Eisenbeton. B.E.B. 4. 201.

3229. *R. Saliger.* Die Dimensionierung von Eisenbetonbalken. Z.A.I. (2) 10. 145.

3230. *Steel.* Rankine and an United States corrector. Eg. 80. 863.

3231. *Ramisch.* Beitrag zur Berechnung der Plattenbalken von T-förmigem Querschnitte aus Eisenbeton. Z.Ö.I.A.V. 57. 631.

3232. *Járay.* Zu den Fragen der einfachen direkten und ökonomischen Dimensionierung von Betoneisenkonstruktionen und der nutzbaren Plattenbreite bei Verbundplattenbalken. T.B. 37. 99.

3233. *W. T. Walker.* A proposed method of computing the strength of concrete-steel beams. E N. 51. 226.

3234. *V. H. Poss.* Handy rules for safe loads of steel and timber beams. E.N. 53. 421.

3235. *R. Saliger.* Zur Berechnung der Rippenbalken aus Eisenbeton. Z.Ö.I.A.V. 57. 727. — *Ramisch* 728.

3236. *N. N.* Plate girder webs. E. 99. 262; 347. — *Tee* 347.

3237. *M. R. v. Thullie.* Die Bruchursachen der betoneisernen geraden Träger. B.E.B. 4. 195; 226; 253; 275. — *F. v. Emperger* 307.

3238. *E. Elwitz.* Berechnung doppelt bewehrter oder mit Profileisen versehener Betoneisenträger. B.E.B. 4. 252; 271.

3239. *M. R. v. Thullie.* Zur Dimensionierung der rechteckigen und T-förmigen betoneisernen Träger. B.E.B. 2. 175; 226.

3240. *P. Weiske.* Dimensionierung von Eisenbetonträgern durch Zeichnung. M.Z.B.E. 3. 42.

3241. *W. E. Lilly.* The strength of columns. Eg. 80. 62.

3242. *Mörsch.* Die Berechnung der Eisenbetonsäulen und die neuesten Versuche. M.Z.B.E. 3. 73.

3243. *B. Kirsch.* Neue Studien und Versuche über die Tragkraft der Säulen und den Einfluß der Einspannung an den Enden. Z.Ö.I.A.V. 57. 93.

3244. *K. Boecklen.* Beitrag zur Berechnung der Eisenbetonstützen bei einseitiger Belastung. C.B.B. 25. 140.

3245. *F. Kretschmar.* Festigkeit von Trägersystemen. S.B. 7. 633; 680; 709; 754; 791; 835; 865; 906; 947; 990.

3246. *A. Hofmann.* Zur Berechnung der Stärke von Betonplatten. S D.B. 15. 258.

3247. *Bosch.* Die Eisenbetonplatte. S.D.B. 15. 259; 265; 273; 282.

3248. *Bosch.* Die Berechnung der Eisenbetonplatte. B.E.B. 4. 177; 257; 281. — *S. Sor* 256.

3249. *A. Hofmann.* Zur Berechnung der Stärke mit Eisen bewehrter Betonplatten. D.B.Z. 39. 206.

3250. *Ramisch.* Beitrag zur Berechnung von Platten aus Eisenbeton. M.Z.B.E. 3. 83.

3251. *Pigeaud.* Note sur le calcul des arcs encastrés. A.P.C. (8) 18. 201.

3252. *C. H. Wallace.* A formula for crown and skewback depth of masonry arches. E.N. 53. 494.

3253. *E. Low.* Crown thickness and crown pressure in masonry arches. E.N. 53. 626.

3254. *E. Low.* Formulas for crown thickness of masonry and concrete arches. E.N. 54. 554.

3255. *N. N.* Armoured concrete arch. E. 99. 473.

3256. *G. Barkhausen.* Die Berechnung von Verbunddecken im Baugewerbe. D.B.Z. 39. 4; 26; 30; 144.

3257. *F. Guske.* Neue Formeln zur Berechnung von Eisenbetondecken. S.D.B. 15. 399; 408.

3258. *W. Frank.* Die Berechnung der Sprossen für Glasdächer. W.B.S. 2. 140; 147.

3259. *J. Hrabak.* Zur Theorie der Drahtseile. Z.Ö.I.A.V. 57. 114. — *H. Benndorf* 115.

3260. *H. Benndorf.* Beitrag zur Theorie der Drahtseile II. Z.Ö.I.A.V. 57. 685.

3261. *J. Perry.* Accidental breakage of winding ropes in mines. E. 100. 223.

3262. *N. N.* The stability of masonry dams. Eg. 79. 414. — ***E. P. Hill*** **615.**

3263. *W. C. Unwin.* Note on the theory of unsymmetrical masonry dams. Eg. 79. 513; 593.

3264. *B. A. Smith.* Masonry dams. Eg. 80. 10.

3265. *K. Pearson.* The stability of masonry dams. Eg. 80. 35. — *W. J. Dilley* 44.

3266. *C. Birault.* Les tunnels tubilaires en terrains aquifères. La traversée sous la Seine des nouvelles lignes du métropolitain. M.I.C. 58. A. 852.

3267. *W. H. Thorpe.* The anatomy of bridgework. Eg. 79. 466; 80. 367.

3268. *D. B. Luten.* Empirical formulas for crown thickness of masonry arch bridges. E.N. 53. 260.

3269. *P. Büttner.* Neue Straßenbrücke über die Staatsstraße Nr. 42 Stuttgart-Ulm, über die Bahnhofsgeleise und den Neckar bei Plochingen. S.D.B. 15. 6.

3270. *R. Bonnic.* The Austerlitz bridge across the Seine for the Metropolitan railway of Paris. E.N. 54. 604.

3271. *Thérel.* La Corniche de l'Estérel, sa création; comment elle est devenue route nationale. A.P.Ch. (8) 18. 5.

3272. *Ramisch.* Bestimmung zuverlässiger Formeln zur Berechnung von belasteten und sich selbst tragenden Wänden aus armiertem Beton. S.D.B. 15. 176.

3273. *F. W. Keyser* and *E. L. Heidenreich.* The design of reinforced concrete structures. E.N. 54. 382. — *C. A. P. Torner.* 383.

3274. *Landmann.* Die Berechnung von ringförmigen Fabrikschornsteinen in Eisenbeton. Z.A.I. (2) 10. 277.

3275. *J. D. Adams.* The design of self-supporting steel chimneys. E.N. 54. 64.

3276. *Ramisch.* Kritische Besprechung der Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten des preußischen Ministers vom 16. IV. 04. Z.Ö.I.A.V. 57. 157.

3277. *N. N.* Crank pin and axle calculations. A.E.R.J. 79. 415.

3278. *Zimmermann.* Abmessungen gekröpfter Lokomotivachsen. O.F.E. (2) 42. 104.

3279. *Stephan.* Massentransporteinrichtungen. P.M.C. 38. 117; 126; 167; 206.

3280. *A. Stucki.* Steel car design. R.G. 37. 10; 82; 124; 172; 192. — *E. Hermansen* 335.

3281. *C. Codron.* Conditions de résistance des pistons des machines à vapeur. R.D.M. 16. 517.

3282. *S. Brokman.* Zur Berechnung von Dampfzylindern. P.J. 320. 39; 73.

3283. *E. Graf.* Berechnung einer Dampfkesselanlage und des dazugehörigen Schornsteins. P.M.C. 38. 174; 184.

3284. *E. M. Speakman.* The determination of the principal dimensions of the steam turbine with special reference to marinework. E. 100. 500; 551.

3285. *G. Rota.* Experiments on resistance of ship models. Eg. 80. 162.

3286. *W. Hoogaard.* Der Kreuzer. S.B. 7. 297; 330; 381; 428.

3287. *H. F.* Haltfestigkeit der Saderöhren in den Rohrwänden. Z.B.D. 9. 240.

3288. *J. Schmidt.* Ein Wort zu gunsten der Tangentialführung an Gasbehältern. J.G.W. 48. 223.

3289. *J. Krüger.* Ein Gassammelbehälter aus Eisenbeton für die städt. Gas- und Wasserwerke der Stadt Wernigerode. B.E.B. 4. 269.

3290. *N. N.* Über die Konstruktion und Berechnung von kleineren Wasserhochbehältern. P.M.C. 38. 87; 94.

3291. *P. Forchhammer.* Zur Berechnung von Behältern auf Winddruck. Z.Ö.I.A.V. 57. 329.

3292. *H. B. Morison.* The effect of oil on boiler furnaces. Eg. 79. 586.

3293. *J. L. Stevenson.* Blast furnace calculations. E. 100. 177.

3294. *R. S. Riley.* Key design. Am.M. 28. A. 247.

3295. *N. N.* Strength of bolted joints. E. 100. 523.

3296. *N. N.* Berechnung der Walzen von Blechbiegmaschinen. Z.W. 9. 228.

3297. *J. D. Adams.* A formula for foundry leedles. Am.M. 28. A. 879.

3298. *F. Ernst.* Zwillingfördermaschine für Last- und Personenförderung. P.M.C. 38. 56; 63.

3299. *E. Dubois.* Étude sur les ressorts à expansion. R.D.M. 17. 352.

Geodäsie.

3300. *L. Zimmermann.* Schematische Anordnung der Teilungsordnungen. Z.V. 34. 303.

3301. *Puller.* Eine Teilungsaufgabe. Z.V. 34. 322.

3302. *O. Eggert.* Die Einwägungen der landwirtschaftlichen Hochschule bei Westend. Z.V. 34. 13; 38; 57. — *Vogler* 73. — *W. Schweydar* 299.

3303. *N. N.* Some surveying instruments. E. 100. 590; 611.

3304. *E. Doležal.* Nivellierungsinstrumente mit drehbarem Fernrohr und Doppellibelle und das Präzisions-Nivellierinstrument von Prof. Schell. Z.V. 34. 490; 505.

3305. *N. N.* Hornsteins Tacheometer. Eg. 79. 179.

3306. *A. Klingatsch.* Über Fadentachymeter mit Tangentenschraube. Z.V. 34. 337; 353.

Gleichungen.

3307. *Puller.* Auflösung quadratischer Gleichungen. Z.V. 34. 497.

Graphischer Kalkul.

3308. *Farid-Boulad.* Mémoire sur un tracé graphique des paraboles du 4. dégré et ses applications aux lignes d'influence des arcs surbaissés et aux courbes des efforts tranchants, maxima dans les poutres continues dus aux actions réunies de la surcharge uniforme à répartition variable. A.P.Ch. (8) 19. 165.

3309. *C. G. Wrentmore.* Graphical determination of angles in skew structural work. E.N. 51. 28.

3310. *S. Diamant.* Application of graphics to power house location. E.W. 43. 311.

3311. *A. L. Westcott.* The graphical analysis of a simple jib crane. Am.M. 28 A. 396.

3312. *F. Sarrat.* Méthode graphique pour l'étude des projets de traction. E.E. 41. 361.

3313. *Thérel.* Note sur la réprésentation graphique d'une convention de concession de chemin de fer d'intérêt local ou tramway. A.P.Ch. (8) 17. 159.

3314. *C. T. Lewis.* A problem in detailing hopper work. E.N. 54. 75. — *H. R. Thayer*; *E. J. Odlum* 205.

Harmonische Analyse.

3315. *G. H. Rowe.* Harmonic analyser. E.W. 45. 587.

3316. *C. Runge.* Methode der Zerlegung in Sinuswellen. E.Z. 26. 247.

3317. *N. N.* Eine einfache Methode der Zerlegung periodischer Kurven in Sinuswellen ungerader Ordnung. P.J. 320. 813.

Hydraulik.

3318. *W. Hampel.* Experimentelle Studien über Wasserbewegung. T.B. 37. 79.

3319. *G. Finzi* and *N. Soldati.* Experiments on the dynamics of fluids. Eg. 79. 333; 397; 461.

3320. *M. Blieden.* The theory of the flow of elastic fluids and the divergent nozzle. E. 99. 155; 181.

3321. *H. Gravelius.* Über eine neue Geschwindigkeitsformel. Z.G. 7. 87.

3322. *W. W. Marriner.* The influence of depth of water on speed. Eg. 80. 99.

3323. *F. Ahlborn.* Die Wirbelbildung im Widerstandsmechanismus des Wassers. J.S G.B. 6. 67.

3324. *J. E. Boyd* and *H. Judd.* Pitot tubes; with experimental determinations of the form and velocity of jets. E.N. 51. 318.

3325. *H. Rupprecht.* Schmiermittel und ihre praktische Untersuchung. Z.D.M. 28. 36; 41.

3326. *W. Laas.* Photographische Messung der Meereswellen. Z.V.D.I. 49. 1889; 1937; 1976.

3327. *H. Engels.* Untersuchungen über die Bettausbildung gerader oder schwach gekrümmter Flußstrecken mit beweglicher Sohle. Z.B.W. 55. 665.

3328. *F. W. Home.* The parabolic method of computing stream gagings. E.N. 53. 154.

3329. *J. Hermanek.* Die mittlere Profilgeschwindigkeit in natürlichen und künstlichen Gewässern. Z.Ö.I.A.V. 57. 237.

3330. *E. C. Murphy.* A method of computing flood discharge and cross-section area of streams. E.N. 53. 355.

3331. *R. Siedek.* Studien über die Bestimmung der Normalprofile geschiebeführender Gewässer. Z.Ö.I.A.V. 57. 61; 77; 217. — *J. Hermanek* 216.

3332. *Fuhrmann.* Vorarbeiten für Flußregelungen und Talsperren. Z.B.W. 55. 366.

3333. *H. Gravelius.* Zur Morphologie der venetischen Lagunen. Z.G. 7. 30.

3334. *E. Lauda.* Die Verwertung des Retentionsvermögens der Salzkammergutseen zur Milderung der Hochwassergefahren im Traungebiete. Z.Ö.I.A.V. 57. 253; 269.

3335. *H. Gravelius.* Zur Abhängigkeit des Regenfalles von der Meereshöhe Z.G. 7. 129.

3336. *W. Krawinkel.* Regenabfluß und Abflußverzögerung. G.I. 28. 214; 269.

3337. *A. Böttcher.* Über die Dimensionierung hydraulischer Zylinder und Steuerschieber. V.V.G. 84. 281.

3338. *N. N.* Presse hydraulique de 3800 tonnes. P.E.M. (5) 4. 8.

3339. *P. Tolmann.* Das absolute Maximum des hydraulischen Staues. Z.Ö.I.A.V. 57. 132.

3340. *v.* Heynscher Wasserigel. C. B.B. 25. 202.

3341. *H. Hagens.* Die Kreisel und ihre Leistungen. Z.V.D.I. 49. 807; 1755. — *R. Escher* 1259.

3342. *J. A. Jamieson.* Hydraulic diaphragms and grain pressure tests. E.N. 51. 403. — *W. Cain* 451.

3343. *P. Forchheimer.* Über den Wasserzudrang in Brunnen und Baugruben. Z.Ö.I.A.V. 57. 585.

3344. *Bucerius.* Hydraulischer Wasserstandsfernmelder. J.G.W. 48. 54.

3345. *Dariès.* Note sur le compteur d'eau Venturi. N.A.C. (6) 2. 30.

3346. *W. Reitz.* Zwei Beiträge zur graphischen Berechnung hydrometrischer Aufgaben. Z.G. 7. 175.

3347. *Landsberger.* Die Wirkung der Wellen auf Ingenieurbauten. C.B.B. 25. 358; 362.

3348. *D. D. Gaillard.* Wave action in relation to engineering structures. E.N. 53. 189.

3349. *P. Catani.* Die Druckrohrleitungen für Wasserkraft-Elektrizitätswerke. E.Z. 26. 306.

3350. *A. Satkewitsch.* Berechnung von Wasserleitungen mit zwei Reservoiren: einem speisenden Hauptreservoir und einem ausgleichenden Gegenreservoir. J.G.W. 48. 265; 289.

3351. *J. Brandt.* Aufsuchung einer Undichtheit an einem Wasserrohrnetz. J.G.W. 48. 132.

3352. *E. Prinz.* Das Wasserwerk der Stadt Salzwedel. T.G. 8. 167; 180.

3353. *Lamm.* Die Wasserversorgungsanlage auf Bahnhof Speldorf. A.G.B. 57. 194; 201.

3354. *Prüsmann.* Vergleichung von Schleusen und mechanischen Hebewerken. Z.B.W. 55. 501; 722.

3355. *F. G. Davis.* Safety of the Nile dam. E. 99. 454. — *G. T. Pardoe* 479.

3356. *J. Hermanek.* *Der Abfluß an* einem Grundwehre kurvenförmigen Profils. Z.Ö.I.A.V. 57. 339; 415. — *B. Tolman* 414.

3357. *L. Hartwanger.* Theoretische Untersuchungen am Peltonrad. Z.G.T. 2. 98; 119.

3358. *R. Escher.* Über die Schaufelung des Löffelrades. S.B.Z. 45. 207.

3359. *N. Baashuus.* Klassifikation von Turbinen. Z.V.D.I. 49. 92. — *R. Camerer* 380.

3360. *N. Baashuus.* Erster Entwurf von Turbinenanlagen. E.Z. 26. 961.

3361. *H. Lorenz.* Neue Grundlagen der Turbinentheorie. Z.G.T. 2. 257. 273; 289; 305.

3362. *V. Albitsky.* Formules nouvelles générales pour le calcul des turbines hydrauliques. R.D.M. 17. 214; 342; 529.

3363. *B. Albitzky.* Neue allgemeine Formeln zur Berechnung der Wasserturbinen. Z.G.T. 2. 167; 198; 232; 294; 358.

3364. *H. Lorenz.* Theorie und Berechnung der Vollturbinen und Kreiselpumpen. Z.V.D.I. 49. 1670; 2008. — *W. Bauersfeld* 2007.

3365. *F. Neumann.* Beitrag zur Berechnung der Eintrittsgrößen einer Wasserturbine. P.J. 320. 417.

3366. *Camerer.* Beiträge zur Bestimmung der Ein- und Austrittsgrößen von Turbinenlaufrädern auf Grund experimenteller Untersuchung. P.J. 320. 50; 97.

3367. *K. Kobes.* Die Druckverhältnisse in der Francisturbine und der Druck auf den Spurzapfen. Z.Ö.I.A.V. 57. 669.

3368. *V. Kaplan.* Ein neues Verfahren zur Berechnung und Konstruktion der Francis-Turbinen-Schaufel. Z.G.T. 2. 113; 129.

3369. *A. Budan.* Die Geschwindigkeitsregulierung der Turbinen vom Ende der achziger Jahre des vorigen Jahrhunderts bis auf den heutigen Tag Z.Ö.I.A.V. 57. 621.

3370. *A. Budan.* Druckschwankungen in Turbinenzuleitungsrohren. Z.Ö.I.A.V. 57. 417; 433; 443.

3371. *F. Prášil.* Vergleichende Untersuchungen an Reaktionsniederdruckturbinen. S.B.Z. 45. 81; 96; 119; 147; 157.

3372. *Flamant.* Quelques installations récentes des turbines hydrauliques. R D.M. 16. 305; 538.

3373. *F. Krull.* Dampfturbinen mit Geschwindigkeitsstufen und mit Druckstufen. Z.Ö.I.A.V. 57. 721.

3374. *M. H. Wright.* Establishing irrigation canal tangents so that cut and fill will balance. E.N. 54. 310.

3375. *H. Kayser.* Berechnung der Regenwasserabflußmengen für städtische Kanalisationen. T.G. 8. 82; 99.

3376. *C. v. Montigny.* Die Kanalisationen. T.G. 8. 3.

3377. *Heyd.* Die Grundlagen zur Berechnung von Städteentwässerungsanlagen. G.I. 28. 17.

3378. *E. Sonne.* Die Rückströmungen in Schiffahrtskanälen. C.B.B. 25. 147.

3379. *E. Sonne.* Der Zugwiderstand der Kanalkähne. C.B.B. 25. 77; 303. — *Thiele* 254.

3380. *J. H. Cunningham.* A convenient method for determining the discharge of streems and canals. E.N. 53. 366.

3381. *R. Mansel.* The analysis of steamship trial data. E. 99. 404.

3382. *D. W. Taylor.* A general discussion of resistance and power consumption of ships in different depths of water. E.N. 53. 276.

3383. *M. Weitbrecht.* Konstruktion der Querkurven eines Schiffes für die Stabilitätsrechnung unter Verwendung des Integraphen und Konstruktion der Schottkurve. S.B. 7. 497.

3384. *Liddell.* Sprung eines Schiffes. S.B. 7. 60

3385. *A. Aschenbach.* Beitrag zur Konstruktion von Schiffsschrauebn. S.B. 7. 630.

3386. *F. Ahlborn.* Die Wirkung der Schiffsschraube auf das Wasser. J.S.G.B. 6. 82.

3387. *H. Sellenthin.* Die radiale Geschwindigkeit des Wassers bei Schraubenpropellern. S.B. 7. 334.

3388. *O. Alt.* Theorie und Berechnung der Schiffspropeller. S.B. 7. 800. — *H. Lorenz* 806.

3389. *R. de Villamil.* The screw propeller. E. 99. 207; 231. — *E. Claudio.* 377.

3390. *R. H. Smith.* The dynamics of screw propellers. E. 100. 205; 269.

3391. *J. Stieghorst.* Die Wanderung des Druckmittelpunktes des Ruderdrucks bei Ein- und Dreischraubenschiffen. S.B. 7. 245.

3392. *H. Herner.* Entwurf eines Erztransportdampfers nach dem Turretsystem. S.B. 7. 287.

3393. *H. Techel.* Die Motorboote. S.B. 7. 901.

3394. *P. Delsuc.* Note sur les moteurs et les canots automobiles. E.E. 41. 490.

3395. *J. Volk.* Über Wasserbewegungen in Dockhäfen. C.B.B. 25. 438.

3396. *A. F. Wiking.* Der Bau von Schwimmdocks. J.S.G.B. 6. 434.

3397. *A. Dietzius.* Über die Veränderung der Stabilität der Schwimmdocks durch die in denselben vorhandenen Wasser-Ein- bez. Austrittsöffnungen. S.B. 7. 137; 223.

3398. *A. Dietzius.* Vergleich der Stabilitätseigenschaften verschiedener Schwimmdocksysteme, inbesondere hinsichtlich des Einflusses der geöffneten Wasser-Ein- bez. Ausflußöffnungen. S.B. 7. 823; 862.

3399. *A. Griessmann.* Versuche mit Turbo - Hochdruckpumpen System Gelpke-Kugel. Z.G.T. 2. 321; 337.

3400. *K. Hänlein.* Über Zentrifugalpumpen. Z.G.T. 2. 353.

3401. *G. Lindner.* Maschinen aus Steinzeug mit Berechnung der Zentrifugalpumpen und Exhaustoren. Z.V.D.I. 49. 1301.

3402. *N. N.* Testing of a Risdon-Sulzer 6-inch centrifugal pump. Am.M. 28 B. 51.

3403. *L. Klein.* Über freigehende Pumpenventile. Z.V.D.I. 49. 485; 618; 895; 1140. — *H. Berg* 894; 1139.

3404. *L. Klein.* Les soupapes de pompe à chute libre. R.D.M. 16. 558.

3405. *R. Reich.* Der Sondiertachygraph. Z.Ö.I.A.V. 57. 357; 369.

Inhalte.

3406. *Hillegaart.* Alte römische Masse- und Flächenberechnungen. Z.V. 34. 430.

3407. *Gebers.* Ein neues Hilfsmittel zur Flächenberechnung. Z.V. 34 554.

3408. *E. Puller.* Zur Inhaltsbestimmung eines Kreisabschnittes. Z.V. 34. 162.

3409. *F. Howkins.* A simple method of finding the area of irregular figures. Am.M. 28 B. 362.

3410. *F. Köstlin.* Konstruktion von Volumendiagrammen. Z.B.D. 9. 46.

3411. *S. D. B.* A simple demonstration of the prismoidal formula. E.N. 53. 362. — *T. G. D.* 444. — *T. T. Daniels* 495.

3412. *J. S. Worley.* A method of calculating the area of cross sections. E.N. 53. 77. — *R. A. Dawley* 126; 174.

3413. *R. H. M., W. Seely.* Calculating irregular cross sections. E.N. 53. 77.

3414. *J. A. Macdonald.* Eckels formula applied to irregular cross section area without plotting. E.N. 53. 521.

3415. *Wilcke.* Berechnung einer windschiefen Fläche. Z.V. 34. 185.

3416. *N. N.* Wie kann ein Baumstamm, aus dem ein vierkantiges Holz von größtmöglicher Tragfähigkeit ge-

schnitten werden soll, vorteilhaft ausgenutzt werden. A.H.I. 10. Nr. 5. 2; Nr. 6. 1.

3417. *B. F. Groat.* Determining the capacity of a cylindrical grain bin with eccentric conical hopper. E N. 53. 254; 345. — *R. Fletcher* 345.

3418. *C A. Vogler.* Das Wilskische Prisma und die Kubatur der Erdkörper. Z.V. 34. 169.

3419. *Puller.* Zur Erdmassenberechnung. C.B.B. 25. 207.

3420. *W. Bratkowski.* Einwebverhältnisse in ihrer Abhängigkeit von der Bindung, Schuß- und Kettendichte und den Garnnummern. Z.F.T. 4. 413; 438; 520. — *S. Marschek* 519.

3421. *E. W. Zeh.* Finding diameters of shell blanks. Am.M. 28. B. 60.

Kinematik.

3422. *V. Knorre.* Über die Drehung von Achsen unter alleiniger Einwirkung eines Kräftepaares. Z.I. 25. 242.

3423. *N. N.* The harmonic analysis of valve motions. Eg. 80. 36.

3424. *J. Torka.* Die Flächen zweiter Ordnung in den mathematischen Getrieben. V.V.G. 84. 183; 223.

3425. *N. N.* Verfahren zum Verzeichnen und Herstellen der Evolventenverzahnung. P.M.C. 38. 155; 160.

3426. *Wehage.* Über das Verhältnis der Zahnlänge zur Zahndicke bei Zahnrädern. P.J. 320. 275.

3427. *W. Hartmann.* Genauigkeitsgrad und Geschwindigkeitsverhältnis bei Verzahnungen. Z.V.D.I. 49. 163; 500. — *O. Gauke* 500.

3428. *E. Linsel.* Messung der Teilung von Zahnrädern. K.B. 22. 741.

3429. *H. Hugh.* A formula for milling angular teeth. Am.M. 28. A. 871.

3430. *G. G. Dana.* A diagram for cast-gear teeth. Am.M. 28 A. 627.

3431. *C. F. Smith.* The lay-out and construction of cams. Am.M. 28 A. 343, 368; 380; 407; 484; 516; 554. — *C. Alvord* 528; 770. — *W. V. Lowe* 528. — *H. B. Foster* 770.

3432. *B. A. Lenfest.* The lay-out and construction of cams-cams for rapid motion. Am.M. 28 A. 494.

3433. *C. Alvord.* A spiral-gear transmission. Am.M. 28 B. 396.

3434. *E. Dubosc.* Machine automatique à tailler, sans gabarit, les engrenages coniques. R.D.M. 16. 439.

3435. *W. Hartmann.* Lois du mouvement des distributions commandées par cames. R.D.M. 17. 551.

3436. *W. Pickersgill.* Du choix des excentriques dans les distributions à tiroirs superposés. R.D.M. 17. 360.

3437. *R. E. Froud.* Model experiments on hollow versus straight lines. Eg. 79. 521.

3438. *W. H. Raeburn.* An oblique worm drive lay-out. Am.M. 28 B. 281.

3439. *F. Krull.* Über Riemen und Riementriebe. Z.Ö.I.A.V. 57. 601; 609.

3440. *W. Cox.* To find the arc of contact of a belt on the smalles of two pulleys. Am.M. 28 B. 82.

3441. *W. Hartmann.* Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben mit unrunden Scheiben. Z.V.D.I. 49. 1581; 1624; 1808. — *Haberland.* 1808.

3442. *J. Küster.* Die Bewegungsübertragung von den Motoren auf die Automobilräder. J.A.M. 2. 129.

3443. *W. Pickersgill.* Die Wahl des Exzenter bei Doppelschiebersteuerungen. Z.V.D.I. 49. 1121.

3444. *S. G. Werner.* Kurvenführungen im Werkzeugmaschinenbau. Z.W. 9. 325; 354; 367; 396; V.V.G. 84. 35.

3445. *S. G. Werner.* Guidages curvilignes dans les machines-outils. B.S.E. 104. 620.

3446. *A. Koenig.* Die Makulage und ihre Verwendung bei Rotationsmaschinen. P.M.C. 38; 91; 93; 106; 112.

3447. *W. Schmitz.* Ein Lehrmittel für den Unterricht in der Musterung auf französischen Rundkulierstühlen. C.G.U. 23. 90.

3448. *C. Rosé.* Sur une nouvelle transmission par courroie, corde ou cable et contribution à l'étude du mécanisme de ce genre de transmission. R.D.M. 16. 413.

Kombinationslehre.

3449. *R. Perrin.* Sur une méthode nouvelle de rotation des enclenchements. A.D.M.P. (10) 8. 569.

Kurven.

3450. *A. E. Rhodes.* Drawing the isometric circle. Am.M. 28 B. 31. — *J. Melancon* 228.

3451. *H. G. Loeffler.* A simple method of constructing a parabola. E.N. 51. 63.

3452. *F. O. Hunt.* The ellipse in isometric projection. Am.M. 28 A. 426.

3453. *A. M. Haynes.* Diagram for spiral curves. E.N. 53. 333.

3454. *S. M. Kintner.* Alternating-current wave form analysis. E.W. 43. 1023.

3455. *W. J. Berry.* The theoretical determination of power curves. E. W. 43. 215. — *V. R. Heftler, J. C. Parker, R. Jones* 725; *F. R. Stowe* 726.

3456. *F. B. Rae.* Speed-time curves for automobile motors. E. W. 46. 693.

3457. *P. Sterling.* A simple easement curve. R. G. 38. 260.

3458. *L. Sossna.* Verbindung zweier Geraden durch zwei berührende Kreisbogen und deren gemeinschaftliche innere Tangente. Z. V. 34. 313. — *E. Hammer* 341.

3459. *S. N. Daugherty.* Problems in laying out curves. E. N. 51. 228. — *A. Emch* 228.

3460. *F. D. Daniels.* A neat method of plotting a curve of large radius. E. N. 51. 470.

3461. *A. S. Hobby.* To connect two curves with a tangent. E. N. 54. 18.

3462. *N. N.* Great Western Railway transition approaches. R. G. 38. 198 E.

3463. *J. H. Brooke, W. T. Whatson.* Determining superelevation on curves. E. N. 51. 283.

3464. *Puller.* Gleisberechnungen. Z. V. 34. 558.

3465. *E. Volkart.* Bestimmung der Lage einer Weiche, die vermittels Bogens ohne gerades Zwischenstück mit einem gegebenen Punkte zu verbinden ist. C. B. B. 25. 244.

3466. *A. Lugin.* Beitrag zur Lehre von der Berechnung der Bogenweichen und Geleisverbindungen. Z. Ö. I. A. V. 57. 653.

3467. *E. Mc Cullough.* The laying out of city lots bounded by curved and straight lines. E. N. 53. 497.

3468. *J. C. L. Fish.* Mathematics of the paper location of a railroad. E. N. 53. 272.

3469. *J. Owen.* English street railway construction. E. N. 54. 250; 255.

Magnetismus.

3470. *P. Langevin.* On the theory of magnetism. T. E. 56 108; 141.

3471. *L. G. Muaux.* Discussions rationelles et réelles des quantités magnétiques et électriques. E. N. 44. 241. — *F. Emde* 45. 321.

3472. *A. B.* Über das magnetische Verhalten von Eisenpulver verschiedener Dichte. E. Z. 26. 931.

3473. *J. A. Fleming and R. A. Hadfield* On the magnetic qualities of some alloys not containing iron. T. E. 55. 329.

3474. *J. Kuhn.* Elementare Ableitung der Feldstärke in der Mitte eines Solenoides. C. G. U. 23. 400.

3475. *M. R. Jouaust.* The phenomena of magnetic viscosity in steel used for industrial purposes and their influence on methods of measurement. T. E. 55. 792.

3476. *J. Herrmann.* Versuche über die Eisenarbeit im Dreh- und Wechselfeld. E. Z. 26. 747; 917; 1089. — *R. Hiecke* 916; 1087.

3477. *P. Schirmann.* Die mechanische Arbeitsleistung von Hebmagneten nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie. Z. E. W. 23 483.

3478. *E. Gumlich* und *P. Rose.* Über die Magnetisierung durch Gleichstrom und durch Wechselstrom. E. Z. 26. 503.

3479. *F. Rücker.* Beiträge zur Kenntnis der stetigen und stufenweisen Magnetisierung. E. Z. 26. 904; 979.

3480. *J. Sahulka.* Energieumwandlung während der Magnetisierung und Elektrisierung von Medien. E. Z. 26. 116; 741. — *F. Emde* 200; 873.

3481. *W. Wecker.* Vergleichende Unstersuchungen über lineare und drehende magnetische Hysteresis. Z. E. W. 23. 649.

3482. *E. Gumlich.* Versuche mit Heusler'schen ferromagnetischen Mn-Al-Cu-legierungen. E. Z. 26. 203.

3483. *K. Windmüller.* Die Wechselbeziehungen zwischen Magnetismus und Elektrizität. W. T. B. 67. 364.

3484. *E. Emde.* Das elektromagnetische Feld in Maschinen. Z. E. W. 23. 395; 409.

3485. *C. R. Underhill.* The law of the plunger electromagnet. E. W. 45. 934. — *F. Meyer* 1037.

3486. *C. R. Underhill.* The approximate calculation of plunger electromagnets. E. W. 46. 1035.

3487. *S. P. Thomson.* On the predetermination of plunger electromagnets. T. E. 53. 917; E. W. 44. 997.

3488. *P. Thieme.* Über eine neue elektromagnetische Kontaktvorrichtung für selbsttätige Schaltwerke. E. Z. 26. 186.

3489. *A. S. Hele-Shaw; A. Hay* and *P. H. Powell.* Hydrodynamical and electromagnetic investigation regarding the magnetic-flux distribution in toothed core armatures. T. E. 54. 213; 307.

3490. *G. F. C. Searle* and *J. R. Airey.* Standards of mutual induction. T. E. 56. 318.

3491. *W. M. Thornton.* The distribution of magnetic induction in multipolar armatures. T.E. 53. 749.

3492. *W. Peukert.* Neues Verfahren zur Bestimmung von Selbstinduktionskoeffizienten. E.Z. 26. 922; 1087. — *H. Zipp* 1087.

3493. *E. Wilson.* Self induction effects in steel rails. T.E. 56. 757.

3494. *E. Gumlich* und *P. Rose.* Vergleichende magnetische Untersuchungen mit den Fe-Prüfapparaten von Epstein, Möllinger und Richter. E.Z. 26. 403; 576. *G. Benischke* 500.

3495. *F. Janus.* Die Berechnung von Drehspulmeßgeräten. E.Z. 26. 560.

3496. *R. A. Greene.* Design for a magnetic brake for a 15 horse power, 500 volt motor. Am. M. 28. A. 244.

3497. *F. Niethammer.* Der einseitige magnetische Zug von Dynamos und Motoren. Z.E.W. 23. 420.

3498. *F. Tischendörfer.* Die Entwicklung der elektrischen Maschinen. E.Z. 26. 799; 875. — *P. J. Rutglos* 894.

3499. *R. Pohl.* Über Kommutierungsmagnete für Gleichstrommaschinen. E.Z. 26. 509.

3500. *W. M Thornton.* The magnetic reluctance of air cores in short coils. T.E. 53. 875.

3501. *A. Müller.* Die Wahl der Querschnitte des magnetischen Stromkreises von Transformatoren. Z.E.W. 23. 243.

Maßsysteme.

3502. *G. Gurnik.* Beitrag zur Kenntnis des C. G. S.-systems. W.T.B. 67. 427.

Maxima und Minima.

3503. *Hegemann.* Günstigste Lage des durch Rückwärtseinschnitt bestimmten Punktes. Z.V. 34. 425.

3504. *Wilcke.* Vorteilhafteste Weite für Dachverbindungen. Z.A.I. (2) 10. 453.

3505. *M. Merriman.* Economic depth of bridge trusses and depth for greatest stiffness. R.G.L. 39. 212.

3506. *P. F. Gaehr.* Grouping of cells to obtain maximum current. E.W. 45. 898.

Mechanik.

3507. *Wehage.* Der Kraftbegriff. Z.V.D.I. 49. 622; 939. — *E. v. d. Burchard.* 938.

Meßwerkzeuge.

3508. *T. Dokulil.* Das Universalwinkelinstrument von Mayer-Wiesmann. D.M. 13. 151; 165.

3509. *T. Dokulil.* Der Tachymeterschieber von Ingenieur E. Puller. D.M. 13. 188.

Mittelwerte.

3510. *A. Schmidt.* Ein Planimeter zur Bestimmung der mittleren Ordinaten beliebiger Abschnitte von registrierenden Kurven. Z.I. 25. 261.

Momente.

3511. *I. Wellisch.* Bestimmung der Trägheitsmomente von Umdrehungskörpern. Z.Ö.I.A.V. 57. 642.

3512. *P. Weiske.* Graphische Berechnung des Widerstandsmomentes von Eisenbeton-Platten und -Plattenbalken B.E.B. 4. 222.

Näherungsmethoden.

3513. *H. Lea.* Sines of angles. E. 100. 325; Eg. 80. 313.

3514. *„Copperhill“.* Right-angled triangles with sides of integral ratios. E.N. 53. 259.

3515. *Puller.* Bestimmung der Zahl π. Z.V. 34. 134.

3516. *M. d' Ocagne.* Sur la réprésentation approchée de la chainette. A.P.Ch. (8) 17. 243.

3517. *E. Hammer.* Über die Näherungen bei Anwendung des Fadendistanzmessers in der Tachymetrie. Z.V. 34. 721.

3518. *W. Hauff.* Die Konstruktion des Schleifbogens der Heusinger-Steuerung. Z.V.D. 349. 1641.

3519. *C. P. Nachod.* Some approximations of the B. and S. gauge and of the properties of copper wire. E.W. 46. 529. — *T. White* 658. — *A. Burt* 914.

3520. *L. Rosenbaum.* Näherungsverfahren bei der Berechnung elektrischer Leistungen bei gegebenem Arbeitsverlust. Z.E.W. 23. 4.

Nomographie.

3521. *E. G. Robinson.* Logarithmic charts. Am. M. 28. B. 842.

3522. *N. N.* Abaque Pellat pour le calcul du triangle par les deux côtés et l'angle compris. J.G. (6) 7. 99.

3523. *J. Schnöckel.* Die Steigerung der Genauigkeit graphischer Berechnungen mit Hilfe von Parabeltafeln. Z.V. 34. 414.

3524. *W. Láska.* Zur Anwendung der Nomographie in der Vermessungskunde. Z.V. 34. 753.

3525. *E. Wenner.* Graphische Tafeln für Tachymetrie. Z.V. 34. 257.

Numerisches Rechnen.

3526. *L. A. M.* Halving mixed numbers Am. M. 28. A. 60.

3527. *A. L. Haas.* Multiplying by 0. 7854 Am. M. 28. B. 539.

3528. *E. Serra.* Proving multiplication Am. M. 28. A. 87. — *F. C. Hendrick* 228. — *G. F. M.* 229.

3529. *E. d' Cullough.* The factoring method of extracting roots Am. M. 28. A. 83. — *H. H. Suplee* 197.

3530. *C. G. Richardson.* The multiplication and division of logarithms. Am. M. 28. B. 538.

3531. *S. P. Thomson.* Harmonic analysis reduced to simplicity. T. E. 55. 78.

3532. *A. Breydel.* Nature intime des rayons N et N_1. E.E. 41. 325.

Optik.

3533. *A. Brass.* Das Grundgesetz der Optik. C.Z.O.M. 26. 157; 171; 185; 199; 213; 228; 245; 259; 271; 286; 299; 314. — *K. Merlin* 176.

3534. *A. Kerber.* Zur Theorie der schiefen Büschel. Z.I. 25. 342.

3535. *Hohenner.* Untersuchung eines photogrammetrischen Objektives und Konstantenbestimmung eines photogrammetrischen Theodolits. Z.V. 34. 239.

3536. *N. N.* Die mikroskopische Bestimmung der Lage einer spiegelnden Fläche durch optischen Kontakt. C.Z.O. M. 26. 242.

3537. *E. Preuß.* Eine Erweiterung der Poggendorff'schen Spiegelablesungsmethode. E.Z. 26. 410.

3538. *A. G. Wilson.* Signal lenses. R.G.L. 39. 326.

3539. *K. Mayer.* Das Dreifarbensystem. Z.F.T. 4. 561.

3540. *K. Strehl.* Größe der Welt und Beugungstheorie. C.Z.O.M. 26. 15.

3541. *G. Eberhard.* Über eine Konkavgittermontierung nach Abney. Z.I. 25. 371.

3542. *N. N.* Die Bruhn'sche Methode zur Erkennung submikroskopischer Strukturen und damit zusammenhängende Untersuchungen über Doppelbrechung. C.Z.O.M. 26. 188; 203; 218.

3543. *Stark, Retschinsky* et *Shaposchinkoff.* Recherches sur l'arc électrique. E.E. 45. 481.

3544. *R. de Valbreuze.* Les arcs au mercure. E.E. 42. 121.

3545. *C. Léonard.* Variations dans une période, du flux lumineux émis par un arc voltaique alimenté par courants alternatifs. E.E. 42. 241; 287; 326.

3546. *A. Hoerburger.* Der elektrische Kohlenlichtbogen im Vakuum. P.J. 320. 182; 202; 228; 245.

3547. *B. Monasch.* Über die Lichtausstrahlung von Lichtbögen in Intensivbogenlampen. E.Z. 26. 67; 527; 616. — *Uppenborn* 132. — *H. Heimann* 417; 616.

3548. *H. T. Simon.* Über die Dynamik der Lichtbogenvorgänge und über Lichtbogenhysteresis. E.Z. 26. 818; 839.

3549. *L. Bloch.* Über die Photometrie unsymmetrischer Lichtquellen. E.Z. 26. 646.

3550. *W. Wedding.* Über den Wirkungsgrad und die praktische Bedeutung der gebräuchlichsten Lichtquellen. J.G.W. 48. 1; 25; 45; 65, 87; 105.

3551. *E. P. Hyde.* On the theory of the Matthews and the Russell-Léonard photometers for the measurment of mean spherical and mean hemispherical intensities. E.W. 44. 687.

3552. *K. Krüß.* Zur Flimmerphotometrie. Z.I. 25. 98.

3553. *K. Strehl.* Astrophotometrie. Z.I. 25. 199.

3554. *N. N.* Optische Sonnentheorien. C.Z.O.M. 26. 269.

3555. *M. Dehalu.* La méthode phototopographique. N.A.C. (6) 2. 105; 119.

3556. *P. Seliger.* Topographische Triangulation durch Stereophotogrammetrie. Z.V. 34. 382.

3557. *K. Strehl.* Beleuchtungsprinzipien. C.Z.O.M. 26. 227.

3558. *F. Meisel.* Über die Helligkeitsverteilung in künstlich beleuchteten Räumen. E.Z. 26. 860.

3559. *L. Stelz.* Über die Beleuchtung von Schulräumen. E.Z. 26. 159.

3560. *C. C. Paterson.* Some investigations in the 10 c. p. Harcourt pentane lamp. T.E. 53. 751.

3561. *H. Kessler.* Über Photographie. C.G.U. 23. 177.

3562. *L. A. Terven.* Inter-relation of ballast and glower in the Nernst lamp. E.W. 46. 305.

3563. *E. P. Hyde* and *H. B. Brooks.* An efficiency meter for electric incandescent lamps. E.W. 46. 942.

3564. *K. Martin.* Die Korrektion negativer Zonenfelder. C.Z.O.M. 26. 68.

3565. *K. Strehl.* Untersuchungen eines Mikroskopobjektives. Z.I. 25. 3.

3566. *Greeff.* Augenärztliche und hygienische Schuluntersuchungen. T.G 8. 135.

3567. *V. Siklóssy.* Über die Vereinheitlichung der Sehschärfebestimmung. D.M. 13. 199; 213.

3568. *C. Pulfrich.* Über die stereoskopische Betrachtung eines Gegenstandes und seines Spiegelbildes. Z.I. 25. 93.

3569. *C. Pulfrich.* Neue stereoskopische Versuche, insonderheit Demonstrationen der durch die Erweiterung des Objektivabstandes hervorgerufenen spezifischen Wirkung der Zeiß'schen Doppelfernrohre. Z.I. 25. 233.

3570. *O. Krell.* Der gegenwärtige Stand der Scheinwerfertechnik. J.S.G.B. 6. 312.

3571. *F. F. Martens.* Über einen neuen Beleuchtungsmesser. J.G.W. 48. 85.

3572. *L. Bloch.* Das Kugelphotometer in Theorie und Praxis. E.Z. 26. 1047; 1074. — *R. Ulbricht* 1184.

3573. *R. Ulbricht.* Die Vorgänge im Kugelphotometer. E.Z. 26. 512.

3574. *W. Bechstein.* Ein neues Flimmerphotometer. Z.I. 25. 45.

3575. *C. Léonard.* Mésophotomètre pour la mesure directe du flux lumineux des sources lumineuses. E.E. 45. 329.

3576. *W. Láska.* Tachymeter Láska Rost. Z.I. 25. 225.

Perspektive.

3577. *M. v. Rohr.* Über perspektivische Darstellungen und die Hilfsmittel zu ihrem Verständnis. Z.I. 25. 293; 329; 361.

3578. *H. Banke.* Drei praktische Perspektivkonstruktionen. G.F.W. 1. 178.

3579. *L. Schupmann.* Über ein eigenartiges Verfahren bei den perspektivischen Konstruktionen. D.B.Z. 39. 346.

Photogrammetrie.

3580. *N. N.* Applications de la photographie métrique aux constatations judiciaires. G.C. 47. 268.

3581. *R. Fuchs.* Photogrammetrie ohne Theodolit. Z.V. 34. 449.

Physik.

3582. *N. N.* The structure of the atom. Eg. 79. 350.

3583. *F. Lubberger.* Materie, Strahlen, Wellen und Radium. T. 40. 135.

Planimeter.

3584. *Flamant.* Le planimètre Prytz ou planimètre Hachette. R.D.M. 17. 32.

Prinzipien der Mathematik.

3585. *A. R. Richardson.* Infinity. E. 100. 393.

Rechenapparate.

3586. *„Draftsman".* A triangle for dividing circles. Am.M. 28. A. 392.

Rechenschieber.

3587. *C. P. Nachod.* Short cuts on the slide rule. Am.M. 28. B. 666.

3588. *B. A. Greene.* Locating the decimal point with the slide rule. Am. M. 28. A. 109.

3589. *C. N. Haggart.* Computing bevels with the slide rule. E.N. 54. 124.

3590. *W. H. Raeburn.* Laying out cone pulleys and back gears by the slide rule. Am.M. 28. B. 62.

3591. *M. S. Howard.* Wire calculation by the slide rule. E.W. 46. 1125.

3592. *A. L. Bell.* Methods of rod-holding in stadia surveying and description of a new stadia slide rule. E.N. 54. 486.

Reibung.

3593. *H. Heimann.* Versuche über Lagerreibung nach dem Verfahren von Dettmar. Z.V.D.I. 49. 1161; 1224.

3594. *J. Edgar.* The friction clutch. Am.M. 28. A. 859.

Statik.

3595. *E. Collignon.* Recherches sur l'emploi du pendule pour la détermination des moments d'inertie. R.D. M. 17. 521.

3596. *S. F. Holtzman.* Moments in columns due to eccentric loading. E.N. 53. 346.

3597. *B. Wiley.* A long span transmission line. E.W. 43. 721.

3598. *M. Schurich.* Zur Berechnung unbestimmter massiver Balken. C.B.B. 25. 229.

3599. *O. Gottschalk.* Stützmoment des kontinuierlichen Eisenbetonbalkens. B.E.B. 4. 90.

3600. *A. Ostenfeld.* Graphische Behandlung der kontinuierlichen Träger mit festen elastisch senkbaren oder drehbaren und elastisch senk- und drehbaren Stützen. Z.A.I. (2) 10. 47.

3601. *A. Böttcher.* Über die Bestimmung der variablen Stabkräfte von Fachwerken mit bewegten Lasten. P.J. 320. 678; 696.

3602. *W. Schlick.* Brückenträger als Raumfachwerke. V.V.G. 84. 95.

3603. *A. Kroitzsch.* Neigungsbestimmung paralleler Diagonalen bei Fachwerkspfeilern. Z.Ö.I.A.V. 57. 438.

3604. *E. Bender.* Das statisch bestimmte mehrteilige Netzwerk Mehrtens'scher Bauart. C.B.B. 25. 426.

3605. *Auric.* Note sur le calcul d'une voûte en maçonnerie. A.P.Ch. (8) 20. 282.

3606. *J. Schreier.* Zur statischen Untersuchung von flachen Gewölben. Z.Ö.I.A.V. 57. 2.

3607. *J. Schreier.* Graphostatische Untersuchung des flachen Parabelgewölbes. Z.Ö.I.A.V. 57. 701.

3608. *Thérel.* Application de la méthode des joints secs à la construction des voûtes biaises. A.P.Ch. (8) 17. 63.

3609. *A. Francke.* Einiges über Erddruck. Z.A.I. (2) 10. 297.

3610. *B. Safir.* Erddruck-Trajektorien. Z.A.I. (2) 10. 463.

3611. *Lefèbvre.* Note sur un procédé de fondations en terrains inconsistents. A.P.Ch. (8) 19. 225.

3612. *E. Sherman Gould.* The stability of surcharged masonry dams. E.N. 51. 204. 307. — *C. H. Emmons* 307.

3613. *Resal.* Calcul des ponts courbes. A.P.Ch. (8) 20. 236.

3614. *O. Schmiedel.* Entwurf und statische Berechnung einer Zweigelenkbogenbrücke mit horizontalem Zugband. P.M.C. 38. 47; 57; 65; 72; 81; 88; 96.

3615. *W. Hildenbrand.* Die Hängebrücken von der ältesten bis zur neuesten Zeit. T. 40. 73; 99; 118.

3616. *Considère.* Calcul des ponts en arc et des ponts suspendus. A.P.Ch. (8) 17. 81.

3617. *W. M. Torrance.* Design and construction of high bridge piers of reinforced concrete. E.N. 53. 548.

3618. *Thiollière.* Note sur un système de pont à arc encharpente et à tirants métalliques. A.P.Ch. (8) 20. 205.

3619. *A. Morizot.* Les ponts métalliques, système Vierendeel. G.C. 47. 108.

3620. *N. N.* A short method for computing deck plate girder railway bridges. E.N. 53. 231.

3621. *N. N.* Eiserner Steg von 17 m Spannweite. P.M.C. 38. 200.

3622. *N. N.* The worlds largest concrete steel arch bridge: The Gruenwald bridge at Munich. E.N. 53. 199.

3623. *Dircksen.* Die neuen österreichischen Vorschriften für den Bau und die Unterhaltung der eisernen Brücken. O.F.E. (2) 42. 117.

3624. *J. Melan.* Die Betoneisenbrücke über den Polceverawildfluß bei Genua. T.B. 37. 14.

3625. *K. Bernhard.* Der Wettbewerb um eine feste Straßenbrücke über den Rhein zwischen Ruhrort und Homberg. Z.V.D.I. 49. 241; 432; 502.

3626. *K. Bernhard.* Die Treskowbrücke zu Oberschöneweide bei Berlin. Z.V.D.I. 49. 1141; 1243; 1268.

3627. *K. Bernhard.* Die Eisenbahnbrücke über die Havel bei Brandenburg. Z.V.D.I. 49. 1657.

3628. *N. N.* Eiserne offene Halle. P.M.C. 38. 135; 143; 151.

3629. *N. N.* Sudhaus. P.M.C. 38. 142.

3630. *J. Grüters.* Der Getreidesilospeicher in Frankfurt a. M. S.D.B. 15. 13.

3631. *C. Schenck.* Vergleichsversuche mit verschiedenen Wagbalkenformen. D.M. 13. 65; 83.

Trigonometrie.

3632. *Puller.* Einige einfache mathematische Beweise. Z.V. 34. 362.

3633. *C. T. Lewis.* The corner slope of square hoppers: a table of cotangent squares. E.N. 53. 346. — *J. C. Laska, W. H. Schuermann* 390.

3634. *W. W. Urquhart.* A problem in improving alinement. E.N. 54. 438. — R. W. Gay 517. — *W. N. Frickstad* 633.

3635. *H.* Rechnungsmäßige Ermittelung von Zwischenkoordinaten. T.B.B. 18. 70.

3636. *G. W. Herdman.* Tacheometry. Eg. 79. 81.

3637. *A. Conturcau.* Des méthodes de levers et de calculs dans les opérations de grande étendue. J.G. (6) 7. 268.

3638. *A. Bergès.* Les Niveaux Blondat à long tube, à eau seule et à mercure. J.G. (6) 7. 16; 36; 62; 84; 118; 143; 153.

3639. *C. E. Smith, A. Llano.* Locating a section corner from a random meridian and parallel. E.N. 54. 381; 518.

3640. *A. Klingatsch.* Fadentachymeter mit Mikrometerschraube von R. und A. Rost. Z.I. 25. 305.

3641. *Puller.* Beschreibung eines neuen Tachymeterschiebers. Z.A.I. (2) 10. 153.

Wärme.

3642. *A. Fliegner.* Das Ausströmen heißen Wassers aus Gefäßmündungen. S. B. Z. 45. 282; 306.

3643. *J. Dewar.* Physikalische Konstante bei niederen Temperaturen. Z. K. F. G. 8. 29.

3644. *F. Caubet.* Die Verflüssigung von Gasgemischen. Z. K. F. G. 8. 65; 75; 105.

3645. *N. N.* Über Schmelzpunkte von Metallen. P. J. 320. 489; 509; 525.

3646. *C. P. Nachod.* Temperature effects in spans. E. W. 46. 988.

3647. *C. Cario.* Wärmemechanik. Z. D. M. 28. 375; 387; 395; 408; 415; 427; 435; 447; 460; 470; 477.

3648. *C. Heinel.* Vereinfachte Behandlung thermodynamischer Aufgaben des praktischen Maschinenbaus vermittelst Schaulinien. Z. K. F. G. 8. 78; 85; 107; 132; 146; 157.

3649. *Mollier.* Nouveaux diagrammes appliqués à la thermodynamique industrielle. B. S. E. 104. 165.

3650. *R. M. N.* The meaning of adiabatic. E. 100. 583.

3651. *O. Dieterici.* Die kalorischen Eigenschaften des Wassers und seines Dampfes bei hohen Temperaturen. Z. V. D. I. 49. 362.

3652. *O. Knoblauch, R. Linde* und *H. Klebe.* Die thermischen Eigenschaften des gesättigten und des überhitzten Wasserdampfes zwischen 100 und 180° C. Z. V. D. I. 49. 1697; 1743.

3653. *C. Walckenaar.* Compte rendu de quelques essais relatifs à l'écoulement de la vapeur. A. D. M. P. (10) 8. 613.

3654. *R. H. Smith.* The expansion of wet steam. E. 100. 378.

3655. *F. Krämer.* Die Kompression nasser Dämpfe. Z. G. K. 12. 80.

3656. *J. Krumper.* 100 Dampfverbrauchsversuche. Z. V. D. I. 49. 1309; 1345.

3657. *N. N.* Steinkohle, Naphtha und Torf in ihrem Wertverhältnis für Dampf- und Krafterzeugung. Z. D. M. 28. 458; 470; 478.

3658. *R. T. Glazebrook.* The temperature curves of field coils. T. E. 55. 353.

3659. *J. M. Gray.* Latent heat and specific heat. Eg. 79. 615; 650.

3660. *F. Foster.* A new work diagram for gases. E. 100. 532.

3661. *G. Mie.* Über die Wärmeleitung an einem verseilten Kabel. E. Z. 26. 137.

3662. *H. F. Benson.* The transmission of heat from water through corrugated copper tubes. Am. M. 28 B. 292.

3663. *W. Allner.* Zur Kenntnis der Bunsenflamme. J. G. W. 48. 1034; 1057; 1081; 1107.

3664. *V. Grazioli.* Ein Beitrag zur Frage der Explosionsgefahr von Dampfapparaten. Z. D. W. 30. 154.

3665. *J. F. Simmance.* Calorimetry. Eg. 79. 66.

3666. *F. Kade.* Verfahren zur Feststellung der endgültigen Erwärmung eines intermittierend belasteten elektrischen Apparates. E. Z. 26. 346.

3667. *A. Palme.* Zusammenhang von Temperatur und Spannung bei Thermoelementen. Z. E. W. 23. 413.

3668. *P. Humann.* Über die Erwärmung von verseilten Dreifachkabeln in Erde verlegt. E. Z 26. 533.

3669. *H. Mehner.* Über Gleichgewichtszustände bei der Reduktion der Eisenerze. V. V. G. 84. 75.

3670. *O. Busse.* Über die Berechnung der Belastungen von Lokomotiven und die Bestimmung der Fahrzeiten im täglichen Betriebe. O. F. E. (2) 42. 123.

3671. *Strahl.* Der Wert der Heizfläche für die Verdampfung und Überhitzung im Lokomotivkessel. Z. V. D. I. 49. 717; 771; 926.

3672. *N. N.* Locomotive test of the Pennsylvania at St. Louis. R. G. 37. 199.

3673. *M. F. Gutermuth.* Leistungsversuche an Wolfschen Heißdampflokomobilen. Z. V. D. I. 49. 189.

3674. *N. N.* Leistungsversuche an einer Wolfschen Heißdampflokomobile. K. B. 22. 231.

3675. *K. Schreber.* Explosionsmotoren mit Einführung verdampfender Flüssigkeiten. P. J. 320. 33; 58; 65; 84.

3676. *G. Grüttke* und *R. Stetefeld.* Neuere Absorptionsmaschinen. Z. G. K. 12. 120.

3677. *Eberle.* Die Wärmeausnutzung von Dampfbraupfannen. Z. B. D. 9. 183.

3678. *B. Müller.* Dampfanlagen nach dem Kreislaufsystem und Kondenswasserverwertung mittels Rückspeiser. G. I. 28. 229.

3679. *H. Hort.* Über die Beurteilung von Dämpfen, die in Heiß-, Abwärme- und Kaltdampfmaschinen die Kreisprozesse vermitteln. Z. G. K. 12. 1; 28; 69.

3680. *V. Blaess.* Beitrag zur Theorie der Dampfmaschinendiagramme. Z. V. D. I. 49. 697.

3681. *Debye.* Über die Konstruktion der Dampfdiagramme auf Grund der Gutermuthschen Beobachtungen und der Theorie der strömenden Dämpfe. Z. V. D. I. 49. 1913.

3682. *Nerger.* Eintrittsspannung und Dampfverbrauch bei Dampfmaschinen. Z.D.M. 28. 256.

3683. *R. H. Smith.* Efficiency of compression in steam engines. E. 100. 434.

3684. *H. Klemperer.* Versuche über den ökonomischen Einfluß der Kompression bei Dampfmaschinen. Z.V.D.I. 49. 797.

3685. *O. Berner.* Die Anwendung des überhitzten Dampfes bei der Kolbenmaschine. Z.V.D.I. 49. 1061; 1108; 1235; 1385; 1470; 1522.

3686. *A. Langrod.* Zur Theorie der Dampfdrosselung in den Einlaßkanälen der Dampfmaschinen. P.J. 320. 753.

3687. *L. Crusius.* Abdampfungsheizungen und deren Einfluß auf den Nutzeffekt der Dampfmaschine. G.I. 28. Festnummer 37.

3688. *F. Sinigaglia.* La surchauffe appliquée à la machine à vapeur d'eau. R.D.M. 17. 123; 239; 440.

3689. *N. N.* Hochhubsicherheitsventile. K.B. 22. 473.

3690. *A. L. Mellanby.* The effects of steam jacketing. Eg. 80. 197; 227.

3691. *N. N.* Ein Beitrag zur Berechnung von Dampfüberhitzern. P.M.C. 38. 114.

3692. *A. Lebrecht.* Abwärme und deren Ausnützung bei Maschinenanlagen. T. 10. 41.

3693. *E. R. Briggs.* On the economy of reheaters. E. 99. 180.

3694. *A. Dosch.* Nutzen von Speisewasservorwärmern, die durch Abgase geheizt werden. Z.B.D. 9. 5; 11; 24; 31; 44.

3695. *E. R. Briggs.* Feed water heaters. E. 100. 77.

3696. *R. Barkow.* Dampfturbinen. Z.D.M. 28. 33.

3697. *N. N.* The compound steam turbine. Eg. 79. 37; 137. — *W. E. W. Millington* 81.

3698. *A. Baumann.* Zur Ausführungsmöglichkeit von Gasturbinen. Z.G.T. 2. 375.

3699. *A. O. Jhering.* Zur Theorie der Gasturbinen. J.G.W. 48. 640; 657.

3700. *R. Barkow.* Zur Frage der Gasturbine. Z.G.T. 2. 22.

3701. *H.* Die thermodynamischen Grundlagen der Gasturbine. Z.G.T. 2. 248; 296; 311.

3702. *K. Schreber.* Die Temperatur in den Turbinengasmaschinen. Z.G.T. 2. 52.

3703. *J. Rude.* Wasserumlauf in Dampfkesseln und seine Bedeutung. Z.D.M. 28. 115; 138; 148.

3704. *J. Rude.* Über den Wärmedurchgang bei Kesselheizflächen. P.J. 320. 433; 453.

3705. *E. Emanaud.* Mesure de la quantité d'eau entrainée par la vapeur des générateurs. G.C. 47. 245.

3706. *A. Dosch.* Zusammenhang zwischen Kohlensäuregehalt und Abgangstemperatur der Kesselgase. P.J. 320. 349; 363.

3707. *N. N.* Chaudière inexplosible, système Castelnau. P.E.M. (5) 4. 36.

3708. *A. Bement.* Testing steam boilers. R.G. 37. 618.

3709. *A. B. Helbig.* The efficiency of waste gas boilers in connection with rotary cement kilns. E.N. 53. 163.

3710. *Philippow.* Verwendbarkeit von Verbrennungsmotoren zur Fortbewegung moderner Kriegsschiffe. S.B. 7. 18; 65; 105; 152; 253; 294; 340.

3711. *E. Capitaine.* Zur Frage der Verwendbarkeit von Verbrennungsmotoren für die Fortbewegung von Kriegsschiffen. S.B. 7. 411; 463.

3712. *E. Mérigault.* Théorie des moteurs à gaz et à pétrole. A.D.M.P. (10) 7. 153.

3713. *K. Bräuer.* Der Wärmedurchgangskoeffizient für Gasmotoren und Diagrammen von Prof. Dr. Slaby. P.J. 320. 305; 326.

3714. *W. Nernst.* Physikalisch-chemische Betrachtungen über den Verbrennungsprozeß in den Gasmotoren. Z.V.D.I. 49. 1426.

3715. *R. Habermann.* Essai d'une machine frigorifique à absorption. B.S.E. 104. 970.

3716. *F. Krämer.* Kühlmaschinen zur Erzielung tiefer Temperaturen. Z.G.K. 12. 5.

3717. *E. R. Briggs.* Cooling water for condensers. Am.M. 28 A. 656.

3718. *C. Rudolf.* Über Wasserrückkühlwerke. Z.G.T. 2. 264.

3719. *O. H. Mueller.* Rückkühlwerke Z.V.D.I. 49. 5; 45; 132.

3720. *O. Krell.* Mangelhafter Schornsteinzug. Z.D.B. 9. 115.

3721. *L. H. Fry.* The value of heating surface. R.G. 37. 42.

3722. *L. B. Jones.* Heating surface and boiler power. R.G. 37. 48. — *P. T. Werner* 148.

3723. *F. Gremmels.* Beitrag zur Berechnung der Dampfleitung von Niederdruckdampfheizungen. G.I. 28. 1.

3724. *N. N.* Hot-water heating system and table of heat-transmission coefficients. E.N. 51. 102.

3725. *J. D. Hoffman.* The design of centralstation hot-water-heating systems E.N. 54. 75.

3726. *F. Gremmels.* Über Warmwasserheizung mit Schnellumlauf G.I. 28. 443.

3727. *F. Gremmels.* Die Berechnung der Warmwasser-Etagenheizung. G.I. 28 Festnummer 34.

3728. *E. Ritt.* Bestimmung der Rohrweiten bei Etagenwarmwasserheizung und bei gewöhnlicher Warmwasserheizung mit Verteilung von oben. G.I. 28. 304.

3729. *J. Ritter.* Berechnungen der Rohrweiten bei Etagen-Warmwasserheizungen unter Verwendung der Rietschelschen Tabellen für die Bestimmung von $\frac{v^2}{2g}\left(\Sigma\zeta + \frac{\varrho}{d} l\right)$. G.I. 28. 549.

3730. *O. Krellsen.* Warmwasserheizung. Einrohrsystem mit sekundärer Zirkulation. G.I. 28. 425; 489.

3731. *E. F. Roeber.* Thermodynamics of the electric incandescent lamp. T.E. 56. 70; E.W. 46. 567.

3732. *T. Immenkötter.* Über das Junkersche Kalorimeter. J.G.W. 48. 736; 761; 780.

3733. *O. Steffens.* Die Methoden und Instrumente der Feuchtigkeitsbestimmung. D.M. 13. 27; 39; 53; 81; 95; 119; 141; 191; 201; 216; 227; 240; 250; 273; 287.

3734. *L. Johnson.* Some elementary facts relating to hygrometry. E.N. 53. 175.

3735. *R. Fleischberger.* Efficiency of injectors. E. 99. 198.

3736. *C. Naske.* Die Wärmebilanz des Zement-Drehofens. Z.V.D.I. 49 1355.

3737. *K. Reyscher.* Einiges über Trockenanlage. Z.V.D.I. 49. 2057.

3738. *B. Osann.* Ist es vorteilhaft den Hochofenwind zu trocknen? S.E.D. 25. 73.

3739. *F. Haier.* Die Rauchfrage, die Beziehungen zwischen der Rauchentwicklung und der Ausnutzung der Brennstoffe und die Mittel und Wege zur Rauchverminderung im Feuerungsbetrieb. Z.V.D.I. 49. 20; 83; 167.

3740. *L. Guillet.* Aciers à outils à coupe rapide. M.I.C. 58 A. 919.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

3741. *W. C. Rorty.* Application of the theory of probability to telephone traffic. E.W. 45. 829.

3742. *K. Hauck.* Gefahren der Dampfkesselreinigung. Z.D.W. 30. 57; 115.

Winkelteilung.

3743. *Brenneke* and *Fay.* An instrument for subdividing angles and squaring circles. E.N. 51. 450.

3744. *C. L. Bogert.* A table for finding the length of one side of any polygon inscribed in a circle. E.N. 54. 357.

Zeicheninstrumente.

3745. *V. Lebeau.* Ein neuer Kurvenschreiber. P.J. 320. 120.

3746. *Osske.* Ein neuer Biegungszeichner und die damit gemessenen Stoßwirkungen von Straßenfahrzeugen auf Brückenträger. B.E.B. 4. 173; 193.

Über eine Methode die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ Constans numerisch zu integrieren.

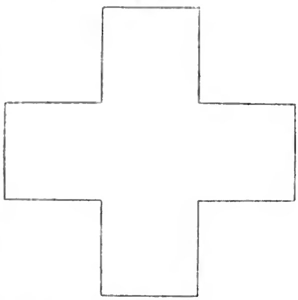
Von C. Runge in Göttingen.

Die Bestimmung der Torsion eines zylindrischen Stabes mit beliebigem Querschnitt läuft darauf hinaus, eine Funktion u der rechtwinkligen Koordinaten x, y zu finden, die im Innern des Querschnitts der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{Const.}$$

genügt, während sie auf dem Rande des Querschnittes Null ist.[1]) Ich möchte hier eine Methode entwickeln, um diese Aufgabe zu lösen und zwar will ich sie bei einem speziellen Beispiele durchführen, weil es gerade auf die numerische Ausführung ankommt. Aus dem speziellen Beispiel ergibt sich von selbst, wie man in andern Fällen zu verfahren hat.

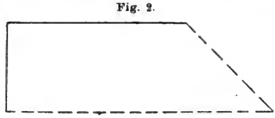
Fig. 1.



Der Querschnitt des Stabes sei ein aus fünf Quadraten zusammengesetztes Kreuz (Fig. 1).

Aus Symmetriegründen kann man sich darauf beschränken den achten Teil des Querschnitts (Fig. 2) zu betrachten. Kennt man die Werte von u in diesem Teil des Querschnittes, so kennt man sie in dem ganzen Querschnitt. Das Verfahren besteht nun darin, daß wir in den Querschnitt ein Netz von Quadraten einzeichnen und die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzen, in der die Differenzen aufeinander-

Fig. 2.



1) Vergl. z. B. L. Prandtl. Jahresber. d. deutschen Math.-Ver. Bd. 13, 1904.

folgender Werte von x und y gleich der Seite der quadratischen Maschen des Netzes sind. Die Differenzengleichung liefert lineare Gleichungen zwischen den Werten von u in den verschiedenen Netzpunkten und zwar erhalten wir je eine Gleichung für jeden im Innern des Querschnitts gelegenen Netzpunkt, so daß sich die Werte von u in den Netzpunkten daraus bestimmen lassen. Ist das Netz hinreichend dicht, so werden die gefundenen Werte von u sehr wenig von den wahren Werten verschieden sein, und man kann daraus mit beliebiger Genauigkeit die gesuchte Fläche interpolieren.

Es sieht nun zunächst so aus, als ob durch die große Zahl von Netzpunkten, die man bei einiger Genauigkeit anzunehmen genötigt ist, die Rechnung sehr beschwerlich werde. Das ist indessen nicht so, weil andrerseits in jeder Gleichung nicht mehr als 5 Unbekannte vorkommen können. Die Ausführung unseres Beispiels wird am besten zeigen, welchen Umfang die Arbeit annimmt.

Es bezeichne u den Wert der gesuchten Funktion in einem Netzpunkt und u_1, u_2, u_3, u_4 die Werte in den vier benachbarten Netzpunkten, und es sei ferner die Seite einer Masche gleich h, so wird die Differenzengleichung die Form annehmen

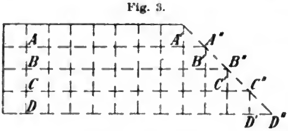
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u = h^2 \cdot C.$$

Hierin würden von den Werten u_1, u_2, u_3, u_4 diejenigen, die etwa auf den Rand fallen, gleich Null zu setzen sein. Wir führen zunächst statt der Funktion u die ihr proportionale Funktion $v = -u/h^2C$ ein und erhalten so die Gleichung:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v = -1.$$

Solcher Gleichungen gibt es eben so viele wie innere Netzpunkte. Sei z. B. der achte Teil des Netzes in Fig. 3 dargestellt, so haben wir es im ganzen mit 273 inneren Netzpunkten zu tun, von denen wir aber wegen der Symmetrieverhältnisse nur 42 ins Auge zu fassen brauchen. Man kann nun die Werte von v in diesen 42 Punkten als lineare Funktionen von 4 unter ihnen ausdrücken.

Fig. 3.



Bezeichnet man z. B. die Werte von v in den vier Punkten A, B, C, D mit α, β, γ, δ, so ergeben sich die Werte von v in den rechts benachbarten Netzpunkten aus den vier linearen Gleichungen, die den Netzpunkten A, B, C, D entsprechen. Denn die übrigen in diesen Gleichungen vorkommenden Werte von v sind entweder Null, weil sie Randpunkten entsprechen, oder, wie der Wert in dem zu C symmetrischen Punkte, durch das Symmetrieverhältnis

gegeben. In dem zu A rechts benachbarten Punkte z. B. ist der Wert von v gleich

$$4\alpha - \beta - 1,$$

in dem zu B, C, D rechts benachbarten

$$-\alpha + 4\beta - \gamma - 1, \quad -\beta + 4\gamma - \delta - 1, \quad -2\gamma + 4\delta - 1.$$

Aus diesen vier Werten lassen sich wiederum die folgenden vier rechts benachbarten Werte als lineare Funktionen von α, β, γ, δ und so fortfahrend schließlich auch die Werte in den Punkten A', A'', B', B'', C', C'', D', D'' als lineare Funktionen von α, β, γ, δ ermitteln. Die Rechnung wird am besten zuerst für $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ durchgeführt. Das liefert das von α, β, γ, δ unabhängige Glied der linearen Funktion. Nun berechnet man für sich die Koeffizienten je einer der Unbekannten α, β, γ, δ. Das konstante Glied fällt nun in den linearen Relationen, welche die Koeffizienten derselben Unbekannten in den verschiedenen Vertikalreihen verbinden, fort, so daß, wenn z. B. die Koeffizienten von α in drei benachbarten Vertikalreihen mit

$$\begin{matrix} a_1 & a_1' & a_1'' \\ a_2 & a_2' & a_2'' \\ a_3 & a_3' & a_3'' \\ a_4 & a_4' & a_4'' \end{matrix}$$

bezeichnet werden, die Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} a_1 + 0 + a_2' + a_1'' - 4a_1' &= 0 \\ a_2 + a_1' + a_3' + a_2'' - 4a_2' &= 0 \\ a_3 + a_2' + a_4' + a_3'' - 4a_3' &= 0 \\ a_4 + a_3' + a_3' + a_4'' - 4a_4' &= 0. \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen gelten auch für die Koeffizienten der andern Unbekannten. Es zeigt sich nun, daß es nur nötig ist, die Rechnung für die Koeffizienten einer der vier Unbekannten auszuführen. Hat man diese, so sind die Koeffizienten der andern drei Unbekannten ebenfalls gefunden. Bezeichnen z. B. d_1, d_2, d_3, d_4 die Koeffizienten von δ in einer Vertikalreihe, so ist $a_1 = d_4 - d_2$, $a_2 = d_3 - d_1$, $a_3 = d_2$, $a_4 = 2d_1$, wovon man sich durch einen Induktionsschluß sogleich überzeugen kann. Analog sind die Koeffizienten von β gleich

$$d_3 - d_1, \quad d_4, \quad d_3 + d_1, \quad 2d_2$$

die von γ gleich

$$d_2, \quad d_1 + d_3, \quad d_4 + d_2, \quad 2d_3.$$

Ich setze die Koeffizienten d hierher, um eine Vorstellung davon zu geben, wie sie von links nach rechts anwachsen.

0	0	0	− 1	− 16	− 160	− 1296	− 9344	− 62736			
0	0	+ 1	12	97	672	4320	26656	160480	950944		
0	− 1	− 8	− 49	− 280	− 1569	− 8752	− 48832	− 272944	− 1528863	− 8581384	
1	4	17	80	401	2084	11073	59712	325439	1787932	9884015	54910896.

Das von α, β, γ, δ unabhängige Glied ist in der folgenden Tabelle angegeben

0	− 1	− 4	− 13	− 44	− 165	− 680	− 3001	− 13881			
0	− 1	− 3	− 5	+ 1	+ 63	+ 445	+ 2556	+ 13852	+ 73821		
0	− 1	− 3	− 6	− 11	− 30	− 160	− 1073	− 7089	− 44864	− 274878	
0	− 1	− 3	− 6	− 10	− 13	+ 17	+ 400	+ 3728	+ 28689	+ 200755	+ 1324086.

Hat man auf diese Weise die Werte von v in den acht Netzpunkten A', A'', B', B'', C', C'', D', D'' als lineare Funktionen von α, β, γ, δ ausgedrückt, so ergeben sich nun für die vier Unbekannten α, β, γ, δ vier lineare Gleichungen. Infolge der Symmetrieverhältnisse besteht nämlich eine Gleichung zwischen den Werten von v in den drei Punkten A', B', A'' und ebenso zwischen den Werten in B', C', B'' sowie C', D', C'' und endlich D', D''.

Sind diese Gleichungen befriedigt, so sind nunmehr die 273 Gleichungen für alle inneren Netzpunkte erfüllt.

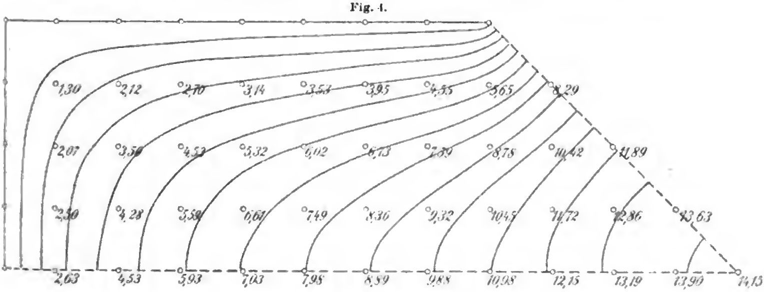
Die Werte von $\alpha\beta\gamma\delta$ müssen erheblich genauer berechnet werden als man die Werte von v haben will. Denn die Werte von v in Punkten, die weit nach rechts liegen, ändern sich sehr stark, wenn eine der Größen $\alpha\beta\gamma\delta$ sich ändert. Am besten verfährt man wohl so, zunächst $\alpha\beta\gamma\delta$ auf einige Stellen richtig zu berechnen und mit diesen Werten die sämtlichen Werte von v zu berechnen. Die acht Werte in den Punkten A', A'', B', B'', C', C'', D', D'' werden nun die geforderten Relationen genähert erfüllen. Dadurch erhält man neue Gleichungen, denen die Verbesserungen von $\alpha\beta\gamma\delta$ genügen müssen. Diese Gleichungen unterscheiden sich nur in den konstanten Gliedern von den ursprünglichen Gleichungen für α, β, γ, δ. Man kontrolliert sie dadurch, daß man die neuen konstanten Glieder auch direkt durch die ersten Annäherungen von α, β, γ, δ berechnet. Mit den gefundenen Verbesserungen von α, β, γ, δ werden dann wieder die Verbesserungen aller Werte von v gefunden. In unserm Fall ergeben sich bis auf eine Einheit der zweiten Stelle genau für v die Werte

0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	1.30	2.12	2.70	3.14	3.53	3.95	4.55	5.65	8.29		
0	2.07	3.50	4.53	5.32	6.02	6.73	7.59	8.78	10.42	11.89	
0	2.50	4.28	5.59	6.61	7.49	8.36	9.32	10.45	11.72	12.86	13.63
0	2.63	4.53	5.93	7.03	7.98	8.89	9.88	10.98	12.15	13.19	13.90	14.15

Diese Werte interpolieren wir graphisch und stellen eine Höhenschichtenkarte der gesuchten Fläche dar. Das geschieht am besten durch Querprofile z. B. längs den Horizontal- oder Vertikalreihen oder auch diagonal, aus denen man dann durch graphische Interpolation die Punkte findet, wo v irgend welche runden Werte annimmt. Durch die ermittelten Punkte zieht man alsdann die Höhenlinien, durch die nun die Funktion v in jedem Punkte des Querschnitts interpoliert werden kann. Die gesuchte Funktion u, die der Differentialgleichung $\Delta u = C$ genügt, hängt, wie oben angegeben, mit der Funktion v durch die Gleichung $u = -Ch^2 v$ zusammen, wo h die Seitenlänge der Netzmasche ist.

Um die erreichte Genauigkeit zu beurteilen, haben wir zunächst festzustellen, wie genau die graphisch ermittelte Funktion u der Gleichung $\Delta u = C$ genügt. Wir sehen dabei einstweilen von den vier einspringenden

Fig. 4.



Ecken ab, in denen schon die ersten Differentialquotienten von u unendlich werden. Von dem Verhalten in der Nähe dieser Punkte soll sogleich die Rede sein. Durch die Betrachtung der Querprofile sind wir in den Stand gesetzt, in jedem Punkte der Fläche $z = u(x, y)$ die Werte von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, so weit die Genauigkeit der graphischen Darstellung geht, zu ermitteln.

Man wird zu diesem Zweck wohl am besten Differenzenrechnung anwenden. Wird für eine beliebige Funktion $f(x)$ die zweite Differenz

$$f(x+h) - f(x) - f(x) + f(x-h)$$

mit $\Delta^2 f$ bezeichnet und mit $\Delta^4 f$ der Ausdruck, der aus $\Delta^2 f$ ebenso gebildet ist wie $\Delta^2 f$ aus f usf., so hat man

$$h^2 f''(x) = \Delta^2 f - \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 f + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2^2 \Delta^6 f - \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 2^2 \cdot 3^2 \Delta^8 f + \cdots$$ [1])

1) C. Runge. Nature Bd. 60. S. 366. 1899.

Mit Hilfe dieser Formel findet man z. B. die Werte von $h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ und $h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ in dem Netzpunkt, wo v den Wert 4,53 hat, in der folgenden Weise

	v	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ_4
$x - 2h$	2.07				
		1.43			
$x - h$	3.50		$-$ 0.40		
		1.03		+ 0.16	
x	4.53		$-$ 0.24		$-$ 0.01
		0.79		+ 0.15	
$x + h$	5.32		$-$ 0.09		
		0.70			
$x + 2h$	6.02				
$y - 2h$	5.93				
		$-$ 0.34			
$y - h$	5.59		$-$ 0.72		
		$-$ 1.06		$-$ 0.05	
y	4.53		$-$ 0.77		$-$ 0.05
		$-$ 1.83		$-$ 0.10	
$y + h$	2.70		$-$ 0.87		
		$-$ 2.70			
$y + 2h$	0.00				

In beiden Fällen beinflußt schon $\frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4$ die zweite Dezimale nicht mehr und wir setzen mit dieser Genauigkeit

$$h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -0.24, \quad h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -0{,}77$$

und damit

$$\Delta u = C + 0.01\, C.$$

Eine ähnliche Genauigkeit geben auch die andern Netzpunkte. Außerhalb der Netzpunkte kommt noch die Ungenauigkeit hinzu, die von den Fehlern in der Zeichnung der Höhenlinien stammt. Bei sorgfältiger Konstruktion der Profile müßte es aber möglich sein, diese Fehler nicht wesentlich größer werden zu lassen als die Fehler in den Netzpunkten, wenn die Dichtigkeit der Netzpunkte ihrer Genauigkeit entspricht.

Es möge nun festgestellt sein, daß für die gefundene Funktion u der Ausdruck Δu um nicht mehr als ε von C abweicht. Sei U die wahre Funktion für die genau $\Delta U = C$. Dann wird also für die Differenz $U - u$ der Ausdruck

$$\Delta(U - u)$$

um nicht mehr als ε von Null abweichen und zugleich wird $U-u$ auf dem Rande des Querschnitts verschwinden. Bezeichnet daher $G(xy;\xi\eta)$ die Greensche Funktion des Querschnitts, so ist

$$U(\xi\eta)-u(\xi\eta)=\frac{1}{2\pi}\int G(xy;\xi\eta)\,\Delta\,(U(xy)-u(xy))\,d\omega$$

oder

$$U(\xi\eta)-u(\xi\eta)=\frac{1}{2\pi}\int G(xy;\xi\eta)\,d\omega\cdot\overline{\Delta(U-u)}.$$

wenn wir mit $\overline{\Delta(U-u)}$ einen gewissen Mittelwert von $\Delta(U-u)$ bezeichnen, welcher der Gewichtsverteilung $G(xy;\xi\eta)$ entspricht. $G(xy;\xi\eta)$ ist im ganzen Querschnitt negativ und absolut genommen kleiner als die Greensche Funktion für einen Kreis, der unsern Querschnitt umfaßt. Integriert man demnach die Greensche Funktion des Kreises über den Kreis, so erhält man eine obere Grenze für den absoluten Betrag des Integrals

$$\int G(xy;\xi\eta)\,d\omega$$

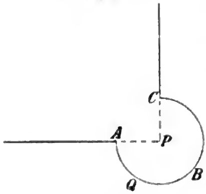
auf der rechten Seite der obigen Gleichung. Für den Kreis erhält man den größten Betrag, wenn ξ,η in den Mittelpunkt des Kreises gelegt wird. Die Greensche Funktion reduziert sich in diesem Falle für den Kreis auf $\log\frac{r}{a}$, wo a der Radius des Kreises und r die Entfernung vom Mittelpunkt ist. Das Integral über den Kreis gibt $-\frac{\pi}{2}a^2$. Hier ist $a=\frac{\sqrt{10}\cdot l}{2}$ zu setzen (l die Seite eines der 5 Quadrate, aus denen der Querschnitt besteht). Wenn $\Delta(U-u)$ also um nicht mehr als ε von Null abweicht, so ist

$$|U-u|<\frac{5}{8}\cdot l^2\cdot\varepsilon.$$

Bei der Abschätzung von ε begegnen wir noch einer Schwierigkeit. Wenn wir von kleinen Umgebungen der vier einspringenden Ecken unseres Querschnittes absehen, so läßt sich freilich durch graphische Interpolation und Anwendung der Differenzenrechnung auf die Fläche $z=u(xy)$ eine Anschauung von der Größe von ε bilden. In der Nähe der Ecken aber werden schon die ersten Ableitungen von $U(xy)$ beliebig groß. Es wird dadurch unmöglich, auf graphischem Wege zu ermitteln, wie weit die durch Interpolation gewonnene Fläche die partielle Differentialgleichung erfüllt. Überhaupt kann man sagen, daß unsere graphische Lösung in der Nähe der einspringenden Ecken noch zu wünschen übrig läßt. Denn es läßt sich aus der graphischen Darstellung allein über die Art, wie das Gefälle der Fläche an der Ecke unendlich wird, nichts aussagen.

Indessen kommt uns hier die analytische Darstellung der gesuchten Funktion $U(xy)$ zu Hilfe. Denken wir uns um die einspringende Ecke P einen Kreisbogen ABC mit kleinem Radius r geschlagen, so muß der Wert von $U(xy)$ in irgend einem Punkte Q sehr wenig von $c \cdot r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right)$ verschieden sein, wo φ den Winkel APQ und c eine Konstante bedeutet. Und zwar ist der Unterschied $U(xy) - cr^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right)$ eine Funktion, die in der Nähe von P nicht nur selbst sondern auch mit ihren sämtlichen Ableitungen beliebig klein ist. Wir denken uns deshalb die Interpolation unsrer Werte so gemacht, daß die Fläche $u(xy)$ in der Nähe von P die Größen $cr^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right)$ annimmt. Ist k der Wert, den $u(xy)$ in einem Punkte Q in der Nähe von P annimmt, so ist

Fig. 5.



$$c = k \cdot \overline{PQ}^{-\frac{2}{3}} \sin\left(\sphericalangle \frac{2APQ}{3}\right)^{-1}$$

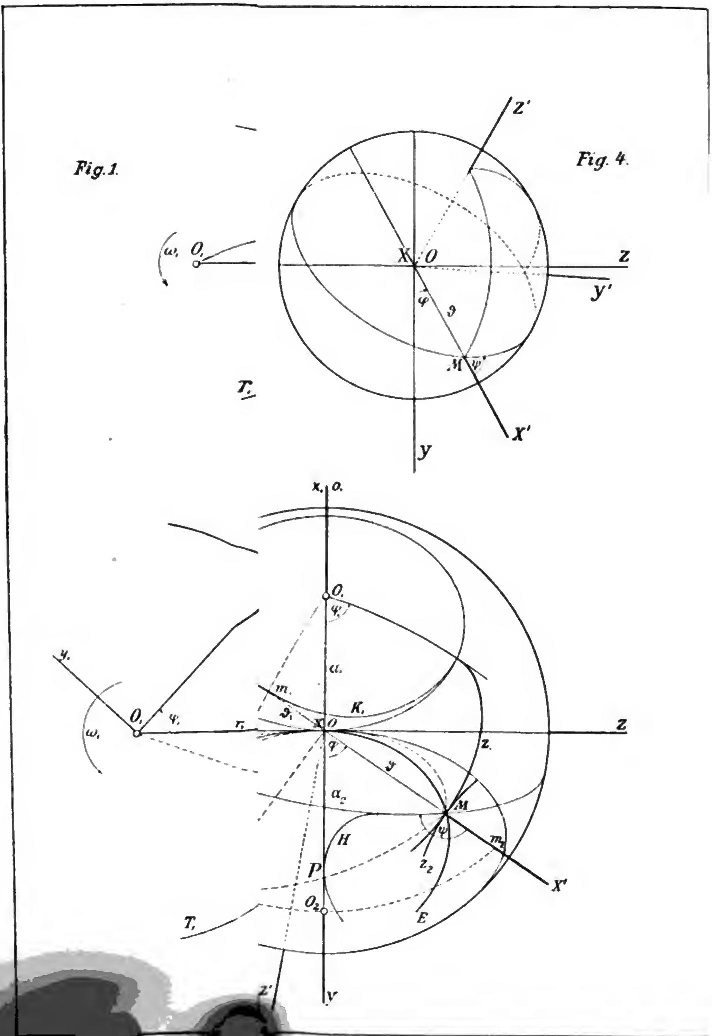
zu setzen. Nunmehr können wir sagen, daß $u(xy)$ auf dem Kreisbogen ABC mit $U(xy)$ übereinstimmt und können für die Abschätzung von ε die Umgebungen der einspringenden Ecken außer Betracht lassen.

Wie klein man diese Umgebungen zu machen hat, um den Unterschied zwischen $u(xy)$ und $c \cdot r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right)$ vernachlässigen zu können, ergibt sich durch die Betrachtung der gefundenen Werte v. Es zeigt sich z. B. in unserm Fall, daß die Werte 5.65 und 8.29 in der Nähe der einspringenden Ecke tatsächlich bis auf wenige Stellen der zweiten Dezimale den Werten von $r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right)$ d. i. hier $\sin 60^0$ und $\sqrt{2}^{\frac{2}{3}} \sin 90^0$ proportional sind

$$\frac{8.29}{\sqrt[3]{2}} = 6.58 \qquad \frac{5{,}65}{\sin 60^0} = 6.54\,.$$

Der Wert 4.55 ist dagegen ein wenig größer $\frac{4.55}{\sqrt[3]{2}\sin 30^0} = 7.22$. Man würde daher annehmen, daß der Radius des Kreisbogens gleich der Seite einer Netzmasche gesetzt werden könne, wenn es auf einige Stellen der zweiten Dezimale nicht mehr ankommt.

Göttingen, im Herbst 1907.


Fig. 1.
Fig. 4.
Z'
X
O
Z
y'
X'
y
M
T₁
ω₁
O₁
x₁ o₁
O₁
α₁
m₁
K₁
r₁
z₁
α₂
M
H
P
O₂
z₂
E
m₂
y₁
Z'

Über einige Sätze der kinematischen Geometrie, welche der Verzahnungslehre zylindrischer und konischer Räder zugrunde liegen.

Von Martin Disteli in Dresden.

(Mit einer Tafel Fig. 1—5).

Die folgenden Ausführungen enthalten die Darlegung einiger Sätze der kinematischen Geometrie der Ebene und der Kugel, auf welchen im wesentlichen die Verzahnungsmethoden zylindrischer und konischer Räder beruhen. Die verschiedenen Verzahnungsarten sollen dabei im Prinzip zwar aufgestellt, jedoch mag von einer Besprechung derselben im einzelnen abgesehen werden, da sie infolge ihrer Bedeutung für die Praxis der Zahnradkonstruktionen bereits vielfache Behandlung gefunden haben.

Die gegebene Darstellung bezweckt vielmehr, an den beiden Spezialfällen paralleler und schneidender Achsen diejenigen Gesichtspunkte zu gewinnen, die sich auch auf den Fall gekreuzter Achsen, also auf die Verzahnung der Hyperboloidräder ausdehnen lassen, für welche Probleme zur Zeit allgemeine Methoden nicht bekannt sind.

In Rücksicht auf diesen mehr vorbereitenden Zweck erklärt sich denn auch die vorliegende, von der gebräuchlichen etwas abweichende Darstellung, bei der die Eingrifflinie mehr als gewöhnlich in den Vordergrund tritt.

A. Zylindrische Räder.

§ 1. Ein Hilfssatz über Relativbewegung.

Die Verzahnung zylindrischer Räder vollzieht sich in einer Normalebene der beiden parallelen Radachsen, welche wir zur festen Ebene Σ unserer Betrachtung machen. Die Punkte dieser Ebene seien bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (OXY). Dreht sich in dieser Ebene eine Ebene Σ' mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um den Drehpol $P(X_0 Y_0)$, so erhält ein Punkt M der Ebene Σ', der augenblicklich mit dem Punkte (XY) von Σ koinzidiert nach den Achsen von Σ die Geschwindigkeitskomponenten

$$(1) \qquad u_x = -(Y - Y_0)\omega', \quad u_y = +(X - X_0)\omega'.$$

Drehen sich also zwei weitere Ebenen Σ_1 und Σ_2 um ihre festen Drehpunkte O_1 und O_2 in der Achse X, welche auf verschiedenen Seiten des Punktes O liegen mögen, so daß, wie in Fig. 1 Tafel

$$\overrightarrow{OO_1} = -r_1 \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OO_2} = +r_2$$

gesetzt werden kann, mit den Winkelgeschwindigkeiten $+\omega_1$ und $-\omega_2$, so erhält der Punkt O nach (1) die in die Achse Y fallenden Geschwindigkeiten:

$$v_{1y} = r_1\omega_1 \quad \text{und} \quad v_{2y} = r_2\omega_2$$

und es beschreibt somit der Punkt O in Σ_1 und Σ_2 zwei aufeinander abrollende Kreise, die sogenannten *Teilkreise* T_1 und T_2, falls die Bedingung

$$(2) \qquad r_1\omega_1 - r_2\omega_2 = 0$$

erfüllt ist.

Werden die Punkte der Systeme Σ_1 und Σ_2 ebenfalls auf je ein rechtwinkliges Koordinatensystem $(O_1x_1y_1)$ und $(O_2x_2y_2)$ bezogen, und sind φ_1 und φ_2 die im positiven Sinne gemessenen Winkel, welche die positiven Achsen x_1 und x_2 mit der positiven Achse X einschließen, so ist zu setzen

$$(3) \qquad \omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \qquad -\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt},$$

so daß auch die Beziehung

$$(4) \qquad r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 = 0$$

besteht, wenn in den Anfangslagen x_1 und x_2 mit X zusammenfallen.

Durch die Bewegung der Ebene Σ' erhält der Punkt M in Σ eine absolute Geschwindigkeit u, deren Komponenten durch die Gleichungen (1) gegeben werden. Drehen sich aber die Ebenen Σ_1 und Σ_2 momentan mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und $-\omega_2$ um ihre Fixpunkte, so erhält der Punkt M die sogenannten Führungsgeschwindigkeiten f_1 und f_2 mit den Komponenten:

$$(5) \qquad \begin{aligned} f_{1x} &= -Y\omega_1, & f_{1y} &= (X + r_1)\omega_1 \\ f_{2x} &= +Y\omega_2, & f_{2y} &= -(X - r_2)\omega_2. \end{aligned}$$

Demnach besitzt der beschreibende Punkt M gegen die Ebenen Σ_1 und Σ_2 zwei Relativgeschwindigkeiten v_1 und v_2, welche die geometrischen Differenzen der vorigen beiden Geschwindigkeiten sind, also die Komponenten haben

$$(6) \qquad \begin{aligned} v_{1x} &= -(Y - Y_0)\omega' + Y\omega_1, & v_{1y} &= (X - X_0)\omega' - (X + r_1)\omega_1 \\ v_{2x} &= -(Y - Y_0)\omega' - Y\omega_2, & v_{2y} &= (X - X_0)\omega' + (X - r_2)\omega_2. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{X_0\omega' + r_1\omega_1}{\omega' - \omega_1} &= X_1, \qquad \frac{Y_0\omega'}{\omega' - \omega_1} = Y_1 \\ \frac{X_0\omega' + r_2\omega_2}{\omega' + \omega_2} &= X_2, \qquad \frac{Y_0\omega'}{\omega' + \omega_2} = Y_2, \end{aligned}$$

so wird

$$(8)\qquad \begin{aligned} v_{1x} &= -(Y - Y_1)(\omega' - \omega_1), \qquad v_{1y} = (X - X_1)(\omega' - \omega_1) \\ v_{2x} &= -(Y - Y_2)(\omega' + \omega_2), \qquad v_{2y} = (X - X_2)(\omega' + \omega_2). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, daß die Punkte $(X_1 Y_1)$ und $(X_2 Y_2)$ nichts anderes sind, als die augenblicklichen Drehpole der Ebene Σ' in Σ_1 und Σ_2.

Wegen (2) besteht aber die Gleichung

$$(9)\qquad X_0\omega' + r_1\omega_1 = X_0\omega' + r_2\omega_2.$$

Setzen wir also voraus, daß die beiden Bedingungen bestehen:

$$(10)\qquad X_0\omega' + r_1\omega_1 = 0, \qquad Y_0 = 0,$$

so fallen die beiden Pole $(X_1 Y_1)$ und $(X_2 Y_2)$ in dem Punkte O zusammen. Der Punkt O ist augenblicklicher Drehpol der Ebene Σ' sowohl in Σ_1 als Σ_2, während $\omega' - \omega_1$ und $\omega' + \omega_2$ die relativen Winkelgeschwindigkeiten von Σ' in diesen Ebenen sind. Die Relativgeschwindigkeiten von M haben also einerlei Richtung, nämlich normal zum Radiusvektor OM, und das Verhältnis

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' + \omega_2}.$$

Es beschreibt also der Punkt M in Σ_1 und Σ_2 zwei unendlich kleine Bogenelemente dZ_1 und dZ_2 von gleicher Richtung, und wir erhalten demnach das Resultat:

Drehen sich zwei Ebenen Σ_1 und Σ_2 durch Abrollen ihrer Teilkreise augenblicklich mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und $-\omega_2$ um ihre Fixpunkte und soll jeder Punkt M einer Ebene Σ', welche augenblicklich mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um den Drehpol P rotiert, in Σ_1 und Σ_2 zwei relative Bahnelemente von gleicher Richtung beschreiben, so muß der Drehpol P auf der Zentralen $O_1 O_2$ liegen und vom Berührungspunkt O der Teilkreise den Abstand X_0 haben, der durch die Gleichung bestimmt ist:

$$X_0\omega' + r_1\omega_1 = 0.$$

Die letztere Gleichung sagt aus, daß der mit dem Radius PO um P in Σ' beschriebene Kreis W ohne Gleiten auf beiden Teilkreisen abrollt.

§ 2. Darstellung der Zahnprofile als Rollkurven.

Der vorstehende Hilfssatz führt nun unmittelbar zur Erzeugung zweier *Zahnprofile*, d. h. zweier Kurven Z_1 und Z_2, die beim Abrollen der Teilkreise einander führen, indem sie beständig in Berührung bleiben. Denken wir uns die Punkte des Systems Σ' ebenfalls bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $M(X'Y')$ Fig. 2. Tafel und dieses System gegen Σ fixiert durch die Koordinaten x und y des Anfangspunktes M und den Winkel ϑ der Achse X' gegen X, so wird Σ' in Σ eine bestimmte *absolute* Bewegung vollziehen, sobald die drei Größen x, y, ϑ als bestimmte Funktionen der Zeit gegeben sind.

Sind also

$$(11)\quad \begin{aligned} X &= x + X'\cos\vartheta - Y'\sin\vartheta, & X' &= (X-x)\cos\vartheta + (Y-y)\sin\vartheta \\ Y &= y + X'\sin\vartheta + Y'\cos\vartheta, & Y' &= -(X-x)\sin\vartheta + (Y-y)\cos\vartheta \end{aligned}$$

die Transformatiorsformeln, welchen koinzidierende Punkte beider Systeme genügen, so ergibt die Differentiation der beiden ersten Formeln, daß der Drehpol P in Σ die Koordinaten besitzt:

$$(12)\qquad X_0 = x - \frac{dy}{d\vartheta}, \qquad Y_0 = y + \frac{dx}{d\vartheta}.$$

Soll also der Drehpol beständig auf der Zentralen $O_1 O_2$ liegen, so besteht die Bedingung

$$(13)\qquad Y_0 = y + \frac{dx}{d\vartheta} = 0.$$

Ist somit $y = f(x)$ die Gleichung der vom Punkte $M(xy)$ beschriebenen Bahnkurve E, von welcher wir annehmen wollen, daß sie die Teilkreise in O berühren möge, dann läßt sich die Kurve E stets durch den Parameter ϑ in der Form darstellen:

$$(14)\qquad x = x(\vartheta), \qquad y = -x'(\vartheta),$$

wobei dem Werte $\vartheta = 0$ der Punkt O entsprechen mag.

Die Bewegung von Σ' in Σ erfolgt also durch Abrollen einer gewissen Kurve H, der *Hilfspolbahn*, auf der Zentralen $O_1 O_2$ als fester Polbahn.

Mit

$$X_0 - x = -\frac{dy}{d\vartheta}, \qquad Y_0 - y = \frac{dx}{d\vartheta}$$

ergeben sich aus den Umkehrungen in (11) unmittelbar die Gleichungen der Kurve H bezüglich Σ':

$$(15)\quad \begin{aligned} X_0' &= \frac{dx}{d\vartheta}\sin\vartheta - \frac{dy}{d\vartheta}\cos\vartheta \\ Y_0' &= \frac{dx}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{dy}{d\vartheta}\sin\vartheta \end{aligned}$$

Beim Abrollen der Hilfspolbahn H auf der Zentralen X beschreibt aber der feste Punkt O in Σ' eine Gleitkurve W, welche identisch ist mit der vom Punkte O bei der inversen Bewegung beschriebenen Rollkurve. Die Kurve W ist demnach die durch O gehende Evolvente der Hilfspolbahn H.

In der Tat ergeben sich die Gleichungen dieser Kurve W aus den Umkehrungen von (11) mit $X = Y = 0$ bezüglich Σ' in der Form

$$\text{(16)}\quad \begin{aligned} X_1' &= -x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = \frac{dx}{d\vartheta}\sin\vartheta - x\cos\vartheta = X_0' - X_0\cos\vartheta \\ Y_1' &= \quad x\sin\vartheta - y\cos\vartheta = \frac{dx}{d\vartheta}\cos\vartheta + x\sin\vartheta = Y_0' + X_0\sin\vartheta \end{aligned}$$

Da $d\vartheta$ der Kontingenzwinkel und X_0 die vom Anfangspunkt $\vartheta = 0$ aus gezählte Bogenlänge von H ist, so sind diese Gleichungen von W zugleich diejenigen der Evolvente von H.

Nun ist

$$\omega' = \frac{d\vartheta}{dt}$$

die Winkelgeschwindigkeit von Σ' und es besteht somit nach (10) die Gleichung

$$\text{(17)}\qquad X_0 d\vartheta + r_1 d\varphi_1 = 0.$$

welche aussagt, daß beim Abrollen von H auf X auch W ohne Gleitung auf T_1 und T_2 abrollt, und eben dadurch die Ebenen Σ_1 und Σ_2 in drehende Bewegung versetzt. Die dem Drehwinkel ϑ entsprechenden Drehwinkel φ_1 und φ_2 von Σ_1 und Σ_2 sind also bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{(18)}\qquad \varphi_1 = -\frac{1}{r_1}\int_0^\vartheta X_0 d\vartheta, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{r_2}\int_0^\vartheta X_0 d\vartheta$$

Während also der Punkt M in Σ die Kurve E durchwandert, beschreibt er in Σ_1 und Σ_2 zwei Bahnkurven Z_1 und Z_2, welche nach dem Hilfssatz in jedem Augenblicke der Bewegung in gleitender Berührung stehen. Die Kurven Z_1 und Z_2 sind daher entsprechende *Zahnprofile*, während die vom Berührungspunkt M durchlaufene Kurve E die zu den Profilen gehörende *Eingrifflinie* ist. Demnach erhalten wir folgenden

Satz I. Rollt ein System Σ' mit irgend einer Kurve H auf der Zentrale beider Teilkreise, während die durch den Berührungspunkt O derselben gehende Evolvente W von H durch Abrollen auf den Teilkreisen die Ebenen Σ_1 und Σ_2 derselben in drehende Bewegung versetzt, so beschreibt jeder Punkt von Σ' in Σ als absolute Bahnkurve eine Eingriff-

linie E, in den Ebenen Σ_1 und Σ_2 aber als Relativbahnen die zu dieser Eingrifflinie gehörenden Zahnprofile Z_1 und Z_2.

Da die Kurve W beständig ohne Gleiten auf den Teilkreisen rollt, so entstehen die Zahnprofile auch dadurch, daß der beschreibende Punkt M mit der Kurve W über beide Teilkreise abgerollt wird. Die Kurve W heißt demnach auch die *Wälzungskurve* der Verzahnung und es ergeben sich daher aus obigem Satze die beiden Folgerungen:

Satz II. Entsteht die Eingrifflinie durch Abrollen einer Hilfspolbahn H auf der Teilkreiszentralen, so entstehen die Zahnprofile durch Abrollen der Evolvente W von H als Wälzungskurve auf den Teilkreisen.

Satz III. Entstehen zwei Zahnprofile als Bahnkurven eines Punktes beim Abrollen einer Wälzungskurve W auf den Teilkreisen, so entsteht ihre Eingrifflinie durch Abrollen der Evolute H von W auf der Teilkreiszentralen.[1])

Transformiert man die Koordinaten des Punktes M auf das System $(O_1 x_1 y_1)$, so erhält man direkt die Gleichungen des Profils Z_1 ausgedrückt durch die Koordinaten der Eingrifflinie:

$$(19)\qquad \begin{aligned} x_1 &= (x + r_1)\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 \\ y_1 &= -(x + r_1)\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1 \\ \varphi_1 &= -\frac{l}{r_1}\int_0^{\vartheta} X_0\, d\vartheta. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Differentiation nach ϑ:

$$\frac{dy_1}{d\vartheta} = (x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1)\left(1 + \frac{X_0}{r_1}\right)$$
$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = (x\sin\varphi_1 - y\cos\varphi_1)\left(1 + \frac{X_0}{r_1}\right)$$

also unter Berücksichtigung von (19)

$$(20)\qquad \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{x_1 - r_1\cos\varphi_1}{y_1 + r_1\sin\varphi_1} = 0.$$

Soll also umgekehrt irgend eine Kurve Z_1 Profilkurve sein, so muß es möglich sein, für das in Betracht kommende Kurvenstück x_1 und y_1 als Funktionen eines Parameters φ_1 so darzustellen, daß obige Gleichung (20)

1) Statt eines beschreibenden Punktes M kann auch eine beliebige Kurve L der Ebene Σ' in die Bewegung derselben einbezogen werden. Die Profile Z_1 und Z_2 erscheinen dann als Hüllkurven von L beim Abrollen von W auf den Teilkreisen. Soll L selbst das eine Profil Z_1 werden, so ist die Wälzungskurve W identisch mit dem Teilkreis T_1, und Z_2 entsteht dann als Hüllkurve des Profils Z_1. Damit diese Hüllkurve reell ist, müssen die in Betracht kommenden Normalen von Z_1 den Kreis T_1 reell schneiden.

erfüllt ist.[1]) Wenn dies der Fall ist, so ergeben sich durch Auflösung von (19) nach x und y die Koordinaten der Eingrifflinie, und damit auch die Gleichungen des Profils Z_2 in der Form:

$$(21)\qquad \begin{aligned} x_2 &= \quad (x - r_2)\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 \\ y_2 &= -(x - r_2)\sin\varphi_2 + y\cos\varphi_2, \end{aligned}$$

indem man mittels (4) einen der Parameter eliminiert.

Der einfachste Fall einer Verzahnung nach vorstehender Methode wird erhalten, falls die Eingrifflinie ein *Kreis* E des Büschels der Teilkreise $(T_1 T_2)$ ist. Liegt E außerhalb von T_1, so erzeugt er die äußere Hälfte des Profils Z_1 und die innere von Z_2; die anderen Hälften werden analog durch einen innerhalb T_1 liegenden Eingriffskreis hervorgebracht. Da der Kreis E bei der Drehung von Σ um seinen Mittelpunkt H sich in sich selbst dreht, so beschreibt in diesem Falle jeder Punkt M von E ein Profilpaar, welche Paare alle durch Drehung zur Deckung gebracht werden können. Da die Wälzungskurve W identisch wird mit dem Eingriffkreis, so werden die Profile von Zykloidenbogen gebildet. Die Verzahnung heißt daher *Zykloidenverzahnung*, und man kann sie auch dann noch so benennen, wenn die Eingrifflinie kein Kreis mehr ist. Die Kurve W und der Teilkreis T_1 sind die primären Polbahnen des Profils Z_1.

§ 3. Darstellung der Zahnprofile als Evolventen.

Die genaue Verzeichnung der Zahnprofile erfordert die Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte, also die Darstellung der Profile als Evolventen. Zu diesem Zwecke führen wir statt der Ebene Σ' eine neue Ebene Σ'' ein, Fig. 2. Tafel die mit Σ' den Punkt M gemeinsam hat, um diesen aber gegen Σ' derart drehbar ist, daß die neue Achse X'' beständig mit der Geraden OM zusammenfällt, während M die Eingrifflinie durchläuft.

Sind r und φ die Polarkoordinaten von M in Σ, so sind

$$(22)\qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

die Gleichungen der Eingrifflinie.[2])

---

1) Ist τ der Winkel der Tangente des Profils gegen die Achse x_1, d. h. $\operatorname{tg}\tau = \dfrac{dy_1}{dx_1}$ so muß für alle in Betracht kommenden Punkte $(x_1\, y_1)$ von Z_1 die Ungleichung erfüllt sein

$$r_1 > x_1 \cos\tau + y_1 \sin\tau,$$

damit der Winkel φ_1 ein reeller Parameter wird.

2) Obschon die neue Methode die Wälzungskurve nicht benötigt, so lassen sich doch auch in diesem Falle ihre Polargleichungen in Σ' leicht angeben. Führt

Es ist dann φ auch der Winkel der Achse X'' gegen X und daher

$$\omega'' = \frac{d\varphi}{dt}$$

die Winkelgeschwindigkeit des Systems Σ'' in Σ.

Bedeutet also r' die Derivierte von r nach φ, so sind nach (12)

$$(23) \qquad \begin{aligned} X_1 &= x - \frac{dy}{d\varphi} = -r' \sin\varphi \\ Y_1 &= y + \frac{dx}{d\varphi} = +r' \cos\varphi \end{aligned}$$

die Koordinaten des neuen Drehpols P' in Σ, also auch die Gleichungen der neuen festen Polbahn, während nach (15)

$$(24) \qquad \begin{aligned} X_1'' &= \frac{dx}{d\varphi} \sin\varphi - \frac{dy}{d\varphi} \cos\varphi = -r \\ Y_1'' &= \frac{dx}{d\varphi} \cos\varphi + \frac{dy}{d\varphi} \sin\varphi = r' \end{aligned}$$

die Gleichungen der neuen beweglichen Polbahn darstellen.

Relativ gegen die Ebene Σ_1 besitzt dagegen Σ'' einen Drehpol M_1 mit den Koordinaten:

$$(25) \qquad X_{1k} = \frac{X_1 \omega'' + r_1 \omega_1}{\omega'' - \omega_1}, \quad Y_{1k} = \frac{Y_1 \omega''}{\omega'' - \omega_1},$$

relativ gegen Σ_2 den Drehpol M_2 mit den Koordinaten

$$(26) \qquad X_{2k} = \frac{X_1 \omega'' + r_2 \omega_2}{\omega'' + \omega_2}, \quad Y_{2k} = \frac{Y_1 \omega''}{\omega'' + \omega_2}.$$

---

man die Werte von x und y aus (22) in die Gleichungen (16) ein, so erhält man für die Wälzungskurve

$$X'_1 = -r\cos(\varphi - \vartheta)$$
$$Y'_1 = -r\sin(\varphi - \vartheta).$$

Setzt man also

$$\varphi - \vartheta = \psi,$$

so bedeutet ψ den Winkel der Achse X'' gegen X'; es sind also r und $\psi + \pi$ die Polarkoordinaten von W in Σ'. Ist nun

$$\text{a)} \qquad r = r(\varphi)$$

die Gleichung der Eingrifflinie, so folgt aus der Bedingung

$$y + \frac{dx}{d\vartheta} = 0$$

$$r \sin\varphi \,.\, d\psi = \cos\varphi \, dr$$

also

$$\text{b)} \qquad \psi - \psi_0 = \int \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r} \, dr.$$

Durch a) und b) ist also die Wälzungskurve bestimmt. Für eine *gerade* Eingrifflinie $\varphi = \varepsilon = \text{const.}$ ist daher W die *logarithmische Spirale*

$$r = C e^{\psi \operatorname{tg} \varepsilon}.$$

Es bewegt sich also M in Σ_1 mit der Relativgeschwindigkeit

(27) $$v_{1x} = -(Y - Y_{1k})(\omega'' - \omega_1), \quad v_{1y} = (X - X_{1k})(\omega'' - \omega_1)$$

und in Σ_2 mit der Relativgeschwindigkeit

(28) $$v_{2x} = -(Y - Y_{2k})(\omega'' + \omega_2), \; v_{2y} = (X - X_{2k})(\omega'' + \omega_2)$$

Wegen der Beziehung (2) besteht aber die Proportion:

$$\frac{X_{1k}}{Y_{1k}} = \frac{X_{2k}}{Y_{2k}}.$$

Es liegen also die Pole M_1 und M_2 mit O stets in einer gewissen Geraden $\varDelta$, deren Richtung von dem Werte von ω'' abhängt. Alle und nur die Punkte dieser Geraden haben daher relative Geschwindigkeiten, deren Richtungen sich decken.

Soll dies also auch für den beschreibenden Punkt M der Fall sein, so muß $\varDelta$ durch M gehen d. h. ω'' durch die Bedingung erklärt sein:

(29) $$\frac{X_{1k}}{Y_{1k}} = \frac{x}{y} = \operatorname{cotg} \varphi.$$

Es besteht daher für ω'' die Gleichung

$$(X_1 \omega'' + r_1 \omega_1) \sin \varphi - Y_1 \omega'' \cos \varphi = 0$$

oder

(30) $$r_1 \omega_1 = \frac{r'}{\sin \varphi} \omega'' = r_2 \omega_2.$$

Daher sind jetzt die Drehwinkel der Ebenen Σ_1 und Σ_2 bestimmt durch die Bedingungen

(31) $$\varphi_1 = \frac{1}{r_1} \int \frac{r'}{\sin \varphi} d\varphi, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{r_2} \int \frac{r'}{\sin \varphi} d\varphi,$$

wo die Integrationskonstanten so zu bestimmen sind, daß den Winkeln $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ ein bestimmter Winkel φ_0 entsprechen mag.

Durch die vorstehenden Gleichungen (30) wird also die Relativbewegung von Σ'' in Σ_1 und Σ_2 derart reguliert, daß die Achse X'' beständig gemeinsame Normale der Relativbahnen Z_1 und Z_2 von M bleibt, sodaß die Drehpole M_1 und M_2 mit den Krümmungsmittelpunkten von Z_1 und Z_2 zusammenfallen.

Während also M die Zahnprofile Z_1 und Z_2 beschreibt, beschreiben die Pole M_1 und M_2 ihre Evoluten K_1 und K_2. Die Evoluten sind also die Polbahnen in Σ_1 und Σ_2, während die Achse X'' die Polbahn der Ebene Σ'' ist und durch ihr Rollen auf K_1 und K_2 die Systeme Σ_1 und Σ_2 in drehende Bewegung versetzt. Diese Polbahnen sind die *sekundären* Polbahnen genannt worden, und es ergibt sich daher der

Satz IV. Wird eine Ebene Σ'' in der festen Ebene Σ derart bewegt, daß der Punkt M die gegebene Eingrifflinie durchläuft, während die durch M gehende gerade Achse X'' stets durch den Berührungspunkt O der Teilkreise geht, und werden die Ebenen Σ_1 und Σ_2 der Teilkreise dadurch in drehende Bewegung versetzt, daß die Achse X'' als sekundäre Polbahn von Σ'' auf den sekundären Polbahnen K_1 und K_2 von Σ_1 und Σ_2 abrollt, so beschreiben alle und nur die Punkte der Achse X'' in Σ_1 und Σ_2 als Relativbahnen je zwei Zahnprofile Z_1 und Z_2, welche die Polbahnen K_1 und K_2 zu Evoluten haben.

Setzt man den Wert von ω'' aus (30) in die Gleichungen (25) ein, so erhält man als Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes M_1 bezüglich Σ:

$$(32)\qquad X_{1k} = r_1 \frac{r' \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi - r'} \cos\varphi, \quad Y_{1k} = r_1 \frac{r' \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi - r'} \sin\varphi.$$

Ebenso für den Krümmungsmittelpunkt M_2:

$$(33)\qquad X_{2k} = r_2 \frac{r' \cos\varphi}{r_2 \sin\varphi + r'} \cos\varphi, \quad Y_{2k} = r_2 \frac{r' \cos\varphi}{r_2 \sin\varphi + r'} \sin\varphi.$$

Bezeichnen also

$$OM_1 = R_1 \text{ und } OM_2 = R_2$$

die Radienvektoren von M_1 und M_2, so ist

$$(34)\qquad R_1 = r_1 \frac{r' \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi - r'}, \quad R_2 = r_2 \frac{r' \cos\varphi}{r_2 \sin\varphi + r'}.$$

Transformiert man also die Punkte M_1 und M_2 auf die Koordinatensysteme Σ_1 und Σ_2, so erhält man die Gleichungen der Evoluten K_1 und K_2. Für K_1 werden diese Gleichungen:

$$(35)\qquad \begin{aligned} x_{1k} &= \quad (X_{1k} + r_1)\cos\varphi_1 + Y_{1k}\sin\varphi_1 \\ y_{1k} &= -(X_{1k} + r_1)\sin\varphi_1 + Y_{1k}\cos\varphi_1 . \end{aligned}$$

In der Tat ist leicht zu zeigen, daß dies die Evolute des Profils (19) ist. Nach (27) sind die Komponenten der Geschwindigkeit v_1, mit welcher M das Profil Z_1 durchläuft:

$$\begin{aligned} v_{1x} &= -(y - Y_{1k})(\omega'' - \omega_1) = -(r - R_1)\sin\varphi(\omega'' - \omega_1) \\ v_{1y} &= \quad (x - X_{1k})(\omega'' - \omega_1) = \quad (r - R_1)\cos\varphi(\omega'' - \omega_1). \end{aligned}$$

Da die Achse X'' die positive Normale des Profils ist, so ist der Kontingenzwinkel desselben

$$(36)\qquad d\tau = (\omega'' - \omega_1)dt = d\varphi - d\varphi_1.$$

Um die positive Richtung der Tangente von Z_1 zu erhalten, hat man die positive Normale um einen rechten Winkel rückwärts zu drehen. Es ist daher der Winkel der Tangente gegen die Achse x_1:

$$\tau = \varphi - \varphi_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Ist aber $d\tau$ eine positive Größe, so ist v_1 eine nach der negativen Seite der Tangente von Z_1 gerichtete Geschwindigkeit. Es ist also das Bogenelement von Z_1:

(37) $$ds_1 = -(r - R_1)d\tau$$

und daher der Krümmungsradius in M:

$$\varrho_1 = \frac{ds_1}{d\tau} = R_1 - r$$

d. h.

(38) $$R_1 = r + \varrho_1.$$

Demnach lassen sich nunmehr die Gleichungen der Polbahn K_1 schreiben:

$$x_{1k} = R_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + r_1 \cos\varphi_1 = r\cos(\varphi - \varphi_1) + r_1\cos\varphi_1 + \varrho_1\cos(\varphi - \varphi_1)$$
$$y_{1k} = R_1 \sin(\varphi - \varphi_1) - r_1 \sin\varphi_1 = r\sin(\varphi - \varphi_1) - r_1\sin\varphi_1 + \varrho_1\sin(\varphi - \varphi_1)$$

d. h.

$$x_{1k} = x_1 - \varrho_1 \sin\tau$$
(39) $$y_{1k} = y_1 + \varrho_1 \cos\tau,$$

welches in der Tat die Gleichungen der Evolute von Z_1 sind.

Die vorstehende Methode wird praktisch hauptsächlich für den Fall angewendet, daß die Eingrifflinie E eine durch den Punkt O gehende unter einem passenden Winkel $\varphi = \varepsilon$ gegen X geneigte *gerade Linie* ist. In diesem Falle werden auch R_1 und R_2 konstante Größen. Die Punkte M_1 und M_2 sind also bezüglich Σ feste Punkte und beschreiben daher in Σ_1 und Σ_2 kreisförmige Evoluten K_1 und K_2. Die zugehörigen Zahnprofile sind also Kreisevolventen. Die Verzahnung heißt daher *Evolventenverzahnung* und man kann diese Bezeichnung auch dann noch beibehalten, wenn die Eingrifflinie nicht mehr geradlinig ist.

§ 4. Die weiteren Verzahnungsarten.

Aus den Gleichungen (24) sowohl als aus der Bewegung der Ebene Σ'' in Σ geht hervor, daß der Drehpol P' der Schnittpunkt der Eingriffnormalen MP mit der Normalen zum Radiusvektor OM in O ist. Man findet daher geometrisch die Krümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 sehr einfach dadurch, daß man die Profilnormale X'' mit den Geraden O_1P' und O_2P' zum Schnitt bringt.

Diese Konstruktion ist nichts anderes als die geometrische Interpretation der sogenannten Savary'schen Formel.

Aus den beiden Gleichungen

$$X_0 d\vartheta = \mp r_1 \omega_1 = -\frac{r'}{\sin\varphi} d\varphi \quad \text{und} \quad y = -\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

ziehen wir zunächst die Beziehung

$$X_0 = \frac{r r'}{r' \cos\varphi - r \sin\varphi}. \tag{40}$$

Eliminieren wir jetzt aus dieser und den beiden Gleichungen (34) die Derivierte r', so erhalten wir für jeden der Punkte M_1 und M_2 einzeln die Savary'sche Formel, nämlich für M_1:

$$\frac{1}{X_0} + \frac{1}{r_1} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right) \cos\varphi$$

oder

$$\frac{1}{\overline{OP}} - \frac{1}{\overline{OO_1}} = \left(\frac{1}{\overline{OM}} - \frac{1}{\overline{OM_1}}\right) \cos\varphi \tag{41}$$

und für den Punkt M_2:

$$\frac{1}{X_0} - \frac{1}{r_2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) \cos\varphi$$

oder

$$\frac{1}{\overline{OP}} - \frac{1}{\overline{OO_2}} = \left(\frac{1}{\overline{OM}} - \frac{1}{\overline{OM_2}}\right) \cos\varphi. \tag{42}$$

Subtrahiert man endlich die beiden Streckengleichungen voneinander, so erhält man direkt die Beziehung zwischen M_1 und M_2 in der Gleichung

$$\frac{1}{\overline{OO_1}} - \frac{1}{\overline{OO_2}} = \left(\frac{1}{\overline{OM_1}} - \frac{1}{\overline{OM_2}}\right) \cos\varphi. \tag{43}$$

Durch diese Gleichung wird ausgedrückt, daß beim Abrollen der Teilkreise aufeinander jeder der beiden Punkte M_1 und M_2 der Krümmungsmittelpunkt des vom andern beschriebenen Bahnelementes, daß also von beiden Zahnprofilen jedes die Hüllkurve des andern ist.

Durch die Gleichungen (18) oder (31) werden die Punkte der Teilkreise den Punkten der Eingrifflinie eindeutig zugeordnet, d. h. die Eingrifflinie und die Teilkreise werden entsprechend *geteilt*, und wir haben das Resultat:

Wenn die Teilung der Eingrifflinie bekannt ist, so können beide Profile durch bloße Drehung der Eingrifflinie um die Radmittelpunkte durch Punkte, Tangenten und Krümmungskreise verzeichnet werden.

In den Gleichungen (34) ist ferner bemerkenswert, daß die Größen R_1 und R_2 nur von dem Differentialquotienten r' von r abhängen, so daß diese Werte sich nicht ändern, falls r um eine konstante Strecke vergrößert oder verkleinert wird. Aus einer gegebenen Eingrifflinie E entsteht auf diese Weise eine ganze Schar neuer Eingrifflinien und eine Schar von Zahnprofilen, die sämtlich die nämlichen Evoluten haben,

also Parallelkurven sind. In der Erzeugung (IV) liegt also zugleich ein weiterer Satz ausgesprochen, nämlich:

Satz V. Verändert man alle von O aus gehenden Radienvektoren r einer gegebenen Eingrifflinie um dieselbe konstante Strecke r_0, so entsprechen dieser Schar von Eingrifflinien zwei Scharen von Äquidistanten, als Zahnprofile.

Für den Kontingenzwinkel und die Bogenlänge des Profils Z_1 fanden wir im weiteren die Werte:

$$d\tau_1 = d\varphi - d\varphi_1 \quad \text{und} \quad ds_1 = (R_1 - r)\,d\tau.$$

Die Spezialisierung dieser Ausdrücke gibt nun in Verbindung mit Satz V die weitern noch gebräuchlichen Verzahnungsarten.

Wenn der Kontingenzwinkel verschwindet, so wird das Profil *geradlinig*. In diesem Falle ist also mit (30)

$$d\varphi - d\varphi_1 = \left(1 - \frac{1}{r_1}\frac{r'}{\sin\varphi}\right) d\varphi = 0.$$

Die Eingrifflinie ist daher bestimmt durch die Bedingung:

$$dr = r_1 \sin\varphi\, d\varphi$$

und hat somit die Gleichung

(44) $$r = r_0 - r_1 \cos\varphi.$$

Wird für die Integrationskonstante r_0 zunächst Null gesetzt, so besteht die Eingrifflinie E aus demjenigen Kreis des Büschels $(T_1\, T_2)$, welcher durch den Mittelpunkt des Teilkreises T_1 geht. Da E zugleich Wälzungskreis W ist, so besteht der im Innern von T_1 liegende Teil des Profils Z_1 aus dem Radius OO_1. Wir haben eine sogenannte *Radialflankenverzahnung*. Ist r_0 von Null verschieden, so werden die Eingrifflinien Pascalsche Schnecken und nach (V) die Profile Äquidistanten der vorigen Profile. Die Strecke r_0 kann hierbei so groß gewählt werden, daß die neue Eingrifflinie auch außerhalb des Kreises T_1 verläuft, so daß das ganze Profil Z_1 geradlinig sein kann und wir eine *Geradflankenverzahnung* erhalten.

Wenn dagegen das Linienelement ds_1 verschwindet, so reduziert sich das Profil Z_1 — da es sich naturgemäß nur um reelle Linien handeln kann — auf einen Punkt, und wir erhalten eine *Punktverzahnung*. In diesem Falle ist die Eingrifflinie durch die Bedingung

$$r = R_1 = r_1 \frac{r' \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi - r'}$$

bestimmt.

Die Gleichung der Eingrifflinie wird daher

(45) $$r^2 = K^2 - 2 r_1 r \cos\varphi.$$

wo K^2 die Integrationskonstante bedeutet. Sie stellt also einen mit dem Teilkreis T_1 konzentrischen Kreis E vom Radius

$$R_0 = \sqrt{r_1^2 + K^2}$$

dar. Die Hilfspolbahn H reduziert sich also auf den Kreismittelpunkt O_1 und es fällt somit die Wälzungskurve W mit dem Teilkreis T_1 selbst zusammen. Aus diesem Grunde stellt der Schnittpunkt der Zentralen $O_1 O_2$ mit dem Kreise E das ganze Profil Z_1 dar, während Z_2 die von Z_1 beim Rollen von T_1 auf T_2 beschriebene Epitrochoide ist.

Vergrößert man alle durch O gezogenen Radienvektoren des Kreises E um dieselbe hinreichend kleine Strecke r_0, so erhält man eine neue Eingrifflinie, welche speziell für $K = 0$ eine Pascal'sche Schnecke

$$r = r_0 - 2r_1 \cos\varphi$$

ist. Die neuen Profile sind die Äquidistanten der vorigen d. h. Z_1' ist der um den Punkt Z_1 beschriebene Kreis vom Radius r_0 (Triebstock), Z_2' die Parallelkurve zur Epitrochoide. Die Verzahnung heißt daher eine *Triebstockverzahnung*.

Damit sind die zur Verwendung kommenden Verzahnungsmethoden wenigstens im Prinzip aufgezählt, soweit es sich nicht um besonders spezialisierte Zahnformen handelt.

B. Konische Räder.

§ 5. Ein Hilfssatz über Relativbewegung.

Die Verzahnung zweier Kegelräder, deren Achsen o_1 und o_2 sich in einem Punkte S schneiden, findet auf der um S gelegten Einheitskugel statt, welche vollständig die Rolle des Normalschnittes des vorigen Falles übernimmt, und daher das feste sphärische System Σ darstellt. Die Punkte des räumlichen festen Systems Σ seien bezogen auf das rechtwinklige Koordinatensystem $(SXYZ)$. Dreht sich jetzt ein zweites räumliches System Σ' vom gleichen Anfangspunkt S um eine Momentanachse p mit einer Winkelgeschwindigkeit ω', deren Komponenten nach den Achsen von Σ mit P_0, Q_0, R_0 bezeichnet sein mögen, so erhält der mit (XYZ) koinzidierende Punkt M von Σ' nach denselben Achsen die Geschwindigkeitskomponenten:

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_x &= -R_0 Y + Q_0 Z \\ u_y &= -P_0 Z + R_0 X \\ u_z &= -Q_0 X + P_0 Y \end{aligned}$$

Nehmen wir an, die Achsen o_1 und o_2 seien in der Ebene XY gelegen, Fig. 3 Tafel, und es seien $(-\alpha_1)$ und $(+\alpha_2)$ die Winkel derselben gegen die Achse X, ferner ω_1 und $-\omega_2$ die beiden Winkelgeschwindig-

keiten, mit welchen sich die Räder um diese Achsen drehen sollen, so sind

$$(2)\qquad \begin{aligned} P_1 &= \omega_1 \cos\alpha_1, & Q_1 &= -\omega_1 \sin\alpha_1, & R_1 &= 0 \\ P_2 &= -\omega_2 \cos\alpha_2, & Q_2 &= -\omega_2 \sin\alpha_2, & R_2 &= 0 \end{aligned}$$

die Komponenten von ω_1 und ω_2 nach den Achsen von Σ.

Bezeichnen $0, 0_1, 0_2$ die Schnittpunkte der positiven Achse X sowie der Achsen o_1 und o_2 mit der Einheitskugel, so erhält der Punkt O nach (1) infolge der Drehungen um O_1 und O_2 die Geschwindigkeiten

$$v_{1z} = -Q_1 = \omega_1 \sin\alpha_1 \text{ und } v_{2z} = -Q_2 = \omega_2 \sin\alpha_2.$$

Fallen diese Geschwindigkeiten auch der Größe nach zusammen, so rollen die beiden um die sphärischen Mittelpunkte O_1 und O_2 durch O beschriebenen Teilkreise T_1 und T_2 ohne Gleitung aufeinander ab. Die Bedingung hierfür ist also das Bestehen der Gleichung

$$(3)\qquad Q_1 - Q_2 = 0 \text{ oder } \omega_1 \sin\alpha_1 - \omega_2 \sin\alpha_2 = 0.$$

Werden also die Punkte der um die Achsen o_1 und o_2 rotierenden räumlichen Systeme Σ_1 und Σ_2 wieder auf die Koordinatensysteme $(S\,x_1\,y_1\,z_1)$ und $(S\,x_2\,y_2\,z_2)$ bezogen und sind φ_1 und φ_2 die Winkel der Ebenen $(x_1\,y_1)$ und $(x_2\,y_2)$ gegen die Ebene XY, so ist

$$(4)\qquad \omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad -\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

und die obige Bedingung lautet daher auch

$$(5)\qquad \varphi_1 \sin\alpha_1 + \varphi_2 \sin\alpha_2 = 0.$$

Durch die Bewegung des Systems Σ' mit der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω' erhält der Punkt M von Σ' die in (1) angegebenen Komponenten seiner absoluten Geschwindigkeit in Σ. Durch die gleichzeitige Drehung der Systeme Σ_1 und Σ_2 erhält er aber zwei Führungsgeschwindigkeiten f_1 resp. f_2, mit den Komponenten:

$$(6)\qquad \begin{aligned} f_{1x} &= Q_1 Z, & f_{1y} &= -P_1 Z, & f_{1z} &= -Q_1 X + P_1 Y \\ f_{2x} &= Q_2 Z, & f_{2y} &= -P_2 Z, & f_{2z} &= -Q_2 X + P_2 Y. \end{aligned}$$

Relativ gegen Σ_1 und Σ_2 besitzt daher M die Geschwindigkeiten v_1 und v_2, deren Komponenten die Werte haben

$$(7)\qquad \begin{aligned} v_{1x} &= -(R_0 - R_1)Y + (Q_0 - Q_1)Z & v_{2x} &= -(R_0 - R_2)Y + (Q_0 - Q_2)Z \\ v_{1y} &= -(P_0 - P_1)Z + (R_0 - R_1)X & v_{2y} &= -(P_0 - P_2)Z + (R_0 - R_2)X \\ v_{1z} &= -(Q_0 - Q_1)X + (P_0 - P_1)Y & v_{2z} &= -(Q_0 - Q_2)X + (P_0 - P_2)Y. \end{aligned}$$

Sollen also die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 für alle Wertesysteme von XYZ der Richtung nach zusammenfallen, so müssen die beiden Bedingungen erfüllt sein:

$$\frac{P_0 - P_1}{P_0 - P_2} = \frac{Q_0 - Q_1}{Q_0 - Q_2} \text{ und } R_0 = 0,$$

oder, da $Q_1 = Q_2$ aber $P_1 \neq P_2$ sein wird, es müssen die Gleichungen bestehen

$$Q_1 = Q_2 = Q_0 \text{ und } R_0 = 0. \tag{8}$$

Man erhält alsdann

$$\begin{array}{ll} v_{1x} = 0 & v_{2x} = 0 \\ v_{1y} = -(P_0 - P_1)Z & v_{2y} = -(P_0 - P_2)Z \\ v_{1z} = (P_0 - P_1)Y & v_{2z} = (P_0 - P_2)Y. \end{array} \tag{9}$$

Es fallen also die augenblicklichen Polachsen von Σ' in Σ_1 und Σ_2 in der Achse X zusammen; jeder Punkt M erhält zwei gleichgerichtete Relativgeschwindigkeiten, deren Verhältnis durch die Proportion

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{P_0 - P_1}{P_0 - P_2} \tag{10}$$

bestimmt ist.

Dies tritt also nach (8) ein, falls die Polachse p von Σ' in Σ in der Ebene XY liegt und wenn ω' derart bemessen wird, daß die Endpunkte der drei Strecken ω_1, ω_2, ω' in einer Parallelen zur Achse X liegen. Übertragen wir das räumliche Ergebnis auf die sphärischen Systeme, so ergibt sich demnach folgendes:

Drehen sich zwei sphärische Systeme Σ_1 und Σ_2 um ihre Fixpunkte O_1 und O_2 durch Abrollen ihrer Teilkreise augenblicklich mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und $-\omega_2$ und soll jeder Punkt M eines sphärischen Systems Σ', welches augenblicklich mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um den Drehpol P rotiert, in Σ_1 und Σ_2 zwei relative Bahnelemente von gleicher Richtung beschreiben, so muß der Drehpol P in der sphärischen Zentralen $O_1 O_2$ liegen und es muß der Berührungspunkt O in allen drei Systemen dieselbe Geschwindigkeit besitzen.

§ 6. Darstellung der sphärischen Zahnprofile als Rollkurven.

Im Folgenden ist es zweckmäßig die Lage der beweglichen Systeme Σ' gegen Σ durch die drei Eulerschen Winkel zu bestimmen. Es möge Σ nach Σ' gelangen durch die folgenden drei Drehungen, die alle im geometrisch positiven Sinne, also entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung, auszuführen sind.

Zunächst werde wie in Fig. 4 Tafel, welche den orthogonalen Grundriß darstellt, XYZ um die Achse X um den Winkel φ nach $X_1 Y_1 Z_1$ gedreht; sodann dies System um die Achse Z_1 um den Winkel ϑ nach $X_2 Y_2 Z_2$; endlich gelange dies System durch Drehung um die Achse X_2 um den Winkel ψ nach $X' Y' Z'$.

Sind also

$$(11)\qquad \begin{aligned} X &= a_1 X' + b_1 Y' + c_1 Z' \\ Y &= a_2 X' + b_2 Y' + c_2 Z' \\ Z &= a_3 X' + b_3 Y' + c_3 Z' \end{aligned}$$

die Transformationsformeln für den Übergang von einem Punkte von Σ' zum koinzidierenden in Σ, so haben die 9 Richtungscosinusse die folgenden Werte:

$$(12)\qquad \begin{aligned} a_1 &= \cos\vartheta & b_1 &= -\sin\vartheta\cos\psi \\ a_2 &= \sin\vartheta\cos\varphi & b_2 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi \\ a_3 &= \sin\vartheta\sin\varphi & b_3 &= +\cos\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} c_1 &= +\sin\vartheta\sin\psi \\ c_2 &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi \\ c_3 &= +\cos\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi. \end{aligned}$$

Sind also die drei Winkel φ, ϑ, ψ Funktionen der Zeit und bedeuten die Striche die Differentialquotienten nach der Zeit, so sind die Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten an der augenblicklichen Polachse p nach den Achsen von Σ:

$$(13)\qquad \begin{aligned} P_0 &= \varphi' + \cos\vartheta\,\psi' \\ Q_0 &= -\sin\varphi\,\vartheta' + \sin\vartheta\cos\varphi\,\psi' \\ R_0 &= \cos\varphi\,\vartheta' + \sin\vartheta\sin\varphi\,\psi'. \end{aligned}$$

Machen wir also Fig. 5 Tafel den beschreibenden Punkt M zum Anfangspunkt des sphärischen Systems Σ' d. h. zum Schnittpunkt der positiven Achse X' mit der Kugel, so sind die Gleichungen

$$(14)\qquad \vartheta = \vartheta(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

die Bewegungsgleichungen der von M durchlaufenen Bahnkurve E, und es ist die Bewegung von Σ' vollständig bestimmt durch die Bedingung (8)

$$R_0 = \cos\varphi\,\vartheta' + \sin\vartheta\sin\varphi\,\psi' = 0 \quad \text{oder}$$

$$(15)\qquad \begin{aligned} d\psi &= -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\vartheta}\,d\vartheta \\ \psi &= -\int\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\vartheta}\,d\vartheta. \end{aligned}$$

Dadurch wird auch der dritte Winkel eine bekannte Funktion der Zeit, ebenso die 9 Richtungscosinusse.

Unter dieser Voraussetzung werden jetzt die Komponenten von ω' in Σ:

$$(16)\qquad \begin{aligned} P_0 &= \varphi' - \operatorname{cotg}\vartheta\operatorname{cotg}\varphi\,\vartheta' \\ Q_0 &= -\frac{\vartheta'}{\sin\varphi}. \end{aligned}$$

Es sind demnach

(17) $$X_0 = \frac{P_0}{\omega'} \quad \text{und} \quad Y_0 = \frac{Q_0}{\omega'}$$

die Koordinaten des Drehpols P auf der festen Polbahn $O_1 O_2$. Im beweglichen System hat dagegen ω' die Komponenten:

(18) $$\begin{aligned} p_0 &= \cos\vartheta\varphi' + \psi' \\ q_0 &= \sin\psi\vartheta' - \sin\vartheta\cos\psi\varphi' \\ r_0 &= \cos\psi\vartheta' + \sin\vartheta\sin\psi\varphi' \end{aligned}$$

so daß

(19) $$X_0' = \frac{p_0}{\omega'}, \quad Y_0' = \frac{q_0}{\omega'}, \quad Z_0' = \frac{r_0}{\omega'}$$

die Gleichungen der sphärischen Hilfspolbahn H sind.

Bei der Bewegung von Σ' in Σ beschreibt aber der Punkt O in Σ' eine Gleitkurve W, welche als Rollkurve der inversen Bewegung die durch O gehende sphärische Evolvente der Kurve H ist.

Die Gleichungen dieser Kurve W bezüglich Σ' sind daher

(20) $$X_1' = \cos\vartheta, \quad Y_1' = -\sin\vartheta\cos\psi, \quad Z_1' = \sin\vartheta\sin\psi,$$

so daß $-\vartheta$ und $-\psi$ oder ϑ und $\pi - \psi$ die sphärischen Polarkoordinaten von W sind. Unter Zufügung einer passend gewählten Integrationskonstanten stellt daher

(21) $$\psi - \psi_0 = \int \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$$

auch die Gleichung der Wälzungskurve dar.

Wenn aber die Hilfspolbahn H auf der Zentralen $O_1 O_2$ abrollt, so rollt, wie die Gleichungen (8) zeigen, gleichzeitig W auf beiden Teilkreisen, und erteilt Σ_1 und Σ_2 damit Auslenkungen φ_1 und φ_2, die durch die Gleichungen

(22) $$d\varphi_1 \sin\alpha_1 = \frac{d\vartheta}{\sin\varphi} = -d\varphi_2 \sin\alpha_2$$

also durch

(23) $$\varphi_1 = \frac{1}{\sin\alpha_1}\int \frac{d\vartheta}{\sin\varphi} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = -\frac{1}{\sin\alpha_2}\int \frac{d\vartheta}{\sin\varphi}$$

bestimmt sind. Durchläuft also M die Kurve E, so beschreibt M in Σ_1 und Σ_2 Relativbahnen Z_1 und Z_2, die sich beständig in M berühren. Es sind daher Z_1 und Z_2 zwei sphärische Zahnprofile, E ihre Eingrifflinie, W ihre Wälzungskurve und wir erhalten demnach den entsprechenden

Satz I. Rollt ein sphärisches System Σ' mit einer beliebigen Hilfspolbahn H auf der sphärischen Zentralen $O_1 O_2$ beider Teilkreise, während die durch den Berührungspunkt O bestimmte sphärische Evolvente W von

H durch Abrollen auf T_1 und T_2 die Systeme Σ_1 und Σ_2 derselben in drehende Bewegung versetzt, so beschreibt jeder Punkt M von Σ' in Σ eine sphärische Eingrifflinie, in Σ_1 und Σ_2 aber die zu dieser gehörenden sphärischen Zahnprofile Z_1 und Z_2.

In analoger Weise gelten auch die früher ausgesprochenen Sätze II und III für die Kugel.

Um die Gleichungen der Zahnprofile selbst zu erhalten, hat man bloß die Koordinaten des Punktes M in den Systemen $(O_1 x_1 y_1 z_1)$ und $(O_2 x_2 y_2 z_2)$ darzustellen. Der Übergang von Σ zu Σ_1 erfolgt aber durch Drehung von Σ um die Achse Z um den Winkel $(-\alpha_1)$, wodurch X nach x_1 gelangt; sodann durch Drehung um x_1 um den Winkel φ_1. Die Transformationsformeln werden daher:

$$
(24) \qquad
\begin{aligned}
x_1 &= X\cos\alpha_1 - Y\sin\alpha_1 \\
y_1 &= (X\sin\alpha_1 + Y\cos\alpha_1)\cos\varphi_1 + Z\sin\varphi_1 \\
z_1 &= -(X\sin\alpha_1 + Y\cos\alpha_1)\sin\varphi_1 + Z\cos\varphi_1 .
\end{aligned}
$$

Sind also

$$X = a_1, \quad Y = a_2, \quad Z = a_3$$

die Koordinaten von M, so gibt die Substitution dieser Werte in die eben angeschriebenen Formeln die Gleichungen des Profils Z_1:

$$
(25) \qquad
\begin{aligned}
x_1 &= a_1\cos\alpha_1 - a_2\sin\alpha_1 \\
y_1 &= (a_1\sin\alpha_1 + a_2\cos\alpha_1)\cos\varphi_1 + a_3\sin\varphi_1 \\
z_1 &= -(a_1\sin\alpha_1 + a_2\cos\alpha_1)\sin\varphi_1 + a_3\cos\varphi_1 \\
\varphi_1 &= \frac{1}{\sin\alpha_1}\int\frac{d\vartheta}{\sin\varphi} .
\end{aligned}
$$

Analoge Gleichungen gelten natürlich für das zweite Profil. Für eine kreisförmige Eingrifflinie erhält man die besondere Verzahnung, welche *sphärische Zykloidenverzahnung* genannt wird. Diese Bezeichnung kann aber auch für den Fall einer allgemeinen Eingrifflinie beibehalten werden.

§ 7. Darstellung der sphärischen Zahnprofile als Evolventen.

Um die Profile als Evolventen zu erhalten, führen wir an Stelle von Σ' ein neues System Σ'' ein, welches mit Σ' die Achse X' als Achse X'' gemeinsam hat, um diese Achse aber gegen Σ' derart drehbar ist, daß die Ebene $X''Y''$ beständig die feste Achse X enthält. Diese Bewegung erhält man aber aus der allgemeinen Bewegung eines Systems durch die Spezialisierung

$$(26) \qquad \psi = 0, \quad \psi' = 0.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω'' von Σ'' hat daher in Σ und Σ'' die Komponenten

$$(27)\qquad \begin{aligned} P_1 &= \varphi' & p_1 &= \cos\vartheta\,\varphi' \\ Q_1 &= -\sin\varphi\,\vartheta' & q_1 &= -\sin\vartheta\,\varphi' \\ R_1 &= \cos\varphi\,\vartheta' & r_1 &= \vartheta' \end{aligned}$$

Gegen die beiden Systeme Σ_1 und Σ_2 besitzt Σ'' zwei Polachsen m_1 und m_2 und um jede derselben eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit. Die Komponenten derjenigen an m_1 sind

$$(28)\qquad \begin{aligned} P_{1k} &= \varphi' - \omega_1\cos\alpha_1 = \varphi' - \operatorname{cotg}\alpha_1\frac{\vartheta'}{\sin\varphi} \\ Q_{1k} &= -\sin\varphi\,\vartheta' + \omega_1\sin\alpha_1 = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\vartheta' \\ R_{1k} &= \cos\varphi\cdot\vartheta'. \end{aligned}$$

Desgleichen besitzt die Winkelgeschwindigkeit an der Achs m_2 die Komponenten:

$$(29)\qquad \begin{aligned} P_{2k} &= \varphi' + \omega_2\cos\alpha_2 = \varphi' - \operatorname{cotg}\alpha_2\frac{\vartheta'}{\sin\varphi} \\ Q_{2k} &= -\sin\varphi\,\vartheta' + \omega_2\cos\alpha_2 = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\vartheta' \\ R_{2k} &= \cos\varphi\,\vartheta'. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$(30)\qquad \frac{Q_{1k}}{R_{1k}} = \frac{Q_{2k}}{R_{2k}} = \operatorname{cotg}\varphi,$$

d. h. die Achsen m_1 und m_2 liegen stets mit der beschreibenden Achse X' in einer Ebene durch die Achse X. Die Spurpunkte M_1 und M_2 dieser Polachsen in der Kugel liegen also stets auf dem Großkreis OM. Daher wird jeder Punkt dieses Bogens in Σ_1 und Σ_2 zwei Relativbahnen Z_1 und Z_2 der Kugel beschreiben, welche OM beständig zur gemeinsamen Normalen, also M_1 und M_2 zu Krümmungsmittelpunkten haben. Jeder Punkt von OM beschreibt daher in Σ_1 und Σ_2 zwei Zahnprofile und in Σ die zugehörige Eingrifflinie, während M_1 und M_2 die allen Profilen gemeinsamen Evoluten K_1 und K_2 beschreiben.

Demnach gelten auch für die Kugel die beiden Sätze (IV) und (V), welche wir in Form eines einzigen Satzes so aussprechen können:

Satz II. Bewegt sich ein sphärisches System Σ'' derart in Σ, daß ein Meridian des Systems beständig durch den Berührungspunkt O der Teilkreise T_1 und T_2 der sphärischen Systeme Σ_1 und Σ_2 hindurchgeht, und werden diese selbst dadurch in drehende Bewegung versetzt, daß der Meridian als sekundäre Polbahn auf den sekundären Polbahnen K_1 und K_2 von Σ_1 und Σ_2 abrollt, so beschreiben die Punkte M des Meridians in Σ eine Schar von

Eingrifflinien E, in Σ_1 und Σ_2 aber zwei Scharen äquidistanter Zahnprofile Z_1 und Z_2, welche die Polbahnen K_1 und K_2 je zur gemeinsamen Evolute haben.

Es ist leicht die Gleichungen dieser Evoluten hinzuschreiben. Bedeutet ω_{1k} die relative Winkelgeschwindigkeit von Σ'' in Σ_1, ist also

$$\omega_{1k} = \sqrt{P_{1k}^2 + Q_{1k}^2 + R_{1k}^2}, \tag{31}$$

so sind

$$A_1 = \frac{P_{1k}}{\omega_{1k}}, \quad A_2 = \frac{Q_{1k}}{\omega_{1k}}, \quad A_3 = \frac{R_{1k}}{\omega_{1k}} \tag{32}$$

die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes M_1 und daher nach (24)

$$\begin{aligned} x_{1k} &= A_1 \cos\alpha_1 - A_2 \sin\alpha_1 \\ y_{1k} &= (A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_1)\cos\varphi_1 + A_3 \sin\varphi_1 \\ z_{1k} &= -(A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_1)\sin\varphi_1 + A_3 \cos\varphi_1 \\ \varphi_1 &= \frac{1}{\sin\alpha_1}\int \frac{d\vartheta}{\sin\varphi} \end{aligned} \tag{33}$$

die Gleichungen der Evolute K_1 bezogen auf das System Σ_1.

Geometrisch werden die Krümmungsmittelpunkte aus dem Pol P' sehr einfach erhalten. Der Pol P' selbst ist der Schnittpunkt der sphärischen Normalen der Eingrifflinie in M mit der Normalen zum Meridian OM in O. Verbindet man P' mit O_1 und O_2 je durch einen Großkreisbogen, so schneiden diese Bogen aus dem Meridian OM die Krümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 heraus.

Diese Konstruktion ist auch für die Kugel der geometrische Ausdruck der Savaryschen Formel. Bedeuten nämlich

$$\vartheta_1 = OM_1 \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = OM_2$$

die sphärischen Radienvektoren der Krümmungszentra M_1 und M_2, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\vartheta_1 &= \frac{P_{1k}}{\sqrt{Q_{1k}^2 + R_{1k}^2}} = \operatorname{tg}\varphi\frac{\varphi'}{\vartheta'} - \frac{\operatorname{cotg}\alpha_1}{\cos\varphi}, \\ \operatorname{cotg}\vartheta_2 &= \frac{P_{2k}}{\sqrt{Q_{2k}^2 + R_{2k}^2}} = \operatorname{tg}\varphi\frac{\varphi'}{\vartheta'} + \frac{\operatorname{cotg}\alpha_2}{\cos\varphi}. \end{aligned} \tag{34}$$

Bedeutet andererseits λ den sphärischen Abstand des Poles P auf $O_1 O_2$ von O, so ist

$$\operatorname{cotg}\lambda = \frac{P_0}{Q_0} = \operatorname{cotg}\vartheta\cos\varphi - \frac{\varphi'}{\vartheta'}\sin\varphi. \tag{35}$$

Die Elimination der Quotienten $\frac{\varphi'}{\vartheta'}$ aus dieser und den beiden Formeln (34) liefert die Formel von Savary für die Kugel:

$$\operatorname{cotg}\lambda + \operatorname{cotg}\alpha_1 = (\operatorname{cotg}\vartheta - \operatorname{cotg}\vartheta_1)\cos\varphi$$

oder

$$\frac{1}{\operatorname{tg} OP} - \frac{1}{\operatorname{tg} OO_1} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} OM} - \frac{1}{\operatorname{tg} OM_1}\right) \cos \varphi \tag{36}$$

und

$$\operatorname{cotg} \lambda - \operatorname{cotg} \alpha_2 = (\operatorname{cotg} \vartheta - \operatorname{cotg} \vartheta_2) \cos \varphi$$

oder

$$\frac{1}{\operatorname{tg} OP} - \frac{1}{\operatorname{tg} OO_2} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} OM} - \frac{1}{\operatorname{tg} OM_2}\right) \cos \varphi, \tag{37}$$

welche die Punkte M_1 und M_2 einzeln bestimmen.

Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander, so erhält man die Beziehung zwischen M_1 und M_2 selbst in der weitern Gleichung:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} OO_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} OO_2} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} OM_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} OM_2}\right) \cos \varphi. \tag{38}$$

Von praktischer Bedeutung ist auch hier der Fall, in welchem die Schar der Eingrifflinien E identisch ist mit dem Meridian OM selbst. Die Profile Z_1 und Z_2 sind dann sphärische Kreisevolventen und man kann daher diese Art der Verzahnungen überhaupt *sphärische Evolventenverzahnungen* nennen.[1])

§ 8. Die übrigen Verzahnungsarten.

Das geometrische Prinzip, nach welchem die noch in Betracht kommenden Verzahnungsmethoden erhalten werden, ergibt sich in Analogie zu § 4 auch für die Kugel aus der Betrachtung des geodätischen Kontingenzwinkels und des Bogenelementes der Zahnprofile. Bedeutet P''_{1k} die Projektion der Winkelgeschwindigkeit w_{1k} nach der Achse X'', so ist

$$\begin{aligned} P''_{1k} &= a_1 P_{1k} + a_2 Q_{1k} + a_3 R_{1k} \\ &= \cos \vartheta \varphi' + \frac{\sin \vartheta \cos \varphi - \operatorname{cotg} \alpha_1 \cos \vartheta}{\sin \varphi} \vartheta'. \end{aligned} \tag{39}$$

Demnach ist der geodätische Kontingenzwinkel des Profils Z_1

$$d\tau_1 = P''_{1k} dt = \cos \vartheta \, d\varphi + \frac{\sin \vartheta \cos \varphi - \operatorname{cotg} \alpha_1 \cos \vartheta}{\sin \varphi} d\vartheta. \tag{40}$$

Bedeutet ebenso Q''_{1k} die Projektion der Winkelgeschwindigkeit w_{1k} nach der Achse Y'', so ist

$$Q''_{1k} = b_1 P_{1k} + b_2 Q_{1k} + b_3 R_{1k},$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (28):

$$Q''_{1k} = - \sin \vartheta \varphi' + \frac{\cos \vartheta \cos \varphi + \operatorname{cotg} \alpha_1 \sin \vartheta}{\sin \varphi} \vartheta'. \tag{41}$$

---

1) Nach (21) wird mit $\varphi = \varepsilon = \text{const.}$ die zugehörige Wälzungskurve die sphärische *logarithmische Spirale*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \Gamma \cdot e^{\psi \operatorname{tg} \varepsilon}.$$

Demnach erhält man für das Bogenelement des Profils Z_1 den Ausdruck:

(42) $$ds_1 = Q''_{1k}\,dt = -\sin\vartheta\,d\varphi + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi + \operatorname{cotg}\alpha_1\sin\vartheta}{\sin\varphi}\,d\vartheta.$$ [1]

Wenn der Kontingenzwinkel $d\tau_1$ verschwindet, so ist das Profil Z_1 ganz oder teilweise ein Großkreis der Kugel. In diesem Falle ist die Eingrifflinie E definiert durch die Bedingung:

$$\cos\vartheta\,d\varphi + \frac{\sin\vartheta\cos\varphi - \operatorname{cotg}\alpha_1\cos\vartheta}{\sin\varphi}\,d\vartheta = 0.$$

Bedeutet ϑ_0 die Integrationskonstante, so lautet die endliche Gleichung der Eingrifflinie

(43) $$\cos\vartheta\cos\varphi + \operatorname{cotg}\alpha_1(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = 0.$$

Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem ϑ_0 verschwindet. Die Eingrifflinie hat dann die Gleichung

(44) $$\operatorname{tg}\vartheta = -\operatorname{tg}\alpha_1\cos\varphi.$$

Sie ist also der Ort der Fußpunkte aller Lote, die von O_1 auf die Meridiane durch O gefällt werden können, also kein Kreis mehr, wie in der Ebene, sondern eine Raumkurve vierter Ordnung erster Art.

Aus der Gleichung (44) folgt zunächst

$$\sin\varphi = -\frac{\sin\alpha_1\cos\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha_1}\right)^2}}.$$

Es ist daher

$$\varphi_1 = -\frac{1}{\sin\alpha_1}\int\frac{d\vartheta}{\sin\varphi} = \arcsin\left(\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha_1}\right),$$

also

$$\sin\vartheta = \sin\alpha_1\sin\varphi_1,$$
$$\cos\vartheta = \Delta(\varphi_1),$$
$$\operatorname{tg}\vartheta = \sin\alpha_1\frac{\sin\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)} = -\operatorname{tg}\alpha_1\cos\varphi,$$

somit

$$\cos\varphi = -\cos\alpha_1\frac{\sin\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)},$$
$$\sin\varphi = \frac{\cos\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)}.$$

---

[1] Bezeichnet also ϱ_1 den sphärischen Krümmungsradius des Profils Z_1, so ist:

$$\operatorname{tg}\varrho_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1} = \operatorname{tg}\vartheta\frac{\left(-\varphi' + \frac{\operatorname{cotg}\alpha_1}{\sin\varphi}\vartheta'\right) + \operatorname{cotg}\vartheta\operatorname{cotg}\varphi\,\vartheta'}{\left(\varphi' - \frac{\operatorname{cotg}\alpha_1}{\sin\varphi}\vartheta'\right) + \operatorname{tg}\vartheta\operatorname{cotg}\varphi\,\vartheta'},$$

also unter Berücksichtigung von (29) und (34)

$$\operatorname{tg}\varrho_1 = \operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta) \quad \text{d. h.} \quad \varrho_1 = \vartheta_1 - \vartheta,$$

wodurch bestätigt wird, daß M_1 der Krümmungsmittelpunkt von M ist.

Man erhält demnach für die Koordinaten von M in Σ:

(45) $a_1 = \Delta(\varphi_1),\quad a_2 = -\sin\alpha_1\cos\alpha_1\frac{\sin^2\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)},\quad a_3 = \sin\alpha_1\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)}.$

Die Substitution dieser Werte in (25) ergibt somit als Gleichungen des Profils Z_1:

(46) $x_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\Delta(\varphi_1)},\quad y_1 = \sin\alpha_1\frac{\cos\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)},\quad z_1 = 0.$

Es ist also in der Tat das Profil der Großkreisbogen OO_1. Wir haben daher den Fall der *sphärischen Radialflankenverzahnung.*[1])

Wenn dagegen in der Gleichung der Eingrifflinie

$$\cos\vartheta\cos\varphi + \operatorname{cotg}\alpha_1(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = 0$$

die Konstante ϑ_0 nicht verschwindet, so geht die Eingrifflinie unter

1) Auch die Gleichung der *Wälzungskurve* W, welche auf dem Teilkreis T_1 abrollen muß, um den Großkreis OO_1 zu erzeugen, kann leicht bestimmt werden. Der Winkel ψ ist bestimmt durch die Gleichung

$$\psi = -\int_0^\vartheta \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \operatorname{cotg}\alpha_1\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha_1}}}.$$

Setzt man also

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha_1} = \sin\varphi_1,$$

so wird

$$\frac{\psi}{\cos\alpha_1} = \int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)},$$

also

$$\varphi_1 = am\left(\frac{\psi}{\cos\alpha_1}\right).$$

Demnach wird die Gleichung der Kurve W zunächst

$$\operatorname{tg}\vartheta = \sin\alpha_1\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{\psi}{\cos\alpha_1}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{\psi}{\cos\alpha_1}\right)} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha_1}{\operatorname{cn}\left(\frac{\psi}{\cos\alpha_1} - K\right)},$$

wo K das vollständige elliptische Integral 1. Gattung bedeutet. Dem Winkel $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ entspricht aber eine Symmetrieachse der Kurve W, welche somit durch den Winkel

$$\frac{\psi_0}{\cos\alpha_1} = K$$

bestimmt ist. Zählt man also den Polarwinkel u von der Symmetrieachse aus, indem man setzt

$$u = \psi_0 - \psi$$

so wird die Gleichung der *Wälzungskurve* W

$$\operatorname{ctg}\vartheta = \operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{cn}\left(\frac{u}{\cos\alpha_1}\right).$$

einem von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel φ_0 durch die Zentrale, der durch die Gleichung

$$\cos\varphi_0 = \operatorname{cotg}\alpha_1 \sin\vartheta_0$$

bestimmt ist. Das Zahnprofil Z_1 ist dann derjenige Großkreis, der normal zur Tangente der Eingrifflinie in O steht. Wird also das Profil Z_1 um O_1 gedreht, so ist jetzt die Eingrifflinie der geometrische Ort der Fußpunkte der Lote aus O auf alle Lagen von Z_1 Die Verzahnung ist also das Analogon zur *Geradflankenverzahnung* der Ebene.

Wenn endlich das Bogenelement ds_1 verschwindet, so reduziert sich Z_1 auf einen Punkt und wir haben die *sphärische Punktverzahnung.* Die Eingrifflinie ist bestimmt durch die Bedingung

$$\sin\vartheta\, d\varphi - \frac{\cos\vartheta\cos\varphi + \operatorname{cotg}\alpha_1 \sin\vartheta}{\sin\varphi}\, d\vartheta = 0,$$

deren Integral lautet:

(47) $$\sin\vartheta\cos\varphi = \operatorname{cotg}\alpha_1 (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0).$$

Die Eingrifflinie ist also wieder ein aus dem Punkt O_1 beschriebener Kreis E vom Radius R_0, wo

$$\cos R_0 = \cos\alpha_1 \cos\vartheta_0$$

ist.

Es ist ferner die Wälzungskurve W der Teilkreis T_1 selbst, wodurch sich erklärt, daß das Profil Z_1 punktförmig sein muß. Das Profil Z_2 wird eine sphärische Epitrochoide.

Für $\vartheta_0 = 0$ fällt der Kreis E mit dem Teilkreis T_1 zusammen und es ergibt sich die Möglichkeit, nach Satz II eine neue Verzahnung zu erhalten. Vergrößert man alle durch O gehenden Radien ϑ von T_1 um denselben Betrag ε, so erhält man als Eingrifflinie eine sphärische Pascalsche Schnecke, während die neuen Profile Z_1' und Z_2' Äquidistanten der alten werden. Insbesondere ist Z_1' ein mit dem sphärischen Radius ε um den Punkt Z_1 beschriebener Kreis und es kann daher die Verzahnung als *sphärische Triebstockverzahnung* bezeichnet werden.

Aus der vorstehenden Darlegung geht hervor, daß sowohl in der Ebene als auf der Kugel alle bekannten Verzahnungsarten einzig aus den Bedingungen hervorgehen, welche der Eingrifflinie auferlegt werden können. Es ist daher zu erwarten, daß im Falle der Verzahnung der Hyperboloidräder die *Eingriffsfläche* im Raume die analoge fundamentale Bedeutung für das Verzahnungsproblem haben werde, welche der Eingrifflinie für die zylindrischen und konischen Räder zukommt.

Dresden, im April 1907.

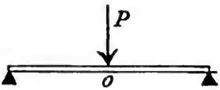
Der Kreisscheibenträger.

Von Baurat ADOLF FRANCKE in Alfeld a. d. Leine.

I. Die allgemeine Differentialgleichung der elastischen Verbiegung.

Sei eine Kreisscheibe (Fig. 1) gleichmäßig am Rande aufgelagert, dann gelten — bei vollkommener Symmetrie in bezug auf den Mittelpunkt und Ursprung O — die Gleichungen: $M = 2\pi\, x.\, m$; $Q = 2\pi\, x.\, q$, wenn Q und M Querkraft und Moment des ganzen Kreisschnittes $2\pi x h$, q und m die entsprechenden Kräfte der Längeneinheit bedeuten, und ferner gilt stets die Momentengleichung der elastischen Biegung y:

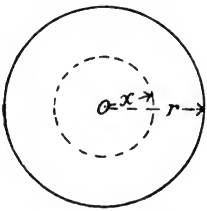
Fig. 1.



$$2\pi x E J \frac{d^2 y}{d x^2} = -M; \quad E J \frac{d^2 y}{d x^2} = -m,$$ wo

also $J = \frac{h^3}{12}$ das Trägheitsmoment der Längeneinheit bedeutet.

Die fernere, für den Tragbalken übliche Gleichung $\frac{dM}{dx} = -Q$; $\frac{dm}{dx} = -q$ würde für den Kreisscheibenträger nur sehr angenäherte rechnerische Bedeutung haben und muß — für eine richtige Darstellung des Verlaufes der inneren Kräfte — entsprechend ergänzt werden, weil die Wirkung der Ringkräfte nicht vernachlässigt werden darf.



Durch die Betrachtung eines Durchmesserschnittes, der, z. B. bei Punktlast P in O, augenscheinlich das statische Moment der Auflagerkräfte einer Hälfte als innere Kraft aufzunehmen hat, wird erkannt, daß Ringmomente a, aber — wegen der vorausgesetzten vollkommenen Symmetrie — keinerlei Ringschubkräfte auftreten.

Der zu den Ringmomenten a zugehörige Krümmungshalbmesser ϱ ist gleich der Seite des im Ringe $2\pi x$ von den Normalen der Fläche der elastischen Verbiegung gebildeten Kreiskegels und hat mithin, mit bezug auf die Kleinheit des Zahlenwertes $\frac{dy}{dx}$ den Wert:

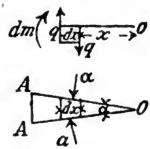
$$\varrho = \frac{x}{\frac{dy}{dx}}$$

und also hat das Ringmoment der Längeneinheit a den Zahlenwert:

$$a = -\frac{EJ}{x}\frac{dy}{dx}.$$

Betrachten wir (Fig. 2), den Kreisausschnitt OAA des kleinen Winkels α, so unterscheidet sich dieser Träger charakteristisch von dem einfachen Dreiecksträger lediglich dadurch, daß die Seiten OA durch die Ringmomente a belastet sind. Die Ebene dieser Momente bildet den Winkel $90 - \frac{\alpha}{2}$ mit der Trägerachse, und wir erhalten daher durch Betrachtung eines Elementes dx dieses Trägers die Gleichung des Momentenzuwachses:

Fig. 2.



$$\frac{\alpha}{2\pi} dM = -\frac{\alpha}{2\pi} Q\,dx + 2a\,dx \sin\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{dM}{dx} = -\frac{\alpha}{2\pi}\cdot Q - \frac{2EJ}{x}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Für genügend kleines α ist $\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}$ und mithin, da $\frac{dM}{dx} = -2\pi\frac{d\left[xEJ\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx}$ ist, gilt die Differentialgleichung:

$$\text{(I)}\qquad \frac{d\left[xEJ\frac{d^2x}{dx^2}\right]}{dx} - \frac{EI}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2\pi}$$

Indem die Querkraft Q, nach dem jeweiligen Kräftebilde, als gegebene Abhängigkeit von x dargestellt wird, kann diese Gleichung I als die allgemeine Differentialgleichung für das Gesetz des Verlaufes der elastischen Verbiegung aufgefaßt werden.

II. Anwendungen.

Ist die Höhe h der Scheibe und also J unverändert, so gilt mithin die Differentialgleichung:

$$\text{(Ia)}\qquad EJ\left\{x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{Q}{2\pi}$$

oder

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2\pi EJ}.$$

Indem ein Einzelwert $y = x^n$ für die linke Seite der Gleichung den Wert ergibt: $n^2(n-2)x^{n-2}$, so entspricht der Differentialgleichung

$$EJ\left(x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

die allgemeine Integrallösung:

$$y = C_1 + C_2 x^2 + C_3 \log.\text{nat.}\, x$$

und diese Lösung enthält mithin und stellt stets dar die drei willkürlichen Integrationsfestwerte der allgemeinen Lösung der Gleichung Ia für den Fall $Q = f(x)$ verschieden von 0.

1) *Volle Belastung p.*

Für $Q = p\pi x^2$ gilt die Gleichung:

$$EJ\left\{x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right\} = p\frac{x^2}{2}$$

und, da $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$ ist, gilt die Lösung:

$$EJy = EJy_0 - m_0\frac{x^2}{2} + \frac{px^4}{2\cdot 4^2\cdot 2}$$

oder, weil $y = 0$ ist am Auflager für $x = r$:

$$EJy = \frac{m_0(r^2 - x^2)}{2} + \frac{p(x^4 - r^4)}{64}.$$

Die einzige Unbekannte dieser Gleichung, das Biegungsmoment m_0 im Mittelpunkt, wird bestimmt durch die Art und Weise der Lagerung des Trägerrandes.

Bei freiem Aufliegen ist $EJ\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ für $x = r$, also $m_0 = \frac{3}{16}pr^2 = \frac{3}{16\pi}\cdot P$, wenn $P = p\pi r^2$ die Gesamtlast ausdrückt und es gilt die Gleichung der Verbiegung: $EJy = p\left\{\frac{5r^4 - 6r^2x^2 + x^4}{64}\right\} = P\cdot\left\{\frac{5 - 6x^2 + \frac{x^4}{r^2}}{64\pi}\right\}$.

Da $m = -EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3p}{16}(r^2 - x^2)$ ist, so ist der Wert $m_0 = \frac{3P}{16\pi}$ zugleich der maßgebende Wert für die Bestimmung der erforderlichen Plattenstärke h. Ist σ die zulässige Spannung, so kann mithin h nach der Formel bemessen werden:

$$\sigma\cdot\frac{h^2}{6} = \frac{3P}{16\pi} \text{ oder } h = \text{rund } 0{,}6\sqrt{\frac{P}{\sigma}}.$$

Diese nämliche Formel darf man auch für praktische Fälle mit hinreichender Genauigkeit und Sicherheit beibehalten für quadratische, an den Rändern freiaufliegende Platten, wenn unter $P = pb^2$ die gesamte auf die quadratische Fläche der Seite b bezogene Last verstanden wird, weil das Biegungsmoment m_0 im Mittelpunkt für diesen Fall naturgemäß zwischen dem entsprechendem Werte des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises liegt:

$$\frac{3P_1}{16\pi} > \frac{\sigma h^2}{6} > \frac{3P_2}{16\pi}; \quad P_1 > p_1 b^2 > P_2.$$

Wäre im anderen Falle der Rand völlig undrehbar eingemauert, so würde, für $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = r$, der Wert $m_0 = \frac{pr^2}{16}$ und mithin die Gleichung:

$$EJy = \frac{p(r^2 - x^2)^2}{64} \text{ gelten.}$$

Weil aber völlige Undrehbarkeit in der Wirklichkeit niemals völlig erreichbar ist, vielmehr bei Bindung des Kämpfers in der zwischen Kämpfermoment m und Kämpferdrehung φ bestehenden einfachen Beziehung $B\varphi = \pm m$ dem Werte B, welcher das widerstehende Widerstandsmoment des elastisch gebundenen Kämpfers für die zwangsweise Drehung $\varphi = 1$ ausdrückt, niemals ein ∞-großer Wert zugesprochen werden darf, so erhalten wir, bei zwangsweiser Bindung des Auflagers aus $\varphi = \pm \frac{m}{B}$; $B = \frac{EJ}{\lambda r}$; $\frac{EJ}{r}\varphi = \pm \lambda m$ den Wert:

$$m_0 = \frac{pr^2(1 + 3\lambda)}{16\ (1 + \lambda)}$$

und mithin

$$EJy = \frac{pr^2}{32} \cdot \left\{ \frac{(r^2 - x^2)(1 + 3\lambda)}{1 + \lambda} + \frac{(x^4 - r^4)}{2r^2} \right\}$$

und es entspricht der unveränderliche Wert λ dem elastischen Werte $\frac{EJ}{r}\varphi$ für das Kämpfermoment 1, wobei der Sonderwert $\lambda = \infty$ die freie Drehbarkeit, $\lambda = 0$ den in Wahrheit nie erreichbaren Grenzfall der undrehbaren Einmauerung darstellt.

2) *Einzellast.*

Für Einzellast P im Mittelpunkt O gilt die Differentialgleichung:
$EJ\left\{ x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} \right\} = \frac{P}{2\pi}$ mit der Integrallösung:

$$EJy = EJy_0 - \frac{Cx^2}{2} - \frac{Px^2lx}{8\pi}$$

oder, weil $y = 0$ für $x = r$:

$$EJy = \frac{c \cdot \{r^2 - x^2\}}{2} + \frac{P\{x^2lx - r^2lr\}}{8\pi}.$$

Die Unbekannte c dieser Gleichung wird auch hier bestimmt durch das Verhalten des aufgelagerten Randes.

Bei freier Auflagerung gilt der Wert:

$c = \frac{P}{8\pi} \cdot \left\{3 + 2\,l\,r\right\}$ und mithin die Gleichung:

$$EJy = \frac{P}{8\pi} \cdot \left\{ \frac{3(r^2 - x^2)}{2} + x^2(lx - lr) \right\},$$

während die allgemeinste Darstellung, wie in dem vorhergehenden Falle gegeben wird durch die Betrachtung elastischer Einspannung bei den Werten $B\varphi = \pm m$

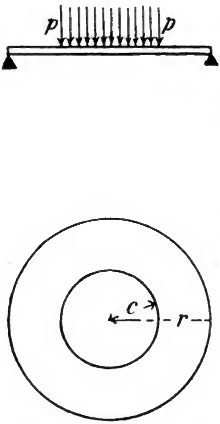
$$\varphi = \frac{m}{B} = \frac{m\lambda r}{EJ}; \quad \lambda = \frac{EJ}{\lambda B};$$

$$c(1+\lambda) = \frac{P}{8\pi} \cdot \left\{1 + 2\,l\,r + \lambda\,(3 + 2\,l\,r)\right\}$$

$$EJy = \frac{P}{8\pi} \cdot \left\{\left(\frac{1+2\,l\,r+\lambda\,(3+2\,l\,r)}{2\,(1+\lambda)}\right)(r^2 - x^2) + (x^2\,lx - r^2\,l\,x)\right\}$$

und es stellt auch hier $\lambda = \infty$ die freie Auflagerung, $\lambda = 0$ die völlige Undrehbarkeit dar. —

Fig. 3.



3) *Gleichmäßige Belastung des Innenkreises.* Sei, Fig. 3, lediglich der innere Kreis des Halbmessers c gleichmäßig mit p belastet, dann gilt von $x = 0$ bis $x = c$ die Differentialgleichung:

$$EJ\left\{x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right\} = p\frac{x^2}{2}$$

mit der zugehörigen Integralgleichung:

$$\text{(I)} \qquad EJ = EJy_0 - \frac{m_0\,x^2}{2} + \frac{p\,x^4}{64},$$

während auf der unbelasteten Ringfläche, also von $x = c$ bis $x = r$ die Gleichungen gelten:

$$EJ\left\{x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{Q}{2\pi}$$

$$= \text{unverändert} = \frac{p\,c^2}{2},$$

$$\text{(II)} \quad EJy = A_0 + A_1\,l \cdot x + \frac{A_2\,x^2}{2} + \frac{p\,c^2}{8} \cdot x^2 l \cdot x$$

oder, da $y = 0$ für $x = r$ ist:

$$EJy = A_1\left(l\,\frac{x}{r}\right) + A_2 \cdot \left(\frac{x^2 - r^2}{2}\right) + \frac{p\,c^2}{8}(x^2 \cdot lx - r^2 l \cdot r).$$

Die vier Unbekannten, y_0, m_0, A_1, A_2 sind bestimmt durch den Zwang der Übereinstimmung der aus den beiden verschiedenen Gleichungen für $x = c$ fließenden Werte y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, sowie durch die auf die Art und Weise der Auflagerung bezügliche allgemein ausgedrückte Bedingung:

$$\frac{1}{r}\frac{dy}{dx} = -\lambda\frac{d^2y}{dx^2} \text{ für } x = r.$$

Aus der Gleichheit der Werte $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = c$ erhält man die Gleichungen:

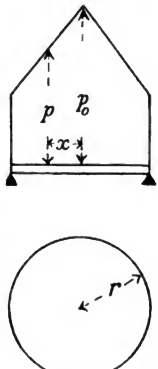
$$-m_0 + \frac{pc^2}{16} = \frac{A_1}{c^2} + A_2 + \frac{pc^2}{8}\{2l \cdot c + 1\}$$

$$-m_0 + \frac{3pc^2}{16} = -\frac{A_1}{c^2} + A_2 + \frac{pc^2}{8}\{2l \cdot c + 3\},$$

woraus durch Abziehen der Gleichungen voneinander der Wert gefunden wird $A_1 = \frac{pc^4}{16}$.

Sei nun z. B. die Auflagerung frei, so gilt für $\lambda = \infty$ die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ für $x = r$ und mithin ist:

Fig. 4.



$$0 = -\frac{A_1}{r^2} + A_2 + \frac{pc^2}{8}\{3 + 2lr\},$$

wodurch, für $A_2 = \frac{pc^4}{16r^2} - \frac{pc^2}{8}\{3 + 2lr\}$, die Gleichung II vollständig festgestellt ist durch den Ausdruck:

$$\text{(II)} \qquad EJy = \frac{pc^4}{16}\left\{l \cdot \frac{x}{r} + \frac{x^2 - r^2}{2r^2}\right\}$$

$$+ \frac{pc^2}{8} \cdot \left\{x^2 l \cdot \frac{x}{r} + \frac{3}{2}(r^2 - x^2)\right\}.$$

Für genügend kleine, verschwindende Werte c erhält man daraus für $\pi c^2 p = P$ die oben für Punktlast P abgeleitete Gleichung und man erkennt, daß für nicht verschwindende Werte c der erste Wert der rechten Seite $-\frac{pc^4}{16}\left\{l \cdot \frac{r}{x} + \frac{r^2 - x^2}{2r^2}\right\}$ die Abschwächung der elastischen Durchbiegung im Vergleich mit konzentrierter Punktlast darstellt, und durch Ableitung der Gleichung (II) erhält man das von einer auf den kleinen Angriffskreis c verteilten Einzellast P im Angriffspunkt erzeugte Biegungsmoment:

$$m_0 = \frac{pc^2}{4}\left\{l \cdot \frac{r}{c} + \frac{r^2 - c^2}{4r^2}\right\} = \frac{P}{4\pi}\left\{l \cdot \frac{r}{c} + \frac{r^2 - c^2}{4r^2}\right\}.$$

4) *Kegelförmige Belastung.*

Sei, Fig. 4, $p = p_0\left\{1 \mp \theta\frac{x}{r}\right\}$ so ist:

$$Q = \int_0^x 2\pi p_0\left(x - \frac{\theta x^2}{r}\right)dx = 2\pi p_0\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{\theta x^3}{3r}\right\}$$

und es gilt die Differentialgleichung:

$$EJ\left\{x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right\} = p_0\frac{x^2}{2} - p_0\frac{\theta x^3}{3r}$$

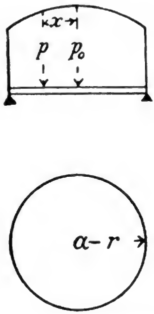
mit der Integrallösung:

$$EJy = EJy_0 - \frac{m_0 x^2}{2} + \frac{p_0 x^4}{64} - \frac{\theta}{3r} p_0 \cdot \frac{x^5}{5^2 . (5-2)}$$

oder, da $y = 0$ für $x = r$,

$$EJy = \frac{m_0 (r^2 - x^2)}{2} + \frac{p_0 (x^4 - r^4)}{64} + \theta p_0 \left\{ \frac{r^5 - x^5}{25 \cdot 9 \cdot r} \right\}.$$

Fig. 5.



Für freie Auflagerung wird:

$$m_0 = \frac{3 p_0 r^2}{16} - \frac{4 \theta p_0 r^2}{45},$$

während allgemein, bei elastischer Bindung $\frac{EJ}{r} \varphi = -\lambda m$, sich der allgemeine Wert ergibt:

$$m_0 = p_0 r^2 \left\{ \frac{1 + 3\lambda}{16(1+\lambda)} - \frac{\theta(1 + 4\lambda)}{45(1+\lambda)} \right\}.$$

5) *Parabolische Belastung.*

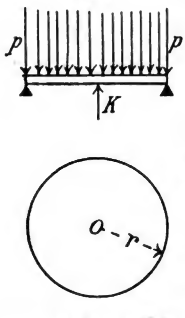
Sei, Fig. 5, $p = p_0 \left(1 \mp \theta \frac{x^2}{r^2}\right)$, dann gilt die Differentialgleichung:

$$EJ \left\{ x \frac{d^3 y}{d x^3} + \frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{1}{x} \frac{d y}{d x} \right\} = p_0 \left\{ \frac{x^2}{2} \mp \theta \frac{x^4}{4 r^2} \right\}$$

mit der Integrallösung:

$$EJy = \frac{m_0 (r^2 - x^2)}{2} + \frac{p_0 (x^4 - r^4)}{64} - \theta p_0 \frac{x^6 - r^6}{16 \cdot 36 \cdot r^2}$$

Fig. 6.



und mit dem allgemeinen Werte m_0:

$$m_0(1 + \lambda) = p_0 \frac{(1 + 3\lambda) r^2}{16} \mp \theta \frac{p_0 (1 + 5\lambda) r^2}{96}.$$

6) *Der Scheibenträger mit Mittelstützung.*

Sei der Scheibenträger der Fig. 6 gleichmäßig mit p belastet und im Mittelpunkt O durch die Kraft $K = \psi y_0$ des elastischen Auftriebes einer Mittelstützung gestützt, so geht die Differentialgleichung:

$$EJ \left\{ x \frac{d^3 y}{d x^3} + \frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{1}{x} \frac{d y}{d x} \right\} = \frac{Q}{\pi 2}$$

über in die Gleichung:

$$EJ \left\{ x \frac{d^3 y}{d x^3} + \frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{1}{x} \frac{d y}{d x} \right\} = \frac{p x^2}{2} - \frac{K}{2\pi} = \frac{p x^2}{2} - \frac{\psi y_0}{2\pi}$$

mit der Integrallösung:

$$EJy = EJy_0 - \frac{w x^2}{2} + \frac{p x^4}{64} - \frac{\psi y_0 . x^2 l \cdot x}{8\pi}$$

oder, weil $y = 0$ für $x = r$;

$$EJy = \frac{w(r^2 - x^2)}{2} + \frac{p(x^4 - r^4)}{64} + \frac{\psi y_0}{8\pi} \{ r^2 l r - x^2 l \cdot x \}.$$

Für $y = y_0$ ist $x = 0$ und mithin:

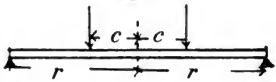
$$y_0 \left\{ \frac{\psi l . r}{4\pi} - \frac{2EJ}{r^2} \right\} + m_0 = \frac{pr^2}{32}.$$

Eine zweite Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten y_0, oder $K = \psi y_0$, und w wird gefunden durch die Bedingung des Verhaltens des innern Biegungsmomentes am Rande.

Bei freier Lagerung ist dieses Moment gleich 0 und mithin:

$$\frac{\psi y_0 (3 + 2lr)}{8\pi} + w = \frac{3pr^2}{16},$$

Fig. 7.



woraus folgt:

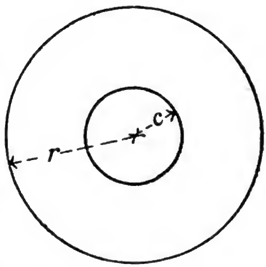
$$\psi y_0 \left\{ \frac{3}{8\pi} + \frac{2EJ}{\psi r^2} \right\} = \frac{5pr^2}{32}.$$

Für $\psi = \infty$, $y_0 = 0$, $\psi y_0 = K$ erhalten wir feste Stützung mit den Werten:

$$K = \frac{5pr^2\pi}{12}$$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3p(x^2 - r^2)}{16} + \frac{K}{4\pi}\{lr - lx\}$$

$$= \frac{3p(x^2 - r^2)}{16} + \frac{5pr^2}{48}\{lr - lx\}.$$



Schreiben wir der in Wirklichkeit nicht als mathematische Punktlast auftretenden Stützung den Wirkungskreis c zu, so erhalten wir:

$$m_c = -EJ\frac{d^2y}{dx^2_{x=c}} = \frac{3p(r^2 - c^2)}{16} - \frac{5pr^2}{48} l \cdot \left(\frac{r}{c}\right).$$

7) *Ringlast.*

Sei, Fig. 7, die Gesamtlast P gleichmäßig im Ringe des Halbmessers c verteilt, dann gilt für den Innenkreis, also für Werte $x = 0$ bis $x = c$ die Differentialgleichung:

(I) $$EJ\left\{x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right\} = 0$$

mit der Integrallösung:

$$EJy = EJy_0 - m_0\frac{x^2}{2}.$$

Im Außenring, also für Werte $x = c$ bis $x = r$ gilt die Differentialgleichung

(II) $$EJ\left\{x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{P}{2\pi}$$

mit der allgemeinen Integrallösung:

$$EJy = A_0 + A_1 l \cdot x + A_2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{P}{8\pi} \cdot x_2 lx,$$

woraus durch Ableitung folgt:

$$EJ\frac{dy}{dx} = \frac{A_1}{x} + A_2 x + \frac{P}{8\pi}\{2xlx + x\}$$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{A_1}{x^2} + A_2 + \frac{P}{8\pi}\{3 + 2lx\}.$$

Für $x = c$ ist

$$\frac{A_1}{c^2} + A_2 + \frac{P}{8\pi}\cdot\{2l\cdot c + 1\} = -m_0$$

$$-\frac{A_1}{c^2} + A_2 + \frac{P}{8\pi}\{2lc + 3\} = -m_0.$$

Durch Zusammenzählen ergibt sich:

$$A_2 + \frac{P}{4\pi}\{l\cdot c + 1\} = -m_0,$$

durch Abziehen:

$$A_1 = \frac{P\cdot c^2}{8\pi}.$$

Bei freier Auflagerung gilt ferner die Gleichung:

$$0 = -\frac{A_1}{r^2} + A_2 + \frac{P}{8\pi}(3 + 2lr)$$

$$A_2 = \frac{P}{8\pi}\left(\frac{c^2}{r^2} - 3 - 2lr\right)$$

und mithin ergibt sich, da $y = 0$ für $x = r$, für Strecke II die Gleichung der Durchbiegung:

$$EJy = \frac{P}{8\pi}\left\{(c^2 + x^2)l\cdot\frac{x}{r} + \left(\frac{r^2 - x^2}{2}\right)\left(3 - \frac{c^2}{r^2}\right)\right\},$$

aus welcher beispielsweise die Gleichung des Biegungsmomentes folgt:

$$-m_0 = EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{8\pi}\left\{2l\cdot\frac{x}{r} + c^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right)\right\}.$$

8) *Der Scheibenträger mit nach der Hyperbel anwachsendem Trägheitsmoment.*

Ist die Höhe h_x der tragenden Scheibe veränderlich nach dem Gesetze $h_x = h\sqrt[3]{\frac{r}{x}}$, so wächst das Trägheitsmoment nach dem Gesetze $J_x = J\cdot\frac{r}{x}$, wobei h, J die festen Werte des Randes bedeuten, und die allgemeine Differentialgleichung der Verbiegung nimmt für diesen Fall die Form an:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2\pi EJr}.$$

Weil ein Einzelwert $y = x^n$ als Wert der linken Seite dieser Gleichung den Ausdruck liefert:

$$n(n^2 - 3n + 1)x^{n-3} = n\left(n - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(n - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)x^{n-3},$$

so werden die drei willkürlichen Integrationsfestwerte, welche der Lösung der Gleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx} = 0$ entsprechen, gegeben in dem Ausdruck:

$$y = A_0 + A_1 x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + A_2 x^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

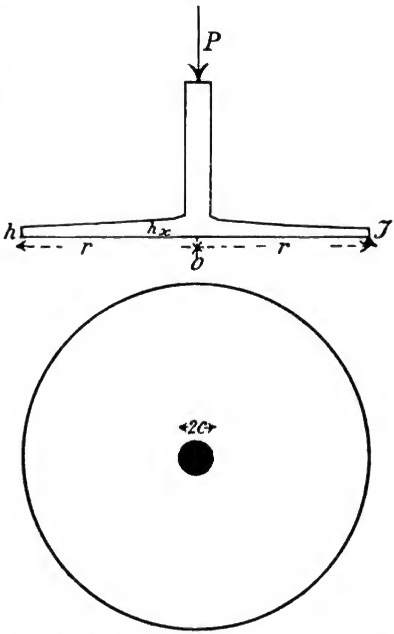
Ist nun, Fig. 8, der die Last P in O übertragende Pfeiler des Halbmessers c mit der Kreisscheibe aus einem Guß gefertigt, dann würde auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = c$ mit einem konstanten, in bezug auf die übrigen Werte des Trägheitsmomentes sprungweise mächtig angewachsenem Werte des Trägheitsmomentes zu rechnen sein. Der Einfachheit der Darstellung zuliebe wird man es jedoch vorziehen, in solchem Falle stetig nach dem einfachen Gesetze der Hyperbel durchzurechnen von $x = 0$ bis $x = r$ und erhält für $P = Q =$ unverändert aus der Differentialgleichung:

$$EJ\left\{\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{P}{2\pi r}$$

das allgemeine Integral:

$$EJy = A_0 + A_1 x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + A_2 x^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{P}{6\pi r} x^3.$$

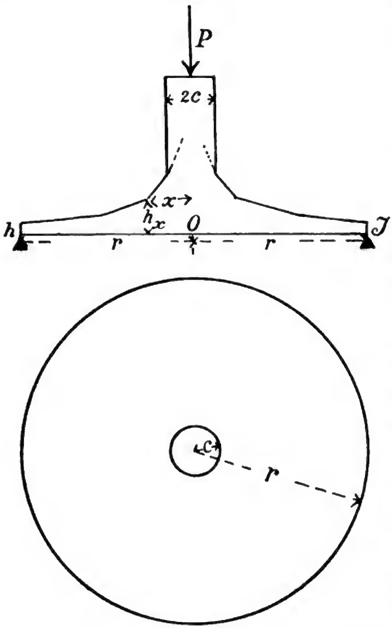
Fig. 8.



Weil $\frac{dy}{dx} = 0$ ist für $x = 0$, so ist $A_1 = 0$ zu setzen und man erhält für freie Auflagerung des Randes die Gleichung der elastischen Verbiegung:

$$EJy = \frac{P}{\pi}\left\{\frac{r^2 - r^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \cdot x^{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}}{2+\sqrt{5}} + \frac{x^3 - r^3}{6r}\right\},$$

Fig. 9.



aus welcher sich beispielsweise der Wert des Biegungsmomentes m ergibt

$$-EJ_x\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{r}{x}\right)EJ\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= m = \frac{P}{\pi}\left\{\left(\frac{r}{x}\right)^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} - 1\right\}$$

$$m_c = \frac{P}{\pi}\left\{\left(\frac{r}{c}\right)^{0,382} - 1\right\}.$$

9) *Der Scheibenträger mit nach der Hyperbel wachsender Höhe.*

Ist Fig. 9 $h_x = h\left(\frac{r}{x}\right)$, so ist $J_x = J\frac{r^3}{x^3}$ und man erhält aus der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{x^2}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{2}{x^3}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x^4}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2\pi EJr^3},$$

weil ein Sonderwert $y = x^n$ als Wert der linken Seite dieser Differentialgleichung den Ausdruck liefert:

$$n(n^2 - 5n + 3)x^{n-5} = (n-0)\left(n - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(n - \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)x^{n-5},$$

das allgemeine Integral:

$$EJy = A_0 + A_1 x^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}} + A_2 x^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}} + \frac{Px^5}{2\pi r^3\cdot 5\cdot 3},$$

woraus für $A_1 = 0$ und für den Fall freier Auflagerung des Randes die Gleichung der elastischen Verbiegung sich ergibt:

$$EJy = \frac{P}{\pi}\left\{\frac{r^2 - r^{\frac{-(1+\sqrt{13})}{2}}\cdot x^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}}{10,5 + 3\sqrt{13}} + \frac{x^5 - r^5}{30r^3}\right\}$$

$$m = \frac{2P}{3\pi}\left\{\left(\frac{r}{x}\right)^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}} - 1\right\}.$$

Zur Anwendung der Zufallskriterien.

Von Otto Meissner in Potsdam.

Die Anwendung der Zufallskriterien[1]) auf die Fehler einer Beobachtungsreihe oder auf eine andere zu untersuchende Reihe von Zahlenwerten, gibt zwar keinen *entscheidenden* Aufschluß über das Vorhandensein systematischer Fehler, wohl aber Anhaltspunkte über die Wahrscheinlichkeit von systematischen Einflüssen. Man darf deshalb den Wert derartiger Kriterien *im Einzelfalle* nicht überschätzen. Wenn auch mit 90% Wahrscheinlichkeit eine systematische Fehlerursache angezeigt wird, so kann man daraus doch noch nicht schließen, daß die gerade vorliegende Beobachtungsreihe *tatsächlich* solchen Fehlereinflüssen unterliegt. Das wird wohl nicht immer völlig nach Gebühr gewürdigt.

Systematische Fehler, z. B. ein bei Reduktion von Beobachtungen nicht eingeführter, aber in merklicher Größe vorhandener Temperaturkoeffizient, werden im allgemeinen auch *periodisch* auftreten, d. h. bis zu einem Maximum wachsen und dann wieder abnehmen. Andernfalls sind sie eben von den zufälligen Fehlern nicht zu trennen, z. B. wenn im angeführten Falle die Temperatur stark, aber unregelmäßig geschwankt hat. Schließlich wirkt ja auch *jede* Fehlerursache systematisch, aber wenn sie unregelmäßig auftritt oder mit nach andern Gesetzen wirkenden Fehlerquellen von gleicher Größenordnung ist, so nehmen die von ihr hervorgerufenen Fehler den Charakter von „zufälligen" Fehlern an.

Die Zufallskriterien geben somit ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ob in einer gegebenen unregelmäßigen Reihe *Periodizität* vorhanden ist. (Einer regelmäßigen Reihe sieht man die Periodizität ohne weiteres an). Es kann jedoch eine kritiklose Anwendung der Zufallskriterien unter Umständen zu Irrtümern führen. — Wenn eine Reihe periodisch sein soll, so muß diese Periode sich doch auch zeigen, wenn man nur einen *Teil*, sagen wir die Hälfte der Reihe, benutzt. Denn

1) Vgl. Helmert, Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen; Sitz.-Ber. der math.-phys. Klasse der Berl. Akad. der Wissensch. v. 25. Mai 1905.

ein periodisches Glied kann man in erster Annäherung immer durch ein Sinusglied darstellen. Die Zufallskriterien müßten demnach, wenn sie für die *ganze Reihe* Periodizität wahrscheinlich machen, dies auch für einen herausgegriffenen *Bruchteil* der Reihe tun. Ein einfaches Beispiel zeigt, daß dies *nicht immer der Fall* zu sein braucht.

Die Reihe laute: $a, a \ldots \left(\frac{n}{2} \text{ mal}\right), a + 2k, a + 2k \ldots$ (gleichfalls $\frac{n}{2}$ mal). Es werde auf sie das Abbesche Kriterium angewandt. Bezeichnet man die Fehler mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ usw. und setzt $A = [\varepsilon_\nu^2]$, $B = [(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1})^2]$, $C = \frac{1}{\sqrt{n}}[\varepsilon_\nu^2]$, so lautet das Abbesche Kriterium

$$A - \frac{B}{2} = O \text{ (mit dem mittleren Fehler } C \text{ [Helmert a. a. O.])}.$$

Da das arithmetische Mittel der Reihe, bei der alle Glieder gleiches Gewicht haben sollen, $= a + k$ ist, ist

$$A = nk^2, \qquad B = 8k^2,$$
$$A - \frac{B}{2} = (n-4)k^2, \qquad C = \sqrt{n}\,k^2.$$

Für Werte von $n > 9$ ist stets $A - \frac{B}{2} > C$, und der Unterschied wächst mit wachsendem n immer mehr. Für $n = 36$ z. B. ist $A - \frac{B}{2} = 32k^2$, C nur $= 6k^2$. Man würde hieraus also mit *großer Wahrscheinlichkeit* auf das Vorhandensein einer Periode schließen. Gleichwohl wird man eine derartige Reihe doch kaum als *periodisch* bezeichnen. In der Tat, wendet man etwa auf die erste Hälfte die Kriterien an, so wird $A = 0$ und $B = 0$, d. h. es ist *keine* Periode da, was man natürlich bei dieser *idealisierten* Reihe sofort sieht. In Wirklichkeit kommen zwar *derartige* Reihen selbstverständlich *nicht* vor, vielmehr sind stets noch *zufällige* Fehler da, die ein Hin- und Herschwanken der Werte verursachen. Wendet man nun auf derartige Reihen ein Zufallskriterium wie das Abbesche an, so wird eine Periodizität vorgetäuscht, die nicht vorhanden ist.

Als Beispiele mögen zwei Tabellen dienen, die die *stündliche* Verteilung *von Menschen gefühlter Erdbeben* angeben, und zwar enthält I. die in der Schweiz von 1880 bis 1891 gefühlten Beben, II. die in Italien und den Alpengebieten vom X 1900—VII 1905 gefühlten Bodenbewegungen. Beide Male erhält man eine *große* Wahrscheinlichkeit *für* Stattfinden einer Periode, wenn man das Abbesche Kriterium auf den *ganzen Tag* anwendet, eine *sehr kleine*, wenn man Tag und Nacht gesondert behandelt.

I. h	Bebenzahl	II. h	Bebenzahl
0	43	0	56
1	39	1	54
2	44	2	75
3	48	3	59
4	46	4	54
5	41	5	57
6	27	6	44
7	21	7	39
8	11	8	41
9	10	9	45
10	11	10	47
11	19	11	36
12	10	12	41
13	10	13	41
14	11	14	40
15	9*	15	32
16	11	16	32
17	20	17	34
18	15	18	27*
19	13	19	38
20	19	20	49
21	37	21	36
22	33	22	52
23	37	23	56
Summe	585	Summe	1085

Dies geht klar aus folgender Übersicht hervor:

		A	B	$A - \frac{B}{2}$	C
I. Schweizer Beben	0^h—23^h	4366	1372	+ 3680	892
	6^h—20^h	148	270	+ 13	40
	21^h— 5^h	158	178	+ 69	56
II. Ital. Beben	0^h—23^h	2817	1900	+ 1867	546
	6^h—21^h	524	788	+ 130	131
	22^h— 5^h	367	764	— 15	130

In beiden Fällen ist also während der Nacht und während des Tages, d. h. der hellen Tageszeit, *keine* — oder so gut wie keine — Periodizität erkennbar. Dagegen ist die Anzahl der Beben in den Nachtstunden größer als in den Tagesstunden, was zumal bei den in

der Schweiz gefühlten Beben, weniger bei den italienischen, hervortritt. Die Ursache kann nur eine *subjektive* sein: im Tageslärm *überhört* man leichter schwächere Beben oder hält sie für Wagengerassel und dadurch bedingte Erschütterungen. In der Nacht *verschläft* zwar wohl mancher ein leichtes Beben, wer aber wacht — und meistens werden in der betreffenden Gegend immer wenigstens ein paar Leute wachen — fühlt in der Stille der Nacht bei horizontaler Lage auch ganz leichte Erschütterungen. Daß in Italien auch am Tage relativ viele Beben gefühlt werden, mag daran liegen, daß die Erschütterungen meist stärker sind. Auch wird die Bevölkerung oft, zumal nach Katastrophen, gewissermaßen nervös und achtet auf die leisesten Stöße; es ist durchaus nicht immer der Fall, daß sie sich daran gewöhnt und schwache Beben gar nicht weiter beachtet.

Jedenfalls scheinen mir diese Beispiele geeignet, nachzuweisen, daß man gut tut, die Zufallskriterien außer auf die ganze Reihe der zu untersuchenden Zahlenreihen auch auf Teilreihen anzuwenden. Erhält man dabei sehr verschiedene Wahrscheinlichkeiten für das Vorhandensein einer Periodizität, so ist diese mehr als fraglich und eine *weitere* Untersuchung nötig, deren Einzelheiten sich je nach dem Material werden zu richten haben.

Potsdam, 24. April 1907.

Die sogenannte Reaktion der ausströmenden Flüssigkeiten.[1]

Von Geh. Baurat Pfarr, Professor an der Technischen Hochschule in Darmstadt.

Die Ausflußöffnung f_2 des runden Gefäßes mit gerader senkrechter Achse in Fig. 1 sei vorerst geschlossen und das Gefäß bis zur Höhe h_r mit Flüssigkeit gefüllt. Vom Eigengewicht des Gefäßes abgesehen, haben in diesem Zustand die Tragstützen ein Gewicht G gleich dem des Flüssigkeitsinhaltes zu tragen.

Wird der Ausflußquerschnitt f_2 freigegeben und das Gefäß dabei derart nachgefüllt, daß es auch dann noch die Füllungshöhe h_r beibehält, so findet erfahrungsgemäß eine Abnahme der Stützenbelastung statt. Der Verringerungsbetrag R, die für die Beschleunigung der

1) Es handelt sich nicht um neue Tatsachen; immerhin glaube ich, daß die hier entwickelte, meines Wissens noch nicht eingehend dargelegte Anschauung zur Klärung des Begriffs der sog. Reaktionskräfte beitragen dürfte.

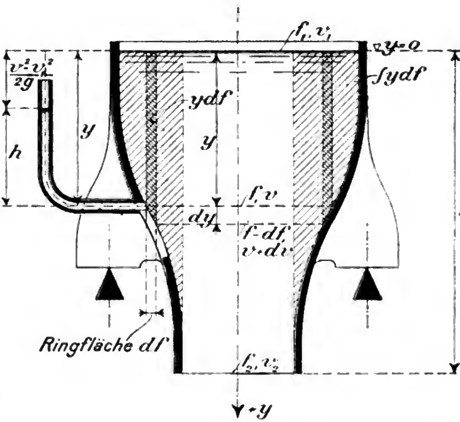
durchfließenden Flüssigkeit verwendete Kraft, stellt sich in bekannter Berechnungsweise auf

$$(1) \qquad R = \frac{q \cdot \gamma}{g}(v_2 - v_1)(kg),$$

worin q das sekundlich das Gefäß durchströmende Flüssigkeitsvolumen, γ das Gewicht der Volumeinheit, v_2 die Ausflußgeschwindigkeit und v_1 die Geschwindigkeit darstellt, mit welcher das nachfüllende Wasser drucklos den Einfüllquerschnitt f_1 in seiner ganzen Ausdehnung durcheilt.

Die Stützenbelastung hat bei geöffnetem Ausfluß nur noch den Betrag $P = G - R$ und die Größe R wird als Reaktionskraft der ausströmenden Flüssigkeit definiert.

Fig. 1.



Solange der Querschnitt f_2 verschlossen ist, herrschen in der ruhenden Flüssigkeit statische Einheitsdrücke, proportional der Tiefe y unter dem Flüssigkeitsspiegel zunehmend, die sich als entsprechende Normalpressungen auf die Gefäßwände äußern; die Summe der vertikal abwärts gerichteten Komponenten dieser Drücke auf Wände und Bodenverschluß entspricht dem Gewicht des Gefäßinhaltes.

Nach dem Öffnen von f_2 und bei eingetretenem Beharrungszustand haben sich die Einheitsdrücke im Innern der Flüssigkeit, also auch die Normaldrücke gegen die Gefäßwandungen, auf bestimmte Beträge vermindert, weil den gegen die Ausflußöffnung hin abnehmenden Querschnittgrößen folgend, die Umsetzung der Druckhöhen in Geschwindigkeit vor sich geht.

Die als Reaktion des ausfließenden Wassers bezeichnete anscheinende Kraftäußerung ist nichts weiter als die Folge des Nachlassens dieser statischen Normaldrücke gegen die Gefäßwände. Der Betrag der Reaktionskraft nach Gl. 1 läßt sich nämlich im Einzelfalle ohne weiteres zahlenmäßig aus

dem Wegfallen des Druckes auf die nunmehr freigegebene Bodenfläche f_2 und aus dem Betrag der Verminderung in den vertikal abwärts gerichteten Komponenten der Wanddrücke feststellen. Aber auch in ganz allgemeiner Weise kann diese Berechnung als gültig bewiesen werden; es ist nur die Differenz zwischen den Vertikaldrücken auf die Gefäßwände für das unten verschlossene (G) und das geöffnete Gefäß (P) zu bestimmen.

Unten geschlossenes Gefäß: Tragstützenbelastung G gleich dem Gewicht des ruhenden Flüssigkeitsinhaltes.

Wir denken uns den Gefäßinhalt in zwei Teile zerlegt, in den über f_2 Fig. 1 stehenden Zylinder vom Rauminhalt $f_2 \cdot h_r$ und den diesen umschließenden Hohlraum bis zur Gefäßwand, mit dem Rauminhalt im Betrage

$$\int_{y=0}^{y=h_r} y \cdot df,$$

worin y den Abstand vom oberen Flüssigkeitsspiegel, df die Horizontalprojektion der Ringfläche des Gefäßes zwischen den Tiefen y und $y+dy$ liegend, bedeutet. Wie sich zeigen wird, ist es für den allgemeinen Nachweis nicht nötig, daß die Beziehung zwischen y und dem zugehörigen df, d. h. der Verlauf der Gefäßform, überhaupt bekannt sei.

Das Gewicht des Gefäßinhaltes ist dann allgemein anzuschreiben als:

$$G = f_2 \cdot h_r \cdot \gamma + \gamma \cdot \int_{y=0}^{y=h_r} y \cdot df. \tag{2}$$

Der erste Posten des Gefäßinhaltes kann in einfacher Weise durch die Geschwindigkeiten ausgedrückt werden, wie sie sich nachher beim geöffneten und dauernd nachgefüllten Gefäß einstellen werden. Hierzu ist nur nötig, die Beziehung aufzustellen, wie sie beim durchströmten Gefäß von gegebenen Endabmessungen f_1 und f_2 zwischen v_1, v_2 und h_r besteht. Für ideelle Verhältnisse, Abwesenheit aller Reibungs- und Wirbelverluste gilt bekanntlich

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = h_r \tag{3}$$

und außerdem kann geschrieben werden

$$f_2 = \frac{q}{v_2}.$$

Nach Einsetzen in Gl. 2 erhalten wir damit als Belastung der Tragstützen bei geschlossenem Auslauf

$$G = \frac{q \cdot \gamma}{v_2} \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \gamma \cdot \int_0^{h_r} y \cdot df \tag{4}$$

Gefäß geöffnet, stetiges Nachfüllen. Die Öffnung f_2 ist freigegeben, also ist vor allem der vorher auf den Verschluß wirkende Bodendruck $f_2 \cdot h_r \cdot \gamma$ ganz weggefallen, mithin nicht mehr in Rechnung zu stellen.

Die zuerst durch die Tiefe y gegeben gewesene Einheitspressung (Druckhöhe y) *an der Gefäßwand* vermindert sich, der nunmehr an dieser Stelle herrschenden Geschwindigkeit v entsprechend, in bekannter Weise gemäß der Bezeichnung in Fig. 1 auf die Druckhöhe von ideell

$$h = y - \frac{v^2 - v_1^2}{2g}.$$

Nach abwärts äußert sich auf die Ringfläche df nur noch der Druck $h \cdot df \cdot \gamma$ und die Summe der abwärts gehenden Achsialdrucke, die Tragstützenbelastung des Betriebes, stellt sich demgemäß auf

$$(5) \qquad P = \gamma \cdot \int_0^{h_r} h \cdot df = \gamma \cdot \int_0^{h_r} y \cdot df - \gamma \cdot \int_0^{h_r} \frac{v^2 - v_1^2}{2g} \cdot df.$$

Für den Zwischenquerschnitt f und die zugehörige Geschwindigkeit v besteht die ganz allgemeine Beziehung:

$$f \cdot v = f_1 \cdot v_1 = q = \text{Konst.},$$

mithin ergibt sich $f = \frac{q}{v}$, wobei es gleichgültig ist, ob f als ebene oder als irgendwie gewölbte Querschnittsfläche aufgefaßt werden soll; ferner ist

$$f \cdot dv + v \cdot df = 0,$$

woraus

$$df = -f \cdot \frac{dv}{v} = -q \cdot \frac{dv}{v^2}.$$

Als Beziehung für die Tragstützenbelastung bei geöffnetem Gefäß ergibt sich dann, weil df in sich gegenüber dv negativ ist:

$$P = \gamma \cdot \int_0^{h_r} y \cdot df - q \cdot \gamma \int_{v_1}^{v_2} \frac{v^2 - v_1^2}{2g} \cdot \frac{dv}{v^2}.$$

Nach Auflösen des zweiten Integrals findet sich die (gegenüber G verminderte) Tragstützenbelastung P zu:

$$(6) \qquad P = \gamma \cdot \int_0^{h_r} y \cdot df - \frac{q \cdot \gamma}{v_2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g}.$$

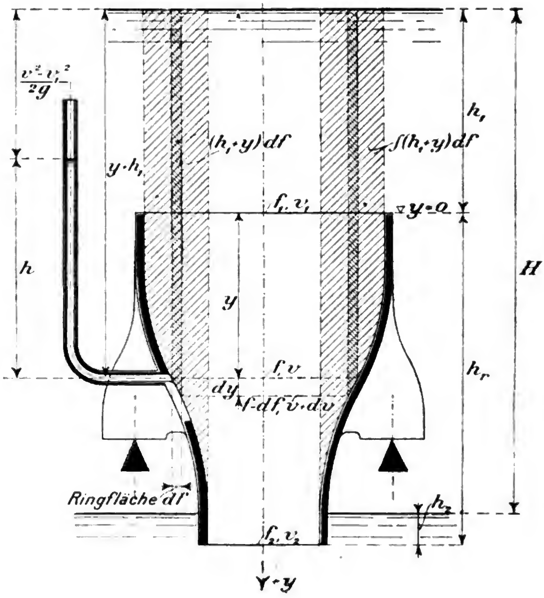
Die Verminderung der Tragstützenbelastung von G auf P berechnet sich dann auf Grund der Abnahme der Gefäßwanddrücke in achsialer Richtung aus Gleichung 4 und 6 zu

$$G - P = \frac{q \cdot \gamma}{v_2} \left\{ \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} \right\} = \frac{q \cdot \gamma}{g}(v_2 - v_1),$$

genau entsprechend der Reaktionskraft R nach Gl. 1.

Für das freie Ausströmen einer Flüssigkeit aus einem Gefäß mit gerader senkrechter Achse ist also das Auftreten der sogenannten Reaktionskraft einfach zu erklären aus der Verminderung der hydrodynamischen gegenüber den hydrostatischen Druckhöhen gegen die Gefäßwände, speziell gegen die Vertikalprojektionen der einzelnen Ringflächen *df*. Die Verminderung von *G* auf *P* wird hie und da, fälschlich, der

Fig. 2.



Wirkung einer Gegenkraft zugeschrieben, während es sich gegenüber dem Ruhezustand tatsächlich nur um das Nachlassen der vom Wasser gegen die Gefäßwände geäußerten Druckkräfte handelt.

Aber auch für jede andere Art der Wasserzu- und -Ableitung gilt die gleiche Erklärung, beispielsweise für das unter Druck h_1 nachgefüllte und gegen die Druckhöhe h_2 ausgießende Gefäß von der Eigenhöhe h_r, Fig. 2, wie nachstehend erläutert.

Unten geschlossenes Gefäß. Hier stellt sich bei gleicher Teilung

des Gefäßraumes wie vorher die Tragstützenbelastung ein im Betrage ähnlich Gl. 2

$$G = f_2(h_1 + h_r) \cdot \gamma + \gamma \cdot \int_0^{h_r} (h_1 + y) \cdot df - f_2 \cdot h_2 \cdot \gamma,$$

oder nach Fig. 2

$$G = f_2 \cdot H \cdot \gamma + \gamma \cdot \int_0^{h_r} (h_1 + y) \cdot df.$$

Hier ist es erforderlich, H durch v_2 und v_1 auszudrücken; für das Durchfließen des Gefäßes gilt, analog Gl. 3, für ideelle Verhältnisse:

$$(7) \qquad \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = h_1 + h_r - h_2 = H,$$

sodaß aus Gl. 7 mit $f_2 = \frac{q}{v_2}$, ähnlich Gl. 4, als Tragstützenbelastung für das Gefäß mit geschlossenem Auslauf folgt

$$(8) \qquad G = \frac{q \cdot \gamma}{v_2} \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \gamma \cdot \int_0^{h_r} (h_1 + y) \cdot df \cdot$$

Gefäß geöffnet, stetiges Nachfüllen. Vor allem entfällt der vorher auf den Bodenverschluß gerichtet gewesene resultierende Druck $f_2 \cdot H \cdot \gamma$, und an die Stelle der ruhenden Druckhöhe $h_1 + y$ tritt laut Fig. 2 bei ideellem Betrieb

$$h = h_1 + y - \frac{v^2 - v_1^2}{2g}.$$

Der auf die horizontale Ringflächenprojektion df entfallende Druck $h \cdot df \cdot \gamma$ ist dem eben genannten Werte entsprechend anzusetzen, also beträgt die Summe der Drücke auf die Gefäßwände in senkrechter Richtung nach abwärts und bei geöffnetem Gefäß

$$(9) \qquad P = \gamma \cdot \int_{h_1}^{h_2} h \cdot df = \gamma \cdot \int_0^{h_r} (h_1 + y) \cdot df - \gamma \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{v^2 - v_1^2}{2g} \cdot df \cdot$$

Die zur Umformung der Gl. 5 verwendeten Beziehungen bilden hier die Gl. 9 um in

$$P = \gamma \cdot \int_0^{h_r} (h_1 + y) \cdot df - q \cdot \gamma \int_{v_1}^{v_2} \frac{v^2 - v_1^2}{2g} \cdot \frac{dv}{v^2}$$

und nach teilweiser Integration in

$$(10) \qquad P = \gamma \cdot \int_0^{h_r} (h_1 + y) \cdot df - \frac{q \cdot \gamma}{v_2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g}.$$

Hier ergibt sich die Verminderung der Tragstützenbelastung, auf Grund der Abnahme der Gefäßwanddrücke berechnet, mit Hilfe von Gl. 8 und 10 als

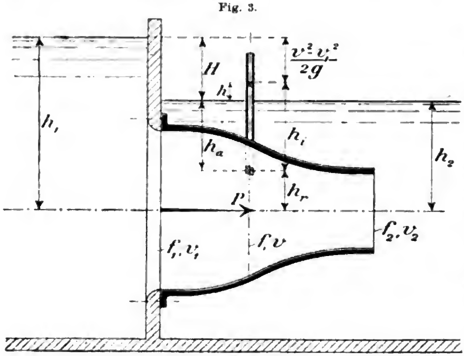
$$G - P = \frac{q \cdot \gamma}{v_2} \cdot \left\{ \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} \right\} = \frac{q \cdot \gamma}{g}(v_2 - v_1) = R,$$

gleich wie vorher.

Da in den beiden betrachteten Fällen die nicht integrierten Teilposten von G und P, welche von der Gefäßform (y und df) abhängen, für die Ermittlung von $G - P = R$ aus der Rechnung fallen, so ist erwiesen, daß die Art des Überganges zwischen den Querschnitten f_1 und f_2, also die Gefäßform, auch wenn R aus der Minderung des Druckes auf die Gefäßwandungen berechnet wird, keinen Einfluß auf die resultierende Größe von R ausüben kann.

Die von denselben Gesichtspunkten ausgehende Berechnung ergibt bei einem Gefäß mit gerader, wagrechter Achse Fig. 3 und 4 den gleichen Betrag des Kräfteunterschiedes $G - P = R$ der sogenannten Reaktionskraft in Richtung der Achse.

Fig. 3.



Natürlich ist im Falle der Fig. 3 die Resultierende der Betriebsdruckkräfte (P) von anderer Größe und Richtung als bei Fig. 4, doch liegt dies in der verschiedenen Anordnung begründet.

Bezeichnet G hier den in der Achsenrichtung, also diesmal horizontal, auf das Gefäß mit geschlossenem Austrittsquerschnitt f_2 wirkenden Druck der ruhenden Flüssigkeit, P denjenigen bei geöffnetem Austrittsquerschnitt, so ergibt sich für das ins Unterwasser getauchte Gefäß nach Fig. 3 (f_2 geschlossen).

$$G = f_1 \,.\, h_1 \cdot \gamma - f_1 \cdot h_2 \cdot \gamma = f_1 \cdot H \cdot \gamma$$

oder auch in bekannter Weise umgeformt

(11) $$G = \frac{q \cdot \gamma}{v_1} \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}, \text{ rechtsgehend.}$$

Bei freigegebenem Durchfluß steht auf einem über der wagrechten Gefäßachse liegenden, unendlich kleinen Stückchen der Gefäßwandung die Druckhöhe von innen her:

$$h_i = h_1 - h_r - \frac{v^2 - v_1^2}{2g} \quad \text{und von außen} \quad h_a = h_2 - h_r,$$

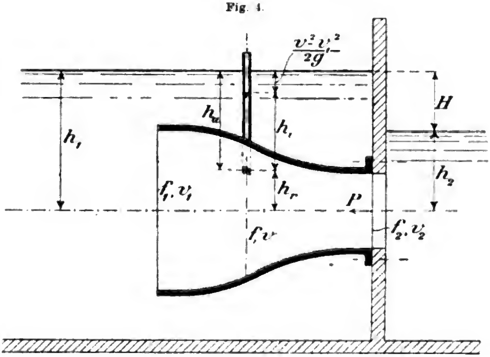
also ist die resultierende Druckhöhe

$$h_i - h_a = h = h_1 - h_2 - \frac{v^2 - v_1^2}{2g} = H - \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$$

von links nach rechts wirkend anzusehen. Der gesamte Axialdruck P stellt sich dar als

$$P = \gamma \cdot \int_{f_2}^{f_1} h \cdot df = \gamma \cdot \int_{f_2}^{f_1} H \cdot df - \gamma \cdot \int_{f_2}^{f_1} \frac{v^2 - v_1^2}{2g} \cdot df.$$

Fig. 4.



Durch Integration und Umformung wie vorher ergibt sich dann für das Gefäß nach Fig. 3

(12) $$P = \frac{q \cdot \gamma}{v_1} \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g}$$

rechtsgehend, und die Größe des Verminderungsbetrages (Reaktionskraft) aus Gl. 11 und 12

$$R = G - P = \frac{q \cdot \gamma}{g}(v_2 - v_1).$$

Für das im Oberwasser stehende Gefäß, Fig. 4, findet sich

$$G = f_2(h_1 - h_2) \cdot \gamma = f_2 \cdot H \cdot \gamma$$

oder auch

(13) $$G = \frac{q \cdot \gamma}{v_2} \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad \text{rechtsgehend.}$$

Das Gefäß nach Fig. 4 zeigt mit freiem Durchfluß in der Höhe h_r über der wagrechten Gefäßachse gegen die Gefäßwand von innen her die Druckhöhe $h_i = h_1 - h_r - \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$ und von außen her $h_a = h_1 - h_r$. Die resultierende Druckhöhe ist also

$$h_i - h_a = h = -\frac{v^2 - v_1^2}{2g}$$

(d. h. von rechts gegen links wirkend) und demgemäß wird hier

$$(14) \qquad P = -\gamma \cdot \int_{f_1}^{f_2} \frac{v^2 - v_1^2}{2g} \cdot df = -\frac{q \cdot \gamma}{v_2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g},$$

d. h. die Resultierende P der inneren und äußeren Wanddrücke geht hier im Gegensatz zu Fig. 3 der Fließrichtung entgegengesetzt, also links. Das Gefäß würde, wenn es nicht durch seine Schrauben an der Behälterwandung festgehalten wäre, infolge des äußeren Überdruckes auf seine Wandungen gegen das Oberwasser zurückgezogen werden.

Die Größe von R ergibt sich aber wie vorher auch zu

$$R = G - P = \frac{q \cdot \gamma}{g}(v_2 - v_1).$$

Für ein Gefäß mit gekrümmter Achse, d. h. mit beliebig zueinander geneigt stehendem Ein- und Ausflußquerschnitt ist die vorgeschilderte Anschauungs- und Berechnungsweise natürlich ebenfalls zutreffend, wie dies noch kurz an dem in Fig. 5 dargestellten Rohrkrümmer mit verengtem wagrechtem Ausfluß gezeigt werden soll.

Bei geschlossener Ausflußöffnung f_2 ist $G = 0$ in Richtung des Ausflusses, horizontal, verstanden.

Für das geöffnete Gefäß finden sich die in der Horizontalen wirkenden Kräfte wie folgt:

Der Rohrkrümmer habe durchweg gleichen Querschnitt, f_1, sodaß auch die mittlere Geschwindigkeit v_1 zwischen dessen Beginn und Ende gleich bleibt; die Ablenkung betrage 90°. Unter diesen Verhältnissen empfängt der Krümmer von dem durchströmenden Wasser Ablenkungsdrücke gegen die Außenwand gerichtet, deren Resultierende durch den Krümmungsmittelpunkt geht und den Ablenkungswinkel (hier 90°) halbiert. Die Komponenten dieser Resultierenden in wagrechter (linksgehend) und in senkrechter Richtung stellen sich nach bekannter Berechnungsweise auf je:

$$(15) \qquad P_1 = \frac{q \cdot \gamma}{g} \cdot v_1$$

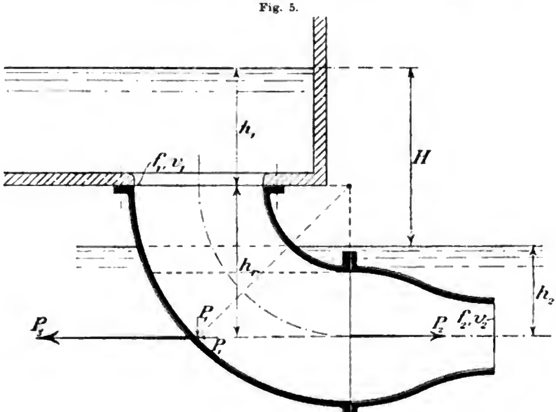
Die linksgehende Horizontalkomponente der Ablenkungsdrücke wird bei einem Rohrkrümmer, der ohne Verengung mit dem Querschnitt f_1 schon ausgießt, hier und da fälschlich auch als sogenannte Reaktionswirkung erklärt.

Über die eigentlichen in Frage kommenden Wasserdruckkräfte in wagrechter Richtung ist folgendes zu sagen: Die gesamte axiale Druckwirkung auf die Innen- und Außenwände des verengten Mundstückes ist oben nach Fig. 3 schon ermittelt als

(12) $$P_2 = \frac{q \cdot \gamma}{v_1} \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} \text{ rechtsgehend.}$$

Hierzu kommt dann noch auf die dem Krümmerende gegenüber liegende Projektion von f_1 (innere Krümmerwandung) in achsialer

Fig. 5.



Richtung der Druck $f_1(h_1 + h_r) \cdot \gamma$ linksgehend, und auf die Außenseite der Druck $f_1 \cdot h_2 \cdot \gamma$ in entgegengesetzter Richtung, zusammen also $f_1(h_1 + h_r - h_2) = f_1 \cdot H \cdot \gamma$ linksgehend. Dieser Betrag läßt sich, wie vorher, auch schreiben als

(11) $$P_3 = \frac{q \cdot \gamma}{v_1} \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}, \text{ linksgehend.}$$

So sehen wir drei Kräfte in der Horizontalen, die ihren Richtungen gemäß zusammengestellt, die Resultierende P liefern als:

$$P_2 - P_1 - P_3:$$

$$P = \frac{q \cdot \gamma}{v_1} \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} - \frac{q \cdot \gamma}{g} \cdot v_1 - \frac{q \cdot \gamma}{v_1} \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

woraus

$$P = -\frac{q \cdot \gamma}{g} \cdot v_2, \tag{16}$$

hier also ist P linksgehend. Die durch die Freigabe von f_2 und die innere Druckabnahme verringerte, aber immer noch rechtsgehende Druckkraft P_2 auf das Mündungsstück, Gl. 12, wird durch die überlegenen linksgehenden Kräfte, speziell durch die gegen die Innenwand des Krümmers tätige, aus der äußeren Niveaudifferenz H folgende Druckkraft $P_3 = f_1 \cdot H \cdot \gamma$ überwunden. Die relativ kleine Komponente des Ablenkungsdruckes kommt dann auch noch mit dazu.

Senkrecht nach abwärts haben die Befestigungschrauben des Krümmers mit verjüngtem Auslauf die Ablenkungskomponente $P_1 = \frac{q \cdot \gamma}{g} \cdot v_1$ dazu den Druck $f_1 \cdot H \cdot \gamma$ auf die Projektion des Eintrittsquerschnittes vertikal abwärts gegen die Krümmerwand auszuhalten.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Berechnung der sog. Reaktionskräfte an sich fast immer bequemer mittels der allgemein üblichen dynamischen Gleichungen geschehen wird, wenn auch das Wesen und die Äußerung dieser Kräfte auf der Verminderung der Gefäßwanddrücke beruht. Nur in Einzelfällen kann von der Feststellung der verminderten Wanddrücke nicht abgesehen werden, wie z. B. bei drehbaren Turbinenleitschaufeln, vgl. Pfarr: „Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb“, S. 348 u. f.

Aus den Vorlesungen Josef Petzvals über Ballistik.

Ein Beitrag zur Geschichte der Ballistik.

Nach Bruchstücken eines Manuskriptes und Vorlesungsheften zusammengestellt

von A. v. Obermayer in Wien.

(Mit einem Titelbild und 7 Abbildungen.)

Die Vorträge, welche Josef Petzval an der Wiener Universität über Mechanik zu halten pflegte, hat er zu Ende der sechziger und zu Anfang der siebziger Jahre des vorigen Jahrhunderts auch auf Ballistik ausgedehnt. Es mögen ihn dazu teils seine Beziehungen zu österreichischen Artillerieoffizieren, teils Versuche angeregt haben, welche er mit einem nach seiner Angabe konstruierten Gewehre anstellte.

Er legte seinen theoretischen Darlegungen das von Euler angegebene biquadratische Luftwiderstandsgesetz zugrunde, schrieb aber die Bestimmung der Konstanten desselben dem russischen Ballistiker General Majewski zu. Er beschränkte seine Entwicklungen auf flache Flugbahnen und leitete für diese, wie Feldmarschall-Leutnant Nic. Freiherr v. Wuich angibt, zum ersten Male die Kongruenz der Flugbahnen und die Zulässigkeit des Schwenkens der Bahnen ab. Die durch die Integration der Differentialgleichungen gewonnenen Resultate richtete er zur tabellarischen Berechnung ein, und schloß daran die Ermittlung der Aufsatzhöhen für verschiedene Wurfweiten. Diese Vorlesungen wurden mit Auseinandersetzungen über innere Ballistik abgeschlossen.

In dem von Dr. Erményi erworbenen schriftlichen Nachlasse von Petzval hat sich die Niederschrift eines Bruchstückes einer Einleitung zu den Vorträgen über Ballistik und die Ableitung sämtlicher Formeln, samt den früher angeführten Beweisen der Kongruenz der Flugbahnen und des Satzes vom Schwenken der Bahnen vorgefunden.

Mehrfachem Wunsche folgend habe ich es hiermit unternommen, diese, mir von Dr. Erményi überlassenen Bruchstücke nach stenographischen Aufzeichnungen aus dem Jahre 1869 zu ergänzen. Es sind mir dabei von Nutzen gewesen: Eine Tabelle, welche Petzval für den horizontalen Wurf im widerstehenden Mittel berechnet hatte und mir zur Abschrift überließ, dann eine von ihm angefertigte Zeichnung einiger Flugbahnen und der Aufsatzhöhen für einen Kugelstutzen.

Der auf die äußere Ballistik bezügliche Teil der Vorlesungen ist dabei ausführlich dargelegt; den auf die innere Ballistik bezüglichen Teil glaubte ich nur kurz skizzieren zu sollen. Petzval hatte denselben auch mehr vom praktischen Standpunkte aus behandelt. Die innere Ballistik befand sich zu jener Zeit überhaupt erst im Anfange ihrer Entwicklung. Die grundlegenden Versuche von Abel und Nobel über das Schießpulver waren erst 1868 begonnen, und die Methode zur Ermittlung der Vorgänge im Innern von Feuerrohren ist erst kürzlich in Angriff genommen worden.

Ein historisches Interesse glaubte ich daher hauptsächlich den Petzvalschen Entwicklungen über äußere Ballistik zuschreiben zu können, wenngleich seine Ansichten über innere Ballistik manches Originelle enthielten.

Einleitung.[1])

Das Problem des Widerstandes, den ein geworfener Körper in der Luft erleidet, ist ein sehr altes, und man suchte es so wie sich dies

1) Nach dem ersten Teile des vorerwähnten Petzvalschen Manuskriptes.

auch von selbst versteht anfänglich durch Betrachtungen populärer Natur zu lösen. Man sagte beiläufig: Dieser Widerstand kann nur abhängig sein von der Gestalt des bewegten Körpers, von dem Querschnitte, mit welchem derselbe die Luft durchschneidet, von der Geschwindigkeit seiner Bewegung und von den Eigenschaften des widerstehenden Mittels als da sind Dichte, Flüssigkeit usw. Verdoppelt man die Geschwindigkeit, so muß der bewegte Körper nicht nur die doppelte Masse Luft von ihrer Stelle verdrängen, sondern er muß dies auch mit doppelter Geschwindigkeit tun, wozu der vierfache Kraftaufwand erforderlich ist. Der Luftwiderstand ist daher, unter übrigens gleichen Umständen dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, kann also wiedergegeben werden durch eine Formel:

$$W = Afv^2,$$

allwo W der in Rede stehende Widerstand, v die Geschwindigkeit, f den Querschnitt bedeutet, mit welchem der Körper die Luft durchschneidet, A aber einen konstanten Koeffizienten vorstellt, der einerseits von der Gestalt des Körpers, andrerseits aber von der Beschaffenheit der Flüssigkeit abhängig ist, in der die Bewegung stattfindet. Diese Formel ist in der artilleristischen Praxis auf eine etwas zu harte Probe gestellt worden, und hat sich für große Geschwindigkeiten v nicht bewährt, indem man fand, daß der Luftwiderstand nicht wie das Quadrat der Geschwindigkeit, sondern viel rascher wachse. Piobert hat daher von den Experimenten Dr. Huttons Gebrauch machend, gefunden, daß wenn man der zweiten Potenz der Geschwindigkeit noch ein der dritten Potenz derselben proportionales Glied hinzufügt, eine Formel erhalten wird, welche die gesamten Ergebnisse dieser Experimente genau genug wiedergibt; die Formel nämlich:

$$W = 0 \cdot 030 fv^2(1 + \beta v)$$

die für Projektile von sphärischer Gestalt gültig ist. Didion hingegen vermeint für Körper von derselben sphärischen Gestalt die hiervon einigermaßen abweichende:

$$W = 0 \cdot 02 fv^2(\beta v)$$

setzen zu sollen. Beide Formeln sind demselben Übelstande unterworfen: Sie ändern nämlich den numerischen Wert, wenn v das Zeichen ändert. Dies ist sozusagen eine Blöße, die sich die Analysis nie gibt. Es wird mithin nie eine gründliche mathematische Theorie geben, die darauf zu führen vermag.

Dies ist vielleicht der Grund, der den russischen Offizier Majewski veranlaßte, nach eigenen sehr sorgfältigen Experimenten, angestellt

ebenfalls mit sphärischen Projektilen, folgende andere Formel aufzustellen:

$$W = 0 \cdot 012 f^2 v^2 \left(1 + \left(\frac{v}{200}\right)^2\right).$$

Endlich hat man es noch für gut befunden, die zweite Potenz der Geschwindigkeit ganz wegzulassen und den Luftwiderstand bloß der vierten Potenz proportional zu nehmen; also ein W wie

$$W = A f v^4$$

zu statuieren. Von den Urhebern aller dieser hypothetischen Formeln behauptet ein jeder: daß die seinige allen Anforderungen des Dienstes im ganzen Umfange der artilleristischen Praxis vollkommen entspreche. Woran auch innerhalb gewisser Grenzen, und bei dem geringen Grade der Genauigkeit, der sich auf diesem Felde erreichen läßt, kaum ein Zweifel obwalten dürfte; denn es tut dies beinahe jede Formel, ohne Ausnahme, und zwar um so genauer, eine je größere Anzahl zweckmäßig bestimmbarer Koeffizienten darin enthalten sind. Also den Anforderungen des Artilleriedienstes dürfte bereits vollkommen und mehrfach Genüge geleistet sein.

Betrachtet man hingegen die Angelegenheit vom wissenschaftlichen Standpunkte, so sieht man vorerst ohne Mühe und sehr klar ein, daß doch ein und derselbe Koeffizient: der der zweiten Potenz nämlich, nicht gleichzeitig alle möglichen Werte von Null an bis 0·030 annehmen kann, daß mithin von den angeführten Formeln entweder die Mehrzahl oder alle falsch sein müssen. Überhaupt ergibt sich aus mehrseitigen Erwägungen, daß das Problem des Luftwiderstands durch die bisherigen Bemühungen der Ballistiker ohngeachtet des bedeutenden Pulververbrauches nicht nur als nicht gelöst, sondern als noch nicht einmal in Angriff genommen zu betrachten ist. Man weiß nicht einmal, welche Eigenschaften der Luft und sonstigen physikalischen und mechanischen Faktoren das Zustandekommen dieses Widerstandes bedingen und noch viel weniger in welchem Maße.

Die weiter folgenden Aufzeichnungen beziehen sich, *nach allgemeinen Betrachtungen über die flüssigen Körper* auf die molekulare Konstitution der Materie und auf die Bedingungen der Stabilität. Da dieselben unvollendet abbrechen und dadurch eine Verbindung mit dem Probleme des Widerstandes gegen die Bewegung in flüssigen Körpern fehlt, sind dieselben hier nicht weiter mitgeteilt. Es ist, nach einer Bemerkung in den Vorträgen über innere Ballistik, zu vermuten, daß aus jenen Auseinandersetzungen der Schluß gezogen wurde, daß die Flüssigkeitsmoleküle sich in einem Gleichgewichte von außerordentlich geringer Stabili-

tät befinden, daß sich aber diese Definition doch nicht mathematisch ebensogut fassen läßt, wie etwa die Eigenschaft der Flüssigkeiten, den Druck nach allen Seiten hin gleichmäßig fortzupflanzen; daß man infolgedessen auf die Aufstellung empirischer Formeln angewiesen bleibt.

Der schiefe Wurf im widerstehenden Mittel.[1])

Das Widerstandsgesetz. Unter allen bisherigen Annahmen über das Gesetz des Widerstands, den die atmosphärische Luft einem geworfenen Körper entgegensetzt, ist wohl diejenige die naturgemäßeste, und mit der artilleristischen Erfahrung am meisten übereinstimmende, die den analytischen Ausdruck dieses Widerstandes W zusammenfügt aus zwei Gliedern, einem mit dem Quadrate und einem mit der 4. Potenz der Geschwindigkeit v, nach einer Formel von Euler wie

$$(1) \qquad W = Av^2\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right).$$

Nach den sorgfältigen Versuchen Majewskys sind allhier:

$$(2) \qquad A = 0 \cdot 012 \qquad a = 200$$

und für diese Koeffizientenwerte bedeutet W den Widerstand in Kilogrammen, den eine Kugel von einem m^2 Querschnitt, die mit der in Metern gegebenen Geschwindigkeit v in Bewegung gesetzt wird, in der Luft erleidet. Hatte die geworfene Kugel einen Halbmesser ϱ in Metern, so mußte man diesem Ausdruck den Faktor $\pi\varrho^2$ hinzufügen, wo $\pi = 3 \cdot 1415926$ ist. Für eine von der sphärischen verschiedene Gestalt des Projektiles erhalten die Koeffizienten A und a andere Werte. Der Faktor $\pi\varrho^2$ wird aber stets hinzugefügt und deutet den kreisförmigen Querschnitt des Projektiles an, mit welchem derselbe die Luft durchschneidet. Es besteht demnach für sphärische sowohl, wie auch für andere z. B. oblonge Projektile mit kreisförmigem Querschnitt ein Luftwiderstand W gegeben durch die Formel:

$$(3) \qquad W = \pi\varrho^2 Av^2\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)$$

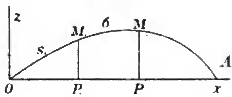
in Metern und Kilogrammen und dieser stellt eine Kraft dar, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, aber derselben entgegengesetzt ist.

Die Differentialgleichungen für den schiefen Wurf im widerstehenden Mittel. Unter Voraussetzung dieses Luftwiderstandsgesetzes suchen wir die Gesetze der Bewegung eines geworfenen Körpers, annehmend, daß

1) Nach dem zweiten Teile des Petzvalschen Manuskriptes, dieses durch Abbildungen ergänzt.

sonst außer der Schwere keine beschleunigende Kraft vorhanden sei, man mithin berechtigt ist, anzunehmen, die Bahn dieses Körpers liege in einer vertikalen Ebene, derselben, in welcher auch die anfängliche Bewegungsrichtung gelegen ist. Diese Vertikalebene wählen wir zur Koordinatenebene der xz und ziehen in derselben die Achse der x horizontal, die Achse der z vertikal, also mit der Richtung der Schwere parallel. Wir setzen ferner voraus, der Körper werde mit der Anfangsgeschwindigkeit c unter dem Winkel α mit der horizontalen Achse der x emporgeschleudert und beschreibe in der Zeit t den Bogen $OM = S$ (Abb. 1) der Kurve OMA, die seine Flugbahn genannt wird. Die als Funktionen von t betrachteten Koordinaten des erreichten Punktes M seien x und z, so sind die Kräfte, mit deren Hilfe die Strecke x in horizontaler und die Strecke z in vertikaler Richtung von einer Masse m beschrieben werden können, beziehlich

Fig. 1.



$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Andererseits aber sind es nur zwei Kräfte, die auf die Bewegung des Projektils Einfluß nehmen, nämlich:

1. der Luftwiderstand W, der im Punkte M mit der Tangente der Flugbahn zusammenfällt, also die folgenden zwei Komponenten bietet:

$$-W\frac{dx}{ds}, \qquad -W\frac{dz}{ds},$$

von welchen die erste horizontal, die zweite vertikal ist. Sie sind mit dem negativen Zeichen zu versehen, da sie der Richtung der positiven Koordinaten entgegenwirken. Die erste dieser Komponenten ist horizontal, die zweite vertikal. Hierzu kommt noch:

2. die Schwere, die den vertikalen Kräften beizuzählen und allhier durch das Gewicht in Kilogrammen des in der Luft gewogenen Körpers auszudrücken ist, weil auch W in diesem Gewichtsmaße gegeben ist. Nennen wir dieses Gewicht P, so ist dasselbe gleichfalls mit dem negativen Zeichen zu versehen.

Es ergeben sich hiernach die folgenden Differentialgleichungen der Bewegung:

$$(4) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -W\frac{dx}{ds}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = -W\frac{dz}{ds} - P.$$

Es frommt hier, die Masse m ebenfalls durch das Gewicht P auszudrücken, damit man in den Gleichungen lauter Größen habe, deren Umsetzung in Zahlen dem Rechner keine Verlegenheit bereitet. Zu

diesem Zwecke nennen wir δ den Gewichtsverlust, den das in der Luft gewogene Projektil erleidet und der dem Gewichte des verdrängten Luftvolumens gleichkommt, so daß $P+\delta$ das eigentliche Gewicht dieses Körpers im luftleeren Raume darstellt. Dasselbe ist ein Produkt aus der Masse m in die Beschleunigung der Schwere gegeben in Metern. Nennen wir dieselbe g, so ist $g = 9 \cdot 809$ und man hat:

$$P+\delta = mg, \qquad m = \frac{P+\delta}{g}.$$

Vermittels dieses Wertes eliminiert man m aus (4) und erhält:

$$(5) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gW}{P+\delta}\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{gW}{P+\delta}\frac{dz}{ds} - \frac{Pg}{P+\delta}.$$

Beweis der angenäherten Kongruenz der Bahnen; die Asymptoten. Bei jedem etwas komplizierteren Bewegungsprobleme tut man gut, den Differentialgleichungen als solchen bereits, und bevor man noch zu ihrer Integration schreitet, soviel von den Bewegungseigenschaften abzufragen, als sie zu verraten geneigt sind. Wir multiplizieren, diesen Zweck verfolgend, die erste der letztgewonnenen Gleichungen mit dz, die zweite mit dx und subtrahieren die erste von der zweiten:

$$(6) \qquad \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dt^2} = -\frac{Pg\,dx}{P+\varDelta}.$$

Die bekannte Formel für den Krümmungshalbmesser einer beliebigen Kurve, also auch der in Rede stehenden Flugbahn

$$r = \pm \frac{ds^3}{dx\,d^2z - dz\,d^2x}$$

geht vermöge der Gleichung (6) über in

$$(7) \qquad r = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\frac{Pg}{P+\delta}\frac{dx}{ds}} = \frac{v^2}{\frac{Pg}{P+\delta}\frac{dx}{ds}}.$$

Aus dieser Gleichung ist Folgendes zu erschließen:

1. Am Anfange der Bahn im Punkte O ist $v = c$, $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, mithin:

$$r = \frac{c^2(P+\delta)}{P\cdot g\cos\alpha}.$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird $r = \infty$, also die Bahn des vertikal geworfenen Körpers ist geradlinig. Für kleine Werte von α ist

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$

wenig von der Einheit verschieden und z. B. für $\alpha = \frac{1}{10}$, was beiläufig 6° entspricht, von derselben um weniger als $\frac{1}{200}$ abweichend. Man hat mithin für mäßige positive oder negative Werte von α in einem ziemlich beträchtlichen Spielraume

$$r = \frac{c^2(P + \delta)}{Pg}$$

oder, da δ gegen P sehr klein zu sein pflegt, sehr nahe

$$r = \frac{c^2}{g},$$

vom Richtungswinkel α ganz unabhängig und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional. Solange die Kurve ziemlich flach bleibt und in allen Punkten unter einem mäßigen Winkel gegen den Horizont geneigt, kann man auch von $\frac{dx}{ds}$ sagen, daß es von der Einheit nur um eine kleine Größe der zweiten Ordnung verschieden sei, man also in allen Punkten der Flugbahn nahezu

$$r = \frac{v^2}{g}$$

habe. Auch dieser Wert des Krümmungshalbmessers ist unabhängig vom Richtungswinkel α, weil es die Geschwindigkeit v für wenig gegen den Horizont geneigte Bahnen ist, wie später erhellen soll. *Da nun die Reihenfolge der Krümmungshalbmesser die Gestalt der Kurve bestimmt, so sind alle, mäßigen positiven und kleinen negativen Winkeln α entsprechenden Flugbahnen nahezu identisch dieselbe Kurve von verschiedener Lagerung.* Daher kommt es, daß der Schütze, wenn er einen über seinen Horizont etwas erhöhten oder unter denselben etwas vertieften Gegenstand treffen will, nicht anders zu zielen braucht, als wenn sich dieser Gegenstand in seinem Horizonte selbst befindet.

2. Man kann sich die Flugbahn beiderseits, nämlich von O nach rückwärts und von A nach vorwärts ins Unendliche ausgedehnt denken; so als unendliche Kurve betrachtet, hat sie zwei Asymptoten, zu jedem Ende eine, denn der Krümmungshalbmesser r in (7) wird zweimal unendlich, nämlich für

$$v = \infty \quad \text{und} \quad \frac{dx}{ds} = 0,$$

das eine Mal am einen Ende, das andere Mal am andern Ende der Bahn. Die zweite dieser Asymptoten ist vertikal gegen $dx = 0$. Die erste ist es nur bei parabolischer Bewegung und ohne Luftwiderstand, wie jedoch dieser letztere von Null verschieden ausfällt, neigt sich die Asymptote gegen die Achse der x immer mehr um einen Winkel, der auf theoretischem Wege aufgefunden werden kann.

Diese nicht unwichtigen Folgerungen sind noch ganz allgemein und von dem Widerstandsgesetze oder der Form der Funktion W unabhängig.

Die Integration der Differentialgleichungen. Zur Integration der Gleichungen soll auf die Form von W Rücksicht genommen werden und wir substituieren die Funktion (3) in die Gleichungen (5); diese geben:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{v^2}{h}\left(1+\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{v^2}{h}\left(1+\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{dz}{ds} - g', \end{aligned} \tag{9}$$

wobei der Kürze wegen

$$\frac{P+\delta}{0.012\pi\varrho^2 g} = h, \qquad \frac{Pg}{P+\delta} = g', \tag{10}$$

gesetzt wurde. Die Homogeneïtät der vorliegenden Differentialgleichungen verlangt, daß h ebenso wie g und g' eine Linie sei.

Offenbar ist es vor allem andern von Interesse, denjenigen Teil der Flugbahn kennen zu lernen, für welchen $\frac{dx}{ds}$ wenig von der Einheit verschieden ist. Dieser ist nämlich nur von der Geschwindigkeit des Projektils abhängig, von dem Wurfwinkel α hingegen unabhängig, mithin ein integrierender Bestandteil aller möglichen Flugbahnen, unabänderlich von Gestalt, solange als das Projektil seine Eigenschaften beibehält. Um ihn in seiner ganzen Ausdehnung kennen zu lernen, setzen wir:

$$dx = (\theta + \theta')ds \tag{11}$$

und verstehen unter θ eine Konstante, unter θ' hingegen eine Funktion von s, so daß

$$x = \theta s + \int \theta' ds$$

wird. Dehnen wir dieses Integral aus von $x = 0$ bis zu $x = OA = x_1$, allwo die Bahn wieder den Horizont erreicht, und bezeichnen wir die Länge des Bogens OMA mit s_1, so daß sich

$$x_1 = \theta s_1 + \int_0^{s_1} \theta' ds$$

ergibt. Und nun verlangen wir, daß θ als Konstante, θ' aber als Funktion von t oder s so bestimmt werde, daß

$$x_1 = \theta s_1{}^{1)} \quad \text{und} \quad \int \theta' ds = 0$$

wird. θ' muß dann offenbar innerhalb der Grenzen 0 und x_1 bald positiv, bald negativ, immer jedoch entsprechend klein sein und kann vermöge dieser seiner Beschaffenheit nur einen sehr geringen Einfluß auf den Zustand des Projektils am Ende A der Flugbahn üben, so daß es gestattet ist, θ' in der Rechnung durch Null zu ersetzen, mithin

$$\text{(11')} \qquad dx = \theta ds, \qquad d^2x = \theta d^2s$$

in die erste der Differentialgleichungen (9) einzuführen, die dadurch übergeht in

$$\text{(12)} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{h}\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)$$

oder auch nach einer leichten Transformation in

$$\text{(13)} \qquad \frac{v\,dv}{v\,dt} = \frac{v\,dv}{ds} = -\frac{v^2}{h}\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right).$$

Die Differentialgleichung (12) gibt integriert t in Funktion von v; die Differentialgleichung (13) integriert hingegen s in Funktion von v, denn man erhält aus ihnen zunächst

$$\text{(14)} \qquad dt = -\frac{h\,dv}{v^2\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)}$$

$$\text{(15)} \qquad ds = -\frac{h\,v\,dv}{v^2\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)} = -\frac{a^2 h\,v\,dv}{v^2(v^2 + a^2)}.$$

Dann zerlegt man in Partialbrüche:

$$\frac{1}{v^2\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{a^2 + v^2}$$

und multipliziert einmal mit $-h\,dv$, das andere Mal mit $-h\,v\,dv$ und integriert, so erhält man:

$$t = \frac{h}{v} + \frac{h}{a} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} + C$$

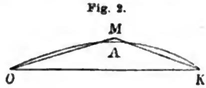
$$s = \frac{h}{2} \log \frac{a^2 + v^2}{v^2} + D.$$

1) Die Bedeutung dieser Substitution besteht in der Annahme zweier gerader Linien OM und MK (Abb. 2), welche zusammen genommen dieselbe Länge haben sollen wie der Bogen OAK, so daß

$$OM + MK = OAK$$

und $OK = x_1 = \theta s_1$ ist. Die gebrochene Linie OMK ist diejenige, welche an Stelle der krummen Linie gesetzt und mit ihr Punkt für Punkt und Linie für Linie identifiziert wird. Es kann hiernach unsere Theorie nicht unmittelbar auf stark gekrümmte Flugbahnen angewendet werden.

Fig. 2.



C und D sind Integrationskonstanten. Sie werden durch die Bedingung bestimmt, daß für $t = 0$ auch $s = 0$ und $v = c$ wird; dies gibt

$$C = -\frac{h}{c} - \frac{h}{a} \operatorname{arctg} \frac{c}{a}, \qquad D = -\frac{h}{2} \log \frac{c^2 + a^2}{c^2}$$

und damit

(16) $$t = h\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c}\right) - \frac{h}{a} \operatorname{arctg} \frac{a(c-v)}{a^2 + cv}$$

(17) $$s = \frac{h}{2} \log \frac{c^2(v^2 + a^2)}{v^2(c^2 + a^2)}.$$

In diesen Gleichungen ist keine Spur des Wurfwinkels α zu entdecken. Die Größe θ, die einzig und hauptsächlich von α abhängig wäre, und die wir in die Differentialgleichung einzuführen den Versuch machten, ist aus derselben von selbst herausgefallen. Dies beweist offenbar, daß die Geschwindigkeit v auch bei größerer Elevation der Flugbahn, z. B. bei dem Wurfwinkel $\alpha = 30^0$, noch in sehr geringer Abhängigkeit von α stehe und lediglich abhängig sei von den in (16) und (17) vorkommenden Größen, nämlich der Anfangsgeschwindigkeit c, der Zeit t und dem Bogen s.

Bevor wir zur Integration der zweiten Differentialgleichung schreiten, bemerken wir, daß aus dieser bereits erschlossen werden kann: daß in dem herabgehenden Aste der Flugbahn die Geschwindigkeit v sich einer Konstanten, also die Bewegung einer gleichförmigen fortwährend nähert. In der Tat nähert sich in diesem Aste der Bruch $\frac{dz}{ds}$ der negativen Einheit; die beschleunigende Kraft $\frac{d^2z}{dt^2}$ aber in demselben Maße mit dem Ausdrucke

$$\frac{v^2}{h}\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right) - g'$$

der Null, d. h. die Bewegung geht in eine gleichförmige über mit der nicht überschreitbaren Geschwindigkeit

(18) $$v^2 = \frac{a^2}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4g'h}{a^2}}\right].$$

Nehmen wir jetzt die Integration dieser zweiten Differentialgleichung (9) in Angriff und führen zu diesem Zwecke eine neue Veränderliche p ein, substituierend:

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{ds}{dt}, \qquad p = \frac{dz}{ds}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^2z}{dt^2} = p\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dp}{dt}\frac{ds}{dt}.$$

Substituieren wir diese Werte in die zweite der Gleichungen (9) und subtrahieren sodann von ihr die mit p multiplizierte (12), so ergibt sich:

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = -g'$$

oder, weil $dt = \frac{ds}{v}$ ist,

$$dp = -\frac{g' ds}{v^2} \tag{20}$$

und mit ds aus der Gleichung (15):

$$dp = \frac{g' h v dv}{v^4 \left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)}.$$

Für die Zerlegung in Partialbrüche sei

$$\frac{1}{v^4\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)} = \frac{A}{v^4} - R$$

$$\frac{1}{1 + \frac{v^2}{a^2}} = A - Rv^4$$

für $v = 0$, $A = 1$ und damit

$$R = \frac{1}{a^2 v^2 \left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)},$$

wonach mit Berücksichtigung von (15) erhalten wird:

$$p = -\frac{g' h}{2 v^2} + \frac{g' s}{a^2} + C.$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten C folgt daraus, daß für $t = 0$, $v = c$, $s = 0$ und $p = \sin\alpha$ ist. Mithin wird:

$$C = \sin\alpha + \frac{g' h}{2 c^2}$$

$$p = \sin\alpha - \frac{g' h}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \frac{g' s}{a^2} = \frac{dz}{ds} = \sin\varphi. \tag{22}$$

Um endlich z zu erhalten, multiplizieren wir diese Gleichung mit ds und integrieren abermals, erhalten so zunächst:

$$z = s\sin\alpha + \frac{g' s^2}{2 a^2} + \frac{g' h s}{2 c^2} - \frac{g' h}{2}\int \frac{ds}{v^2}$$

oder da nach obigem (20)

$$-\frac{g' h}{2}\int \frac{ds}{v^2} = \frac{hp}{2} = -\frac{g' h^2}{4 v^2} + \frac{g' h s}{2 a^2} + \text{Const.}$$

besteht, so ist

$$z = s\sin\alpha + \frac{g' h s}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{v^2}\right) + \frac{g' s^2}{2 a^2} - \frac{g' h^2}{4 v^2} + \text{Const.}$$

Da für $t = 0$, $s = 0$, $v = c$, $z = 0$ ist, wird die Integrationskonstante:

$$\text{Const.} = \frac{g'h^2}{4c^2},$$

damit

$$z = s \sin\alpha + \frac{g'hs}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{v^2}\right) + \frac{g's^2}{2a^2} - \frac{g'h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right). \tag{23}$$

Die bisher berechneten Formeln enthalten die vollständige Auflösung des ballistischen Problems der Flugbahn mit mäßiger Elevation. Die (16) bestimmt die Zeit in Sekunden, binnen welcher die Geschwindigkeit von c auf v Meter herabsinkt, die (17) die unterdessen beschriebene Bogenlänge s, gleichfalls in Metern, die (22) liefert die Richtung der Bewegung am Ende des Bogens s und der Zeit t, denn $p = \frac{dz}{ds}$ ist der Sinus des Winkels φ, welchen die geometrische Tangente MT zum Punkte M der Flugbahn mit der Achse der x einschließt; in der (23) endlich ist die Gleichung der Flugbahn selbst enthalten.

Die Grenzen, innerhalb welcher diese Formeln noch brauchbar sind, sind keine sehr eng gezogenen und man kann immerhin annehmen, daß dieselben, solange als weder $\sin\alpha$ noch $p = \sin\varphi$ den Wert $\frac{1}{2}$, also die α und φ genannten Winkel 30^0 nicht überschreiten, bei dem geringen in der Ausübung erreichbaren Grad der Genauigkeit, noch genügend verläßlich seien. Der bequemen Übersicht halber stellen wir die bisher gewonnenen Hauptformeln hier in eine Gruppe zusammen.

$$\begin{aligned}
s &= \frac{h}{2}\log\frac{c^2(v^2+a^2)}{v^2(c^2+a^2)}\\
p &= \frac{dz}{ds} = \sin\varphi = \sin\alpha + \frac{g's}{a^2} - \frac{g'h}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\\
z &= s\sin\alpha + \frac{g'hs}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{g's^2}{2a^2} - \frac{g'h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\\
t &= h\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right) - \frac{h}{a}\,\text{arctg}\,\frac{a(c-v)}{a^2+cv}\\
r &= \frac{v^2}{g'\frac{dx}{ds}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Die Flugbahnkurve des horizontalen Wurfes als Hilfskurve. Setzen wir in der zweiten und dritten dieser Formeln $\sin\alpha = 0$, d. h. die *anfängliche Wurfrichtung horizontal* und nennen wir die dieser Annahme entsprechenden Werte von p und z beziehlich p' und z', so ist:

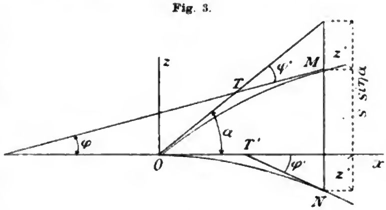
$$\begin{aligned}
p' &= \frac{g's}{a^2} - \frac{g'h}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\\
z' &= \frac{g'hs}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{g's^2}{2a^2} - \frac{g'h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right),
\end{aligned} \tag{25}$$

womit man dann hat:

$$(26)\qquad \begin{aligned} p &= p' + \sin\alpha \\ z &= z' + s\sin\alpha\,. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (25) und (26) entsprechen zwar zwei verschiedenen Kurven, bei deren einer die Ordinate z', bei der anderen z heißt, jedoch besteht die Verschiedenheit weniger in der Gestalt, als vielmehr in der Lagerung. Graphisch kann man sich diese Formverwandtschaft so versinnlichen, daß man die Gleichungen (25) bezieht auf eine krumme Linie *OND* (Fig. 3). Dreht man diese ohne Formveränderung um den Anfangspunkt *O* herum, bis sie in die Lage *OMA* kommt, so ist die Kurve *OMA* aber, wenn auch nicht in aller Strenge, doch nahezu, die den Gleichungen (26) angehörige. Diese Ähnlichkeit besteht selbst dann, wenn die *OND* eine beträchtlichere Krümmung T erhält, dergestalt, daß die zum Endpunkte D gezogene Tangente mit der Abszissenachse einen Winkel einschließt, der 45° übersteigt und ist selbst dann noch nicht bedeutend gestört, wenn dieser Winkel 60° erreicht. Die Kurve (25), d. h. die *OND*, hört bei einer so großen Bogenlänge s freilich auf, eine wirkliche Flugbahn zu sein, die (26) jedoch bleibt bei derselben Bogenlänge s noch immer eine solche, solange als weder α noch $p = \sin\varphi$ einen mäßigen Wert wie $\frac{1}{2}$ überschreiten. Hieraus folgt, daß, *wenn man die Flugbahn eines geworfenen Körpers geometrisch konstruieren will, man keineswegs nötig hat, alle die Bahnen, die für verschiedene Winkel α aus den (26) hervorgehen, zu verzeichnen, sondern, daß man sich auf die Konstruktion der (25) beschränken und diese Kurve als Hilfskurve betrachten kann, aus welcher alle möglichen Flugbahnen und ihre Eigenschaften abzuleiten sind.* Zu diesem Zwecke ist es jedoch von Nutzen, die Gleichungen (24), (25), (26) einer angelegentlicheren Betrachtung zu würdigen und sowohl über ihre bequeme Verwendung, als auch über das Maß ihrer Verläßlichkeit innerhalb gewisser Grenzen Aufschluß zu erhalten. Zuvörderst kann bemerkt werden, daß man in den Gleichungen (24) und (26) anstatt $\sin\alpha$ und $\sin\varphi$ auch die Bogen α und φ schlechtweg setzen kann, und dies zwar ohne die geringste Aufopferung der Genauigkeit, weil im Gegenteile α und φ richtiger ist als $\sin\alpha$ und $\sin\varphi$. Dies läßt sich auf folgende Weise dartun. Anstatt

Fig. 3.



die zweite der Differentialgleichungen (9) durch Einführung einer neuen Veränderlichen p auf Grundlage der (12), die selbst nur näherungsweise richtig ist, weil sie aus der angenäherten Voraussetzung $dx = \theta ds$ hervorgeht, zu integrieren, verschaffen wir uns lieber eine ganz genaue Differentialgleichung aus der ebenfalls ganz exakten (9), die integriert, sowie die in p, ebenfalls eine Formel für den Winkel φ liefern soll. Wir gehen hierbei von dem einfachsten Werte für den Krümmungshalbmesser r aus, nämlich:

$$r = -\frac{ds}{d\varphi},$$

welcher r negativ, mithin ds und $d\varphi$ von entgegengesetztem Zeichen voraussetzt, wie dies in der Flugbahn tatsächlich der Fall ist. Da überdies

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{dx}$$

ist, mithin:

$$d \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = d\varphi \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) = \frac{dx\, d^2 z - dz\, d^2 x}{dx^2}$$

$$d\varphi\, ds^2 = dx\, d^2 z - dz\, d^2 x,$$

so wird man von den Gleichungen (9) die erste mit $\frac{dz}{ds}$, die zweite mit $\frac{dx}{ds}$ multiplizierend und dann abziehend erhalten:

$$dx\, d^2 z - dz\, d^2 x = -g' dx\, dt^2 = d\varphi \cdot ds^2,$$

welches, da $\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$ ist und $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ gleichbedeutend ist mit

$$(28) \qquad \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = -\frac{g' ds}{v^2}$$

und hieraus durch Integration

$$(29) \qquad \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = -g' \int \frac{ds}{v^2}.$$

Diese Formeln (28) und (29) sind noch ganz genau, jedoch von den früher genommenen (21), (22) unterschieden; alldort steht nämlich $d \sin \varphi = \cos \varphi\, d\varphi$ anstatt $\frac{d\varphi}{\cos \varphi}$, was offenbar zu wenig ist, $d\varphi$ würde der Wahrheit näher kommen. Dagegen ist aber zu bemerken, daß man den genauen Wert von v in Funktion des Bogens s nicht kennt, sondern nur den aus der Gleichung (17) gezogenen angenäherten:

$$(30) \qquad \frac{1}{v^2} = \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) e^{\frac{2s}{k}} - \frac{1}{a^2},$$

welcher die Wirkung der Schwere auf die Geschwindigkeit v des Projektils ganz unbeachtet läßt. Nun vermindert aber die Schwere das v

im aufsteigenden Aste der Flugbahn und vergrößert dieselbe im absteigenden Aste dieser Bahn; ist mithin der Wurfwinkel α mäßig positiv, so gibt die Formel (30) die Geschwindigkeit v zu groß für alle Punkte der Bahn vom Ursprunge bis zu einem wieder in der Nähe des Horizontes gelegenen Orte an; hiermit wird $\frac{1}{v^2}$ zu klein und mithin auch $\int \frac{ds}{v^2}$ zu klein, folglich wird auch für den ersten Teil der Gleichung (28) das zu kleine $d\varphi$ der passendere Wert sein, anstatt $\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$. Ebenso wird für größere Werte von α das $\cos d\varphi = d \sin\varphi$ der Wahrheit näher kommen, für ganz kleine positive α wird $\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ selbst für eine größere Länge der Flugbahn verwendbar sein. Ist endlich $\alpha = 0$ oder negativ, so wird man gut tun, $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = d \operatorname{tg}\varphi$ zu wählen. Alle diese Differentialausdrücke fallen für kleine φ und α in einen einzigen $d\varphi$ zusammen, und man hat das Recht, nach Maßgabe der Umstände jeden beliebigen unter ihnen zu erwählen, um etwa die erhöhtere Genauigkeit oder die bequemere analytische Behandlung zu erzwecken. Da die gegenwärtigen Rechnungen nur auf ein mäßig gekrümmtes Stück der Flugbahn, dessen Sehne horizontal ist, Geltung beanspruchen, indem für den steigenden und fallenden Bestandteil derselben eine eigene Analysis gebracht werden wird, so nimmt man sich hier lediglich die Freiheit, in den Gleichungen (24) und (26) anstatt $\sin\varphi$ und $\sin\alpha$ die Bogen φ und α zu substituieren, was gleichzeitig zugunsten der Bequemlichkeit wie der Genauigkeit geschieht. Die (26) werden hiermit ersetzt durch

$$\varphi = \alpha + p' \qquad (31)$$
$$z = \alpha s + z'.$$

Diese Gleichungen können für kleine Werte von α und φ gültig gedacht werden, für etwas größere, jedoch mäßige α und φ, die vorhanden sein können, wenn ein über den Horizont etwas erhöhter Gegenstand durch den Wurf zu treffen ist, mögen hingegen die (26) in Geltung verbleiben.

Zur Bestimmung der Grenzen der Gültigkeit und des Maßes der Genauigkeit aber ist eine genauere Kenntnis der oben mit θ und θ' bezeichneten Größen erforderlich, und da diese etwas weitläufigere Entwicklungen des Kalküles erheischt, dabei aber hier von keinem sonderlichen Nutzen in der Ausführung ist, so wird die Berechnung dieses θ und θ' den angehängten Noten I und II zugewiesen.[1])

1) Fehlen in der Niederschrift Petzvals und in den stenographischen Aufzeichnungen.

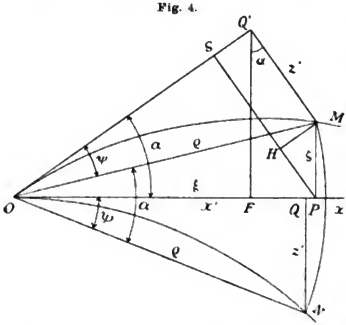
Das Schwenken der Bahnen. Es ist behauptet worden, daß die Gleichungen

$$(32)\qquad z = \sin\alpha - \frac{g'hs}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right) + \frac{g's^2}{2a^2} - \frac{g'h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)$$

$$(33)\qquad z' = \frac{g'hs}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right) + \frac{g's^2}{2a^2} - \frac{g'h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)$$

für denselben Wert von s in Funktion von v, den die erste der Gleichungen (24) ergibt, wenn auch nicht in aller Strenge, so doch nahezu eine und dieselbe Kurve darstellen in verschiedener Lagerung. Um dies zu berechnen, sei OND (Abb. 4) die krumme Linie (33) und N der Punkt, zu dem die Koordinaten x', z' item s und v gehörig sind. Der Leitstrahl ON heiße ϱ und der Winkel $\widehat{NOX}$ ψ, so wird:

Fig. 4.



$$x' = \varrho\cos\psi, \quad z' = -\varrho\sin\psi.$$

Nun drehen wir die ganze Kurve ohne Veränderung ihrer Gestalt um den Anfangspunkt O herum um einen Winkel α, so daß die Tangente zum Anfangspunkte O, die anfänglich mit der Achse der x zusammenfiel, nunmehr mit derselben den Winkel α bildet, und die ganze Kurve OND in die Lage OMA übertritt. Der Leitstrahl $OM = ON = \varrho$ wird dann mit diesem ON ebenfalls den Winkel $MON = \alpha$ einschließen und es wird $MOX = \alpha - \psi$ sein. Sind die Koordinaten von M, ξ und ζ, so hat man:

$$\xi = \varrho\cos(\alpha-\psi) = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha$$
$$\zeta = \varrho\sin(\alpha-\psi) = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha$$

und durch Multiplikation der ersten dieser Gleichungen mit $\sin\alpha$, der zweiten mit $\cos\alpha$ und Subtraktion:

$$z' = \zeta\cos\alpha - \xi\sin\alpha,$$

was übrigens auch aus Abb. 4 zu ersehen ist.

Die übrigen in der (33) vorkommenden Größen s und v erleiden durch diese Umlagerung bzw. Transformation keine Veränderung; man hat also nur den Wert von z in diese (33) einzuführen und erhält also gleich die Gleichung der Transformierten:

$$\zeta\cos\alpha = \xi\sin\alpha + \frac{g'hs}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right) + \frac{g's^2}{2a^2} - \frac{g'h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right).$$

Setzt man anstatt $\zeta \cos\alpha$ das etwas größere ζ, anstatt $\xi \sin\alpha$ das ebenfalls etwas größere $s \sin\alpha$, so wird die Gleichheit wohl nicht wesentlich gestört; dann ergibt sich aber:

$$\zeta = s \sin\alpha + \frac{g' h s}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{g' s^2}{2 a^2} - \frac{g' h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der (33) zeigt, daß $\zeta = z$ sei, mithin sind die beiden Kurven (32) und (33) nur der Lagerung nach verschieden, insofern wenigstens, als α ein mäßiger Winkel und die OND eine mäßig gekrümmte Kurve bleibt.

Hiermit bricht das Petzvalsche Manuskript ab. Es sei hier noch bemerkt, daß Petzval in den Vorlesungen auch hochgewölbte Flugbahnen in Betracht zog. Die im vorigen aufgestellten Formeln gelten für den obersten Teil einer solchen Flugbahn, man kann sich dieselbe nach beiden Seiten über eine horizontale Sehne verlängert denken, so daß innerhalb der Flugbahn ein Polygon eingeschrieben wird, an dessen Seiten sich die gekrümmte Linie nahe anschließt. Die Differentialgleichungen werden für den Fall der Anschlußstücke in der Weise verallgemeinert, daß statt einer horizontalen eine unter dem Winkel γ geneigte Achse der x angenommen wird, wodurch die Schwere in beiden Koordinatenachsen Komponenten ergibt. Im aufsteigenden Aste ist $\sin\gamma$ positiv, im absteigenden Aste negativ, für eine ansteigende und für eine abfallende Achse der x gelten daher dieselben Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{v^2}{h}\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{dx}{ds} - g' \sin\gamma$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = -\frac{v^2}{h}\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{dz}{ds} - g' \cos\gamma.$$

Dieselben sind in der Vorlesung mit Anwendung derselben Annäherungen wie für die flache Flugbahn integriert worden, aber in dem mitgeschriebenen Vorlesungshefte fehlt die weitere Verwertung dieses Kunstgriffes der Zerlegung der Bahn in mehrere Teile, zur Lösung einer bestimmten Aufgabe. Von der bloßen Mitteilung der Integrationsergebnisse ist hiernach begreiflicherweise abgesehen worden.

Einrichtung der Integrations-Ergebnisse zur tabellarischen Berechnung.[1])

Zur leichteren Verwertung der Gleichungen (25) und (26) ist die Berechnung einer Tabelle sehr bequem, welcher die entsprechenden Zahlenwerte entnommen werden können. Es ist dabei zu berücksich-

1) Nach stenographischen Aufzeichnungen.

tigen, daß diese Zahlenwerte von den Konstanten h und a unabhängig gehalten werden müssen, damit die Tabelle ihre Brauchbarkeit nicht verliere, wenn diese Konstanten, etwa zufolge der Anwendung anderer als kugelförmiger Geschosse, neu bestimmt werden. Endlich soll diese Tabelle auch für beliebige Anfangsgeschwindigkeiten Geltung haben.

Wir beginnen damit, eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit c zu wählen, und denken uns mit derselben das Geschoß von O aus, Abb. 1, geworfen. Nachdem das Geschoß den Bogen $OM_1 = s_1$ zurückgelegt hat, wird dessen Geschwindigkeit auf v_1 abgesunken sein. Nach Gleichung (17) ergibt sich für diesen Bogen:

$$s_1 = \frac{h}{2} \log \frac{c^2(v_1^2 + a^2)}{v_1^2(c^2 + a^2)}.$$

In der weitern Bewegung des Geschosses von M_1 bis M durch den Bogen $M_1 M = \sigma$ sinkt die Geschwindigkeit v_1 auf v ab, und σ ist nach Formel (17):

$$\sigma = \frac{h}{2} \log \frac{v_1^2(v^2 + a^2)}{v^2(v_1^2 + a^2)};$$

der ganze Bogen $s = OM = OM_1 + M_1 M = s_1 + \sigma$ wird durch Addition der oben aufgefundenen beiden Ausdrücke erhalten und ist

$$(17') \qquad s = \frac{h}{2} \log \frac{c^2(v^2 + a^2)}{v^2(c^2 + a^2)}.$$

Um den Bogen zu finden, welcher mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_1 bis zum Absinken der Geschwindigkeit auf v beschrieben wird, hat man von der Gleichung

$$\sigma = s - s_1$$

Gebrauch zu machen, also einfach zwei Bogenwerte voneinander abzuziehen. Wir sind dadurch der Notwendigkeit überhoben, für jede Anfangsgeschwindigkeit eine Tabelle rechnen zu müssen.

Um die Zahlenwerte von s, welche in die Tabelle einzutragen sind, von h und a unabhängig zu machen, führen wir die folgenden Substitutionen ein. Wir setzen zunächst:

$$(34) \qquad c^2 = ma^2;$$

dabei soll c die größte wirklich erreichte Anfangsgeschwindigkeit sein. Weiter wird angenommen:

$$(35) \qquad v^2 = na^2,$$

wobei n eine veränderliche Größe ist. Damit wird aus Gleichung (17')

$$s = \frac{h}{2} \log \frac{m(n + 1)}{n(m + 1)},$$

ein Ausdruck, welcher a nicht mehr enthält und daher für jeden Wert dieser Größe gilt. Es soll nunmehr folgende Bezeichnung eingeführt werden:

$$\text{(I)} \qquad s = Ah, \quad A = \frac{1}{2}\log\frac{m(n+1)}{n(m+1)}.$$

Dabei ist m eine konstante Größe etwa gleich 8, so daß die Maximalgeschwindigkeit c damit $c = \sqrt{8a^2} = 565 \cdot 6$ m/sec erhalten wird. Das n ist veränderlich und ihm werden bei Berechnung der Tabelle etwa die folgenden Werte erteilt: $n = \infty$, 12, 8, 6, 4, 3, 2, $^3/_2$, 1. . . .

Es läßt sich nunmehr auch die nach rückwärts verlängerte Flugbahn untersuchen und die zu diesem Teile gehörige Asymptote auffinden. Man hat, um A zu finden, bloß $n = \infty$ zu setzen, es wird dann

$$A = \frac{1}{2}\log\frac{m}{m+1}, \qquad s = -\frac{h}{2}\log\left(1+\frac{1}{m}\right);$$

für den oben vorausgesetzten Wert $m = 8$ ergibt sich:

$$s = -\frac{h}{2}\log\frac{9}{8} = -\frac{h}{2}\,0 \cdot 05889.$$

Um den Winkel zu finden, welchen diese Asymptote mit der x-Achse einschließt, sind die Werte von m und n in die Gleichung (22) unter Berücksichtigung von (31) einzusetzen, wodurch

$$\text{(36)} \qquad \varphi = \alpha - \frac{g'h}{2a^2}\left[\log\left(1-\frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m}\right]$$

als jener Neigungswinkel erhalten wird.

Die Substitutionen (34) und (35) in die Gleichungen (25) des horizontalen Wurfes eingeführt ergeben, wenn statt der Sinus die Bogen gesetzt werden, mit Rücksicht auf (I):

$$\varphi' = \frac{g'h}{a^2}\left[A - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right]$$

oder:

$$\text{(II)} \qquad \varphi' = -B\frac{g'h}{a^2}, \qquad B = \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} - A\right].$$

Die Ordinate z_1' oder die Gleichung der Flugbahn (25) des horizontalen Wurfes geht mit Rücksicht auf (I) und (II) über in:

$$z' = -\frac{g'h^2}{2a^2}\left[B - A\left[A + \frac{1}{m}\right]\right]$$

oder:

$$\text{(III)} \qquad z' = -C\frac{g'h^2}{2a^2}, \qquad C = \left[B - A\left(A + \frac{1}{m}\right)\right].$$

Aus der Formel (16) ergibt sich durch die Substitution (34) und (35) für die Flugzeit:

$$t = \frac{h}{a}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{1-\sqrt{mn}}\right]$$

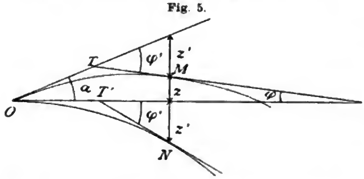
oder:

(IV) $$t = \frac{h}{a}D, \quad D = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{1-\sqrt{mn}}.$$

Bestimmung der Größe des Wurfwinkels, damit ein Ziel in bestimmter Entfernung getroffen wird.

In den aus den Differentialgleichungen (5) abgeleiteten angenäherten Formeln kommt die Abszisse x gar nicht vor, es bleibt daher nichts anderes übrig, als den Bogen s für die Abszisse x zu nehmen. Es ist dies insofern zulässig, als unter gewöhnlichen Umständen die Wurfwinkel sehr klein sind und zumeist kleiner als 10^0 bleiben. Unter diesen Voraussetzungen soll der Wurfwinkel gesucht werden, mit welchem ein Ziel in der Entfernung s mit der Anfangsgeschwindigkeit c erreicht werden kann. Die angenäherten Formeln (31), welche in Abbildung 5 graphisch dargestellt sind, lauten:

Fig. 5.



$$\varphi = \alpha + \varphi'$$
$$z = \alpha s + z'.$$

Setzt man darin $z = 0$, so ergibt sich daraus $\alpha s = - z'$ und:

$$\alpha = -\frac{z'}{s} = \frac{g'h}{2a^2}\frac{C}{A}$$

oder:

(V) $$\alpha = E_0\frac{g'h}{2a^2} \qquad E_0 = \frac{C}{A}.$$

Da man aber nicht immer gerade mit der Anfangsgeschwindigkeit c, sondern auch mit einer andern v_1 zu werfen beabsichtigt, so ist zur Ermittlung des Wurfwinkels, um ein Ziel in einem Abstande σ mit dieser Anfangsgeschwindigkeit zu erreichen, ein geeignetes Verfahren aufzusuchen. Hierzu führt die Überlegung, daß in der mit der Anfangsgeschwindigkeit c und dem Wurfwinkel $\alpha = 0$ erzeugten Hilfskurve stets ein Punkt M_1 aufzufinden sein wird, in welchem die Geschwindigkeit v_1 herrscht. Die Tangente an diesen Punkt M_1 der Kurve schließt

mit der Achse der x den Winkel φ_1' ein und die Ordinate dieses Punktes ist z_1'. Man erhält aus den Gleichungen (25) für φ' und z' die Werte von φ_1' und z_1' indem man in diese Gleichungen, statt s und v, die Werte $s_1 = OM_1$ und v_1 einsetzt. Man erhält dadurch:

(37)
$$\varphi_1' = \frac{g's_1}{a^2} - \frac{g'h}{2}\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{c^2}\right)$$
$$z_1' = \frac{g'hs_1}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{g's_1^2}{2a^2} - \frac{g'h^2}{4}\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Wenn mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1 horizontal geworfen wird, so ist in die Formeln (25) v_1 statt c einzuführen. Der Bogen wird aber nicht von O an, sondern von M_1 bis N gezählt; es ist derjenige Bogen, welchen wir mit σ bezeichneten. Die Ordinate geht dabei, wenn der Wurf in horizontaler Richtung geschieht, in z'' über. Da auch der Winkel φ in N ein andrer ist, so soll dies durch die Bezeichnung φ'' angezeigt werden. Es ist:

(38)
$$\sigma = s - s_1,$$

(39)
$$\varphi'' = \frac{g'(s-s_1)}{a^2} - \frac{g'h}{2}\left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v_1^2}\right),$$

(40)
$$z'' = \frac{g'(s-s_1)^2}{2a^2} + \frac{g'h}{2}(s-s_1)\left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{g'h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_1^2}\right).$$

Um nun alles auf die entworfene Tabelle beziehen zu können, schreibt man die Formel (39) in entwickelter Form, addiert und subtrahiert $\frac{g'h}{2c^2}$ und erhält:

$$\varphi'' = \frac{g's}{a^2} - \frac{g'h}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right) - \left[\frac{g's_1}{a^2} - \frac{g'h}{2}\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right],$$

woraus sofort erkannt wird, daß

(41)
$$\varphi'' = \varphi' - \varphi_1'$$

ist, und daß bloß zwei in der Tabelle vorhandene Werte zu subtrahieren sind.

Indem in der Gleichung (40) für z'', $\frac{g'hs}{2c^2}$ und $\frac{h^2g'}{4c^2}$ addiert und subtrahiert und statt $\frac{g's_1^2}{a^2}$ geschrieben $\frac{g's_1^2}{a^2} - \frac{g's_1^2}{2a^2}$ und dann geordnet wird, erhält man:

$$z'' = \frac{g's^2}{2a^2} + \frac{g'hs}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{h^2g'}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right) - \frac{g's_1^2}{2a^2} - \frac{g'hs_1}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) +$$
$$+ \frac{h^2g'}{4}\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{c^2}\right) - (s-s_1)\left(\frac{g's_1}{a^2} - \frac{g'h}{2}\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right),$$

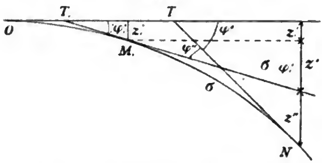
woraus nach (25) folgt:

$$z'' = z' - z_1' - (s - s_1)\varphi_1' \tag{42}$$

eine Beziehung, welche in der Abb. 6 Bestätigung findet.

Durch Einführung der in (I), (II) und (III) gewählten Bezeichnungen verwandelt sich dieser Ausdruck in:

Fig. 6.



$$z'' = (C - C_1)\frac{g'h^2}{2a^2} + (A - A_1)h \cdot B_1 \frac{g'h^2}{a^2}$$

oder anders geordnet:

$$z'' = \frac{g'h^2}{2a^2}[(C - C_1) - 2(A - A_1)B]. \tag{43}$$

Zur Bestimmung des Wurfwinkels (α), welcher nötig ist, um mit der Anfangsgeschwindigkeit c die Wurfweite s zu erreichen, hatten wir die Gleichung (31)

$$z = \alpha s + z'.$$

Am Ziele ist die Ordinate $z = 0$, daher

$$\alpha = -\frac{z'}{s}.$$

Wenn aber mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1 geworfen wird, so ist $M\xi$ an Stelle der horizontalen Ox gesetzt und die Kurve um den Punkt M_1 gedreht zu denken. Die laufende Koordinate derselben ist dann ζ, sie wird dort der Null gleich, wo die Flugbahn abermals die $M_1\xi$ schneidet. In dieser Kurve ist z'' statt z' (43) und statt des ganzen Bogens $ON = s$, $M_1N = s - s_1$ zu setzen. Für den Wurfwinkel α_1 ergibt sich hiernach:

$$\alpha_1 = -\frac{z''}{s - s_1}.$$

Mit Rücksicht auf (I) und (43) wird hieraus:

$$\alpha_1 = \frac{gh}{2a^2}\frac{(C - C_1) - 2(A - A_1)B_1}{A - A_1}$$

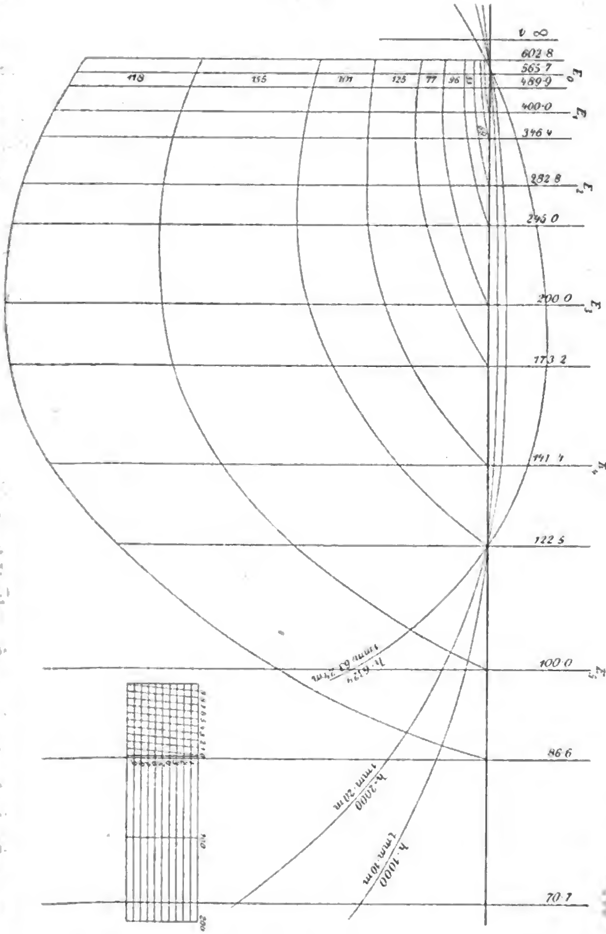
oder:

$$\alpha_1 = E_1\frac{gh}{2a^2}, \qquad E_1 = \frac{C - C_1}{A - A_1} - 2B_1. \tag{VI}$$

Für eine Anfangsgeschwindigkeit v_2, welche am Ende eines Bogens s_2 stattfindet, läßt sich der Wurfwinkel α_2 aus (VI) ableiten, indem für die Indices 1 jene 2 eingeführt werden. Man erhält so

$$\alpha_2 = E_2\frac{g'h}{2a^2}, \qquad E_2 = \frac{C - C_2}{A - A_2} - 2B_2; \tag{VII}$$

Fig. 7.


v ∞
602·8
565·7
489·9
400·0
346·4
282·8
245·0
200·0
173·2
141·4
122·5
100·0
86·6
70·7
h·6124 1mm·61·24m
h·2000 1mm·20m
h·1000 1mm·10m

und schließlich in leicht verständlicher Weise für irgend eine Anfangsgeschwindigkeit v_k, für α_k den Wert:

$$\text{(VIII)} \qquad \alpha_k = E_k \frac{g' h}{2 a^2}, \qquad E_k = \frac{C - C_k}{A - A_k} - 2 B_k.$$

In der nachfolgenden Tabelle sind alle $E_0 = C/A$. Die E_1 sind aus der Kolumne $n = 4$, die E_2 aus der Kolumne $n = 2$; die E_3 aus der Kolumne $n = 1$, die E_4 aus der Kolumne $n = {}^1/_2$, die E_5 aus der Kolumne $n = {}^1/_4$ abgeleitet. Die von C und A einer bestimmten Kolumne, z. B. jener $n = \frac{1}{8}$ abzuziehenden Größen C_k, A_k und B_k sind aus den bezeichneten Kolumnen entnommen.

Nach dieser Tabelle hat Petzval mehrere Flugbahnen, wie dieselben mit der Anfangsgeschwindigkeit von 566 m/sec erhalten werden, verzeichnet, die in die Abbildung 7 eingezeichnet sind, und zwar:

1. Die Flugbahn der Kugel eines Stutzens, für welche $h = 1000$ m angenommen wurde, im Maßstabe 1 mm = 10 m, für eine Entfernung von 600 m.

$$s = \frac{h}{2} \log \frac{c^2 (v^2 + a^2)}{v^2 (c^2 + a^2)} \qquad t = h\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{c}\right) - \frac{h}{a} \operatorname{arctg} \frac{a(c - v)}{a^2 + cv} \qquad \varphi = \alpha + \varphi$$

$$\varphi = \alpha + \frac{g' s}{a^2} - \frac{g' h}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right) \qquad h = \frac{P + \delta}{0{\cdot}012 \pi \varrho^2 g} \qquad z = \alpha s +$$

$$z = \alpha s + \frac{g' s^2}{2 a^2} + \frac{g' h s}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{g' h^2}{4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right) \qquad g' = \frac{P}{P + \delta} g \qquad r = \frac{w^2}{g} \frac{(P + \delta}{P dx}$$

n	∞	12	8	6	4	3	2	1·5 = 3/2	1	0·75 =
v	∞	692·82	565·68	489·90	400·00	346·41	282·84	244·95	200·00	173·20
A	−0·05889	−0·01887	0·00000	0·018180	0·05268	0·08495	0·14384	0·19652	0·28765	0·36476
B	−0·003608	−0·00196	0·	0·002650	0.00982	0·01922	0·04366	0·07431	0·14982	0·23941
C	0·000284	0·000006	0·	0·000046	0·00046	0·00138	0·00499	0·01113	0·03110	0·06077
D	−0·0138	−0·0061	0·	0·0066	0·0225	0·0400	0·0780	0·1177	0·2011	0·2340
E_0				0·00269	0·00874	0·01625	0·03468	0·05660	0·10807	0·16660
E_1						0·00886	0·02970	0·05454	0·11074	0·17682
E_2								0·02907	0·09421	0·16517
E_3										0·08530
E_4										
E_5										
R	∞	48935	32623	24467	16312	12234	8156	6117	4078	3058

2. Die Flugbahn eines Langbleies aus einem Stutzen, für welches $h = 2000$ ist; im Maßstabe 1 mm = 20 m. Da die Ordinaten der Flugbahn (III) dem h^2 proportional sind, würden dieselben für den doppelten Wert von h viermal so groß, der Bogen $s = Ah$ zweimal so lang ausfallen. Weil aber der Maßstab der Zeichnung die halbe Größe hat, erscheint die Flugbahnlänge von 1200 m ebenso groß wie unter 1. und die Ordinaten sind nur doppelt so hoch.

3. Die Flugbahn einer 24pfündigen Kanonenkugel. Für diese ist $h = 6324$, die Länge der Flugbahn würde 6 · 3 mal größer ausfallen, die Ordinaten fast 40 mal höher sein. Da aber der Maßstab 1 mm = [illegible]3 · 24 m gewählt wurde, erscheint in der Zeichnung die Zielentfernung von 3800 m ebenso groß wie unter 1. und 2.; die Ordinaten sind nur 6 · 3 mal so groß.

An diese Darstellung der Flugbahnen ist eine Verzeichnung der Aufsatzhöhen für verschiedene Wurfweiten, unter Anwendung der Anfangsgeschwindigkeiten von 565 · 7, 400 · 0, 282 · 8, 200 · 0 141 · 4, 100 · 0 m/sec

---

$t^2 = na^2 = ma^2$ $\qquad s = Ah \qquad A = \frac{1}{2}\log\frac{m(n+1)}{n(m+1)} \qquad t = D\frac{h}{a} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{1+\sqrt{mn}}$

$t^2 = na^2$ $\qquad \varphi' = -B\frac{g'h}{a^2} \qquad B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) - A \qquad E_0 = \frac{C}{A} \qquad E_k = \frac{C-C_k}{A-A_k} - 2B_k$

$= 9{\cdot}809$

$a = 200$ $\qquad z' = -C\frac{g'h^2}{2a^2} \qquad C = B - A\left(A + \frac{1}{m}\right) \qquad r = R\frac{(P+\delta)ds}{Pdx} \qquad R = \frac{na^2}{g}$

$0{\cdot}5 = \frac{1}{2}$	$0{\cdot}375 = \frac{3}{8}$	$0{\cdot}25 = \frac{1}{4}$	$0{\cdot}1875 = \frac{3}{16}$	$0{\cdot}125 = \frac{1}{8}$	$0{\cdot}09075 = \frac{3}{32}$	$0{\cdot}0675 = \frac{1}{16}$	$0{\cdot}046875 = \frac{3}{64}$	$0{\cdot}03125 = \frac{1}{32}$
141·42	122·48	100·00	86·60	70·71	61·24	50·00	43·30	35·36
0·49041	0·59075	0·74582	0·86402	1·03972	1·16948	1·35772	1·49415	1·68936
0·447085	0·68608	1·19168	1·74014	2·89778	4·10136	5·95478	9·10998	14·24814
0·14528	0·25725	0·54228	0·88561	1·68681	2·58751	3·94167	6·69054	11 18304
0·4451	0·5979	0·8786	1·1335	1·5838	1·9786	2·6602	3·2434	4·2473
0.29624	0·43547	0·72694	1·02499	1·62237	2·21254	2·90316	4·47783	6·61969
0.31120	0·45760	0·76192	1·07133	1·68885	2·29685	3·00035	4·61151	6·81285
0·31719	0·47713	0·80500	1·14548	1·78997	2·43065	3·15574	4·86381	7·14824
0·26357	0·44655	0·81589	1·18316	1·90198	2·59944	3·35497	5·22014	7·65649
	0·22183	0·66559	1·08743	1·91213	2·70374	3·48304	5·62672	8·31203
			0·52189	1·51120	2·44436	3·17220	5·83271	8·89422
2039	1529	1019	765	510	382	255	191	127

angeschlossen. Es ist dabei ein Kugelstutzen $h = 1000$ vorausgesetzt, bei welchem die Entfernung von Visier und Korn $\lambda = 17$ Zoll $= 204$ Linien $= 448$ mm beträgt, die dem Winkel α entsprechende Visierhöhe V wird:

$$V = \lambda \alpha$$

angenommen, wobei $\alpha = E \frac{g h^2}{2 a^2}$ ist. Für den letzten Faktor wählte Petzval den Wert 110 und erhielt damit die fraglichen Aufsatzhöhen in natürlicher Größe. Die Vertikalen, auf welchen die einer Anfangsgeschwindigkeit v entsprechenden $E_0, E_1 \ldots E_5$ aufgetragen sind, wurden in der Abbildung 7 (s. S. 305) mit E_0, $E_1 \ldots E_5$ beschrieben.

Ist bei einer Feuerwaffe h $r$mal, λ $n$mal so groß, so sind die Ordinaten der Visierkurve oder die Aufsatzhöhen nrmal größer zu nehmen.

Die experimentelle Ermittelung der Koeffizienten A und a des Widerstandsgesetzes (3).

Der Koeffizient A ist in jenem h enthalten, für welchen nach (10) gesetzt wurde:

$$h = \frac{P + d}{A \pi \varrho^2 g}.$$

Die Ermittelung von h führt auch zur Berechnung von A, da die Größen P, d, ϱ und g bekannt sind.

Um die Formel (17) für den Bogen s in Funktion der Geschwindigkeiten c und v zur Ermittelung der Konstanten A und a oder h und a benützen zu können, ist die Ermittelung der Geschwindigkeit an mehreren Punkten der Bahn erforderlich. Es kann dies mit Hilfe elektromagnetischer Meßmethoden geschehen, welche Zeitbestimmungen bis auf Tausendstel Sekunden genau gestatten.

Am zweckmäßigsten wird zur Bestimmung der Geschwindigkeiten ein Punkt unmittelbar vor der Mündung, ein zweiter im Abstande s und ein dritter im Abstande $2s$ gewählt.

Mit der so ermittelten Anfangsgeschwindigkeit c und den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 am Ende der Bogen s und $2s$ ergibt die Formel (17):

$$s = \frac{h}{2} \log \frac{c^2 (v_1^2 + a_2)}{v_1^2 (c^2 + a^2)}, \qquad 2s = \frac{h}{2} \log \frac{c^2 (v_2^2 + a^2)}{v_2^2 (c^2 + a^2)}.$$

Die erste dieser Gleichungen mit 2 multipliziert und der zweiten gleich gesetzt, ergibt nach einer einfachen Reduktion

$$a^2 = \frac{v_1^2 (2 c v_2^2 - v_1^2 c^2 - v_1^2 v_2^2)}{v_1^4 - c^2 v_2^2}$$

und damit

$$h = \frac{2s}{\log \frac{c^2 (v_1^2 + a^2)}{v_1^2 (c^2 + a^2)}}.$$

Die Größe h läßt sich indessen auch durch einen Schießversuch bestimmen. Man hat dazu auf etwa 1000 m zu schießen und den Schieber des Visiers solange zu verschieben, bis die Scheibe getroffen wird. Durch 10 bis 12 Schüsse ist die Richtigkeit der Anschlagstellung danach zu bestätigen.

Ist die so ermittelte Aufsatzhöhe gleich $V = 2$ Zoll und der Abstand der Fliege vom Aufsatze gleich $\lambda = 18$ Zoll, so ist der Elevationswinkel α gleich

$$\alpha = \frac{V}{\lambda} = \frac{1}{9} = E_0 \frac{g h}{2 a^2}.$$

Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit $c = 565$ m/sec., d. i. nahe der früher angenommenen Maximalgeschwindigkeit sei. Wegen $a = 200$ und $Ah = 1000$ wird:

$$\frac{E_0}{A} = \frac{8}{9}.$$

In der Tabelle findet sich ein Verhältnis

$$\frac{E_0'}{A'} = \frac{v \cdot 72694}{v \cdot 74582}.$$

Es ist also:

$$\frac{E_0' + \varDelta E_0'}{A' + \varDelta A'} = \frac{8}{9}.$$

Von den Zuwächsen $\varDelta E_0'$ und $\varDelta A'$ setzt man voraus, daß sie sich so verhalten, wie die aus der Tabelle entnommenen Differenzen der Kolumnenwerte E_0' und A_0' zur nächstfolgenden Kolumne, daß also:

$$\varDelta E' : \varDelta A' = 0 \cdot 298 : 0 \cdot 118, \qquad \varDelta A' = 0 \cdot 393 \varDelta E',$$

somit:

$$\frac{E_0' + \varDelta E'}{A' + 0 \cdot 393 \varDelta E'} = \frac{8}{9}, \qquad \varDelta E' = 0 \cdot 0966, \qquad \frac{E_0}{A} = \frac{0 \cdot 63}{0 \cdot 71}, \qquad A = 0 \cdot 7.$$

Wegen $E = 1000 = Ah = 0 \cdot 7h$ ist $h = 1430$. Aus h läßt sich die Konstante A bestimmen.

Es ist hiernach leicht zu erkennen, was zu tun wäre, wenn es sich um ein Gewehr handelte, welches eine andere Anfangsgeschwindigkeit als die hier vorausgesetzte ergibt.

Innere Ballistik.

Zur Auffindung einer Beziehung zwischen Pulverladung, Gasdruck und Anfangsgeschwindigkeit fehlten, wie Petzval hervorhebt, zu seiner Zeit die nötigen Grundlagen. Es lassen sich also nur aus einzelnen erkannten Eigenschaften des Pulvers zum Teil, unter nicht zutreffenden Annahmen, einige Schlüsse ziehen.

So folgt aus der allgemeinen Eigenschaft jeder gasförmigen Flüssigkeit nach allen Richtungen den gleichen Druck auszuüben, daß nicht nur das Projektil, sondern auch das Rohr in Bewegung kommen müsse. Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes ist es hiernach sehr einfach die Größe des Rücklaufes eines Geschützes für den Moment zu berechnen, in welchem das Geschoß die Mündung vorläßt. Petzval findet für ein Geschütz von 16 Zentnern Gewicht, welches ein Geschoß von 8 Pfunden schießt, einen Rücklauf von $^1/_4$ Zoll.

Die Voraussetzung, daß sich alles Pulver plötzlich in Gas verwandle, welches sich nach dem Mariotteschen Gesetze ausdehnt, liefert einen Ausdruck für das Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit und ergibt den Laderaum zirka dem dritten Teil der Länge des Geschoßweges im Rohre gleich. Man hätte dabei den Anfangsdruck von 29178 Atmosphären vorauszusetzen, welchen Rumford durch seine Versuche (1792) bestimmte. Gegen das Eintreten dieses enormen Druckes spricht u. a. der Umstand, daß eine Formel, welche sich zur Berechnung von Röhrenstärken als sehr brauchbar erwiesen hat, im Nenner die Differenz des Koeffizienten der absoluten Festigkeit und des Gasdruckes enthält, also zu unendlichen Werten der Wandstärke führt, wenn die Gasspannung den Koeffizienten der absoluten Festigkeit erreicht.

Infolge der allmähligen Verbrennung des Pulvers erreicht die Gasspannung im Rohre das Maximum erst dann, wenn das Geschoß bereits einen Teil seines Weges im Rohre zurückgelegt hat. Die Spannungskurve zeigt daher ein Maximum, welches sich um so mehr verbreitert, je mehr sich die Pulverladung jenem Werte nähert, bei welchem das Maximum der Anfangsgeschwindigkeit erreicht wird. Im abfallenden Aste der Spannungskurve tritt in dem Augenblicke ein Wendepunkt ein, wenn sämtliches Pulver verbrannt ist.

Nach Versuchen von Hutton (1773—1779) ist bei kleinen Pulverladungen das Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit der Pulverladung proportional.[1]) In dem Maße, in welchem die Größe der Ladung steigt, wächst die Anfangsgeschwindigkeit langsamer, und es wird Pulver un-

1) Dieses Resultat findet sich bei 36 pfd. glatten französischen Marinegeschützen bestätigt. Hélie, Ballistique expérimentale T. 1. p. 157.

verbrannt aus dem Rohre geschleudert. Wird das Doppelte jener Pulverladung überschritten, bei welcher noch alles Pulver verbrennt, so tritt das Maximum der Anfangsgeschwindigkeit ein. Bei weiterer Vermehrung der Pulverladung macht sich eine ausgesprochene Abnahme der Anfangsgeschwindigkeit geltend.

Für Pulverladungen, welche nahe das Maximum der Anfangsgeschwindigkeit erzeugen, verbreitet sich das Maximum der Druckkurve derart, daß man statt des veränderlichen Druckes einen mittleren Druck voraussetzen darf. Die Höhe desselben erscheint von der zu bewegenden Masse abhängig, wächst mit derselben, nähert sich aber schließlich einer bestimmten Grenze, die nicht überschritten werden kann, wie groß auch die bewegende Masse genommen werde. Der Druck der Pulvergase erscheint hiernach als eine Funktion der Masse des Projektiles. Denkt man sich diese Funktion in eine Reihe entwickelt, so müßte diese mit einem jener Masse proportionalen Gliede beginnen. Für kleine Massen könnte man diese stark konvergierende Reihe auf das erste Glied beschränken. Die Kraft, welche das Pulver auf das Geschoß ausübt, würde hernach, so wie die Schwerkraft, der Masse des Geschosses proportional sein. Für Scheibenpulver könnte hiernach als Beschleunigung g' dieser Kraft

$$g' = 20000\, g,$$

das 20000 fache der Beschleunigung der Schwere genommen werden.

Für größere Massen wäre allerdings ein Faktor μ beizufügen, welcher die Beschleunigung umsomehr herabsetzt, je größer die zu bewegende Masse wird. Die Anfangsgeschwindigkeit eines Projektiles wäre hiernach durch:

$$v = 200 \sqrt{\mu g l}$$

gegeben, worin l der Weg des Geschosses im Rohre ist. Solange μ sich nur wenig von der Einheit unterscheidet, würden innerhalb größerer Grenzen, bei Anwendung von Pulverladungen, welche nahezu das Maximum der Geschwindigkeit erzeugen, leichte und schwere Geschosse aus derselben Waffe die gleiche Anfangsgeschwindigkeit erhalten.[1])

Da es wegen Mangel der nötigen Grundlagen nicht möglich ist, auf theoretischem Wege eine Formel zur Berechnung derjenigen Pulverladung zu erlangen, welche das Maximum der Anfangsgeschwindigkeit

---

1) Die schon erwähnten Versuche mit dem glatten französischen 36 pfd. Marinegeschütze ergaben für die 14 kg. schweren Hohlgeschosse für alle Pulverladungen zirka 40 m/sec mehr Anfangsgeschwindigkeit als für die 17 $^1/_2$ kg schweren Vollkugeln. Hélie, I, p. 157.

erzeugt, so gab Petzval eine empirische Formel an, welche hierzu benutzt werden kann. Diese Pulverladung $\mathfrak{P}$ ist demnach:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{3}{8}\sqrt{l\gamma}.$$

Dabei sind $\mathfrak{P}$ und l, die Länge des Geschoßweges im Rohre, in Kalibern, und γ ist durch die Zahl kalibermäßiger Wasserkugeln gegeben, welche dem Gewichte des Projektiles gleichkommen. Wird mit Kugeln geschossen, so ist γ die relative Dichte.[1])

Für einen Kugelstutzen von $^1/_2$ Zoll (13 mm) Kaliber und einem Geschoßwege von 32 Zoll gleich 64 Kaliber (für Blei $\gamma = 11.3$) ergibt diese Formel eine Ladung von 10 Kalibern oder 5 Zoll Länge. Tatsächlich ladet man mit der Hälfte dieser Pulverladung d. i.: 2·5 Zoll und erreicht dabei eine Anfangsgeschwindigkeit, welche von dem Maximum wenig verschieden ist. Ein Körnchen Pulver mehr oder weniger macht dabei nichts aus; überdies gewährt diese Pulverladung eine gewisse Sicherheit und strengt den Lauf nicht an.

Für ein Langgeschoß ist $\gamma = 25$ und damit wird die Pulverladung 15 Kaliber gleich $7\,^1/_2$ Zolle gefunden. 3,75 Zolle sind als die entsprechende Ladung zu bezeichnen.

Bei Kriegsgewehren nimmt man nur etwa $\mathfrak{P}/8 = 1$ Zoll Ladungslänge. Dadurch erhält man eine viel geringere Anfangsgeschwindigkeit und macht eigentlich das lange, schwere Gewehr zu einer Pistole. Wenn der Rückstoß bei größeren Ladungen als zu bedeutend befunden wird, so hätte man dem Projektile eine andere Gestalt geben sollen. Ein Gewehr, welches nicht stößt, schießt auch nicht scharf. Die französischen Chassepotgewehre wurden mit $\mathfrak{P}/4$ geladen, sie ergaben größere Anfangsgeschwindigkeiten und rasantere Bahnen. Ein weiterer Nachteil so geringer Pulverladungen ist der, daß das Gewehr für kleine Änderungen in der Pulvermenge empfindlich wird.

Bei einem 24 Pfdr. mit einem Kaliber von $5\,^1/_2$ Zoll (14,6 mm), einer Länge der Geschoßbahn von 108 Zollen, d. i. von 22 Kalibern, und Kugeln aus Gußeisen ($\gamma = 7{,}7$) ist $\mathfrak{P} = 4\,^7/_8$ Kaliber oder 27 Zolle. Diese Ladung würde den vierten Teil des Rohres anfüllen. Man verwendet auch hier nur die Hälfte der Maximalladung, bedient sich einer Ladungslänge von 13 bis 14 Zoll, also eines Pulvergewichtes von $9\,^3/_4$ Pfund, d. i. einer etwa halbkugelschweren Ladung, wenn es sich um die Erzielung bedeutender Effekte handelt.

---

1) Ich konnte diese oder eine ähnliche Formel in der mir gegenwärtig zur Verfügung stehenden Literatur nicht auffinden. Ich kann auch nicht angeben, ob sie von Petzval herrührt, oder ob sie sich in älteren artilleristischen Werken findet.

Für den früher angeführten Kugelstutzen, welcher mit einem Gewicht von $P = 1/40$ Pfund und einer Pulverladung von etwa $\mathfrak{P} = 1/72$ Pfund gebraucht wird, ergibt sich der mittlere Gasdruck nach der Formel: $p = \frac{(P + \mathfrak{P})\,20000}{F} \cdot \frac{18}{19} = 3753$ Pfd. auf den Quadratzoll oder 294 Atmosphären. Die Zahl 20000 gilt zunächst für Scheibenpulver: für Geschützpulver dürfte sie weitaus geringer ausfallen.

Die Ermittelung der Gasspannung im Feuerrohre kann zur Berechnung der Wandstärke δ benutzt werden, wozu Petzval die Formel anführte:

$$\frac{r + \delta}{r} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p}{\mathfrak{A} - p}},$$

worin $\mathfrak{A}$ der Koeffizient der absoluten Festigkeit und r der Halbmesser der Bohrung ist.

Einige Berichtigungen zu Kuliks Quadratzahlentafeln.

Von Oskar Bergmann in Leipzig.

Bekanntlich hat Kulik der Universität Prag bei der Feier ihres fünfhundertjährigen Bestehens Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen für die Wurzeln 1—100000 überreicht (gedruckt Leipzig 1848), und verdient diese große rechnerische Leistung sicher auch allseitige Anerkennung.

Viele Druckfehler, welche in diesem umfangreichen Werke gefunden wurden, hat Kulik S. 402 daselbst mitgeteilt, aber durch nur teilweise Ausbesserung der Fehler eher eine Verwirrung, als eine Verbesserung des Werkes erzielt.

Jahrzehntelange Beschäftigung mit den Zahlen ließ mich, der ich eigentlich der Universität Leipzig eine ähnliche Jubiläumsausgabe zugedacht, und die Quadratzahlen wie Kulik bis 100000 berechnet hatte, noch eine weitere Anzahl Fehler in obigen Tafeln entdecken, ich halte es jedoch für meine Pflicht, nicht zu zögern und den Benützern der Kulikschen Tafeln diese Fehler mitzuteilen.

Ich habe noch 19 Fehler in diesen Tafeln gefunden, aber durch die Konstruktion der Tafeln werden durch diese Fehler 379 Quadrat- und 250 Kubikzahlen falsch. Bei allen von mir gefundenen falschen Zahlen besteht die Wurzel der Zahl aus einer Kopfzahl und einer zweifferigen Endzahl. Die Quadratzahl besteht aus Kopf-, Mittel- und vierzifferiger Endzahl.

Die Fehler sind nun folgende:

1. Falsche Kopfzahlen der Wurzeln

Seite	statt	lies
245	506	560
	606	660
	706	760
	806	860
	906	960

Hierdurch sind 250 Quadrat- und 250 Kubikzahlen falsch.

2. Falsche Kopfzahlen der Quadratzahlen

Seite	Nr.	statt	lies
191	84700—84749	417	717
314	7811—7849	60	61

Falsch 89 Zahlen.

3. Falsche Mittelzahlen der Quadratzahlen

Seite	Nr.	statt	lies
11	80231	707	701
27	80631	125	135
44	31068	525	522
99	92443	510	570
157	73886	944	914
157	73889	985	958
220	25470—25475	672	872
273	96758	111	211
279	66901	564	574
401	79994—79999	204	904

Falsch 20 Zahlen.

4. Falsche Endzahlen der Quadratzahlen

Seite	Nr.	statt	lies
54	1340	5604	5600
	1342	0960	0964

Falsch 20 Zahlen, da alle 10 in einer Horizontallinie gelegenen Quadratzahlen dieselbe vierzifferige Endzahl besitzen.

Über graphische Zusammensetzung von Kräften im Raume.

Von K. TH. VAHLEN in Greifswald.

Während man für die graphische Zusammensetzung von Kräften in der Ebene ein Verfahren von klassischer Einfachheit und Eleganz besitzt, ist dasselbe für Kräfte im Raume nicht der Fall. Vielmehr verwenden die hierfür angegebenen Konstruktionen Zerlegungen der Kräfte, die der graphischen Methode, die nur Grund- und Aufriß anwenden sollte, fremd sind. Culmann z. B. zerlegte — ganz in Poinsotschem Sinne — jede Kraft des gegebenen Systems in 2 Komponenten, deren eine durch einen gegebenen Punkt geht, deren andere ein Paar ist; oder — wie bei Monge — deren andere in einer gegebenen Ebene liegt. Die auf Grund solcher Zerlegungen gegebenen Zusammensetzungen von Kräften[1]) werden naturgemäß weitläuftig und umständlich. Man konnte erwarten, daß man ohne solche vorausgehenden Zerlegungen direkt aus Grund- und Aufriß der gegebenen Kräfte, Grund- und Aufriß der gesuchten Kräfte in einfacherer Weise würde konstruieren können. Im folgenden gebe ich zwei solcher Konstruktionen, deren erste das gegebene System auf ein Kraftkreuz, deren zweite es auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar reduziert. Bei beiden werden lediglich Kräfte- und Seilpolygone in der Grundriß- und in der Aufrißebene benutzt.

Es seien also die Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_n$ zusammenzusetzen. Gesucht wird ein Kraftkreuz, bestehend aus zwei Kräften $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_n$, so daß die geometrische Summe $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \cdots + \mathfrak{P}_n = \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_0$ ist. Stehen Kräfte im Gleichgewicht, dann auch ihre Projektionen, weil die Projektion eines Kräfteparallelogramms wieder ein solches ist. Also ist auch

$$\mathfrak{P}_1' + \cdots + \mathfrak{P}_n' = \mathfrak{S}_n' - \mathfrak{S}_0'$$

und

$$\mathfrak{P}_1'' + \cdots + \mathfrak{P}_n'' = \mathfrak{S}_n'' - \mathfrak{S}_0'',$$

wenn $\mathfrak{P}_h'$, $\mathfrak{S}_0'$, $\mathfrak{S}_n'$ die Horizontal- und $\mathfrak{P}_h''$, $\mathfrak{S}_0''$, $\mathfrak{S}_n''$ die Vertikalprojektionen von $\mathfrak{P}_h$, $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_n$ sind. Um ein Kraftkreuz $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_n$ zu finden, genügt es also, die Kräfte $\mathfrak{S}_0'$, $\mathfrak{S}_n'$, $\mathfrak{S}_0''$, $\mathfrak{S}_n''$, so zu konstruieren, daß

$$\mathfrak{P}_1' + \cdots + \mathfrak{P}_n' = \mathfrak{S}_n' - \mathfrak{S}_0'$$

und

$$\mathfrak{P}_1'' + \cdots + \mathfrak{P}_n'' = \mathfrak{S}_n'' - \mathfrak{S}_0''$$

1) S. die Übersicht hierüber in: Enzykl. d. Math. IV. 1. S. 381 ff.

ist, und daß $\mathfrak{S}_0'$, $\mathfrak{S}_0''$ und $\mathfrak{S}_n'$, $\mathfrak{S}_n''$ die Projektionen zweier Kräfte $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_n$ sind. Man konstruiert zunächst irgend ein Seilpolygon $\mathfrak{S}_0', \mathfrak{S}_1', \mathfrak{S}_2', \cdots, \mathfrak{S}_n'$ für das System $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \cdots \mathfrak{P}_n'$, so daß also

$$\mathfrak{P}_1' = \mathfrak{S}_1' - \mathfrak{S}_0'$$
$$\mathfrak{P}_2' = \mathfrak{S}_2' - \mathfrak{S}_1'$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{P}_n' = \mathfrak{S}_n' - \mathfrak{S}_{n-1}'$$
$$\mathfrak{P}_1' + \mathfrak{P}_2' + \cdots + \mathfrak{P}_n' = \mathfrak{S}_n' - \mathfrak{S}_0' \quad \text{ist.}$$

Nun kann das Seilpolygon $\mathfrak{S}_0'', \ldots, \mathfrak{S}_n''$ für das System $\mathfrak{P}_1'', \ldots, \mathfrak{P}_n''$ nicht mehr ganz beliebig konstruiert werden. Vielmehr ist bereits seine erste Ecke P_1'' auf $\mathfrak{P}_1''$ bestimmt, ebenso seine letzte Ecke P_n'' auf $\mathfrak{P}_n''$. Legt man erst versuchsweise $\mathfrak{S}_0''$ beliebig durch P_0'' und macht $\mathfrak{S}_0''$ so lang, daß $\mathfrak{S}_0'$ und $\mathfrak{S}_0''$ zusammen die Projektionen einer Kraft $\mathfrak{S}_0$ repräsentieren, so wird dadurch das ganze Seilpolygon $\mathfrak{S}_0'', \cdots, \mathfrak{S}_n''$ bestimmt. Dreht man $\mathfrak{S}_0''$ um P_0'', gibt $\mathfrak{S}_0''$ immer die betreffende Länge und konstruiert das Seilpolygon $\mathfrak{S}_0'', \ldots, \mathfrak{S}_n''$, so dreht sich nach einem bekannten Satz $\mathfrak{S}_n''$ um einen Punkt A der zur Projektionsachse Senkrechten durch P_1''. Dieser Punkt A ist also durch ein einziges solches Seilpolygon $\mathfrak{S}_0'', \ldots, \mathfrak{S}_n''$ bestimmt. Nachdem aus *einem* solchen der Punkt A gefunden, ergibt sich $\mathfrak{S}_n''$ in der Graden AP_n'' eindeutig, und aus $\mathfrak{S}_n''$ kann man das Seilpolygon $\mathfrak{S}_n'', \mathfrak{S}_{n-1}'', \ldots, \mathfrak{S}_0''$ rückwärts konstruieren. Alsdann sind $\mathfrak{S}_0', \mathfrak{S}_0''$ die Projektionen einer Kraft $\mathfrak{S}_0$, und $\mathfrak{S}_n'$, $\mathfrak{S}_n''$ die Projektionen einer Kraft $\mathfrak{S}_n$, und es ist $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_0$ ein resultierendes Kraftkreuz der Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_n$. Dabei wird also der Satz angewendet:

Bilden von einem räumlichen Kräftesystem die beiden Projektionen Gleichgewichtssysteme, so ist das System selbst im Gleichgewicht; weil nämlich ein Viereck, dessen beide Projektionen Parallelogramme sind, selbst ein Parallelogramm ist.

Will man das System $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_n$ auf eine Einzelkraft $\mathfrak{R}$ und ein dazu senkrechtes Paar $\mathfrak{B}_{n+1} - \mathfrak{B}_0$ reduzieren, so füge man zunächst eine Kraft $\mathfrak{P}_{n+1}$ dem System hinzu, die nach Größe und Richtung mit der nach Größe und Richtung bekannten Kraft $-\mathfrak{R}$ übereinstimmt; dann liefert obige Konstruktion für $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \cdots + \mathfrak{P}_{n+1}$ ein Kräfte*paar* $\mathfrak{T}_{n+1} - \mathfrak{T}_0$, dessen Projektion auf eine zu $\mathfrak{R}$ senkrechte Ebene das gesuchte Paar $\mathfrak{B}_{n+1} - \mathfrak{B}_0$ ergibt. Schließlich erhält man durch Anwendung derselben Konstruktion auf $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \cdots + \mathfrak{P}_n + \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_{n+1}$ die Einzelkraft $\mathfrak{R}$.

Eldena i. P., April 1907.

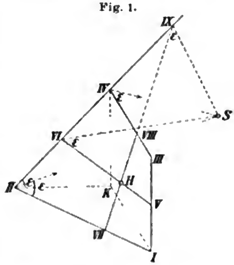
Lösnng einer geometrischen Aufgabe in bezug auf kotierte Pläne.[1])

Von J. Schnöckel in Berlin.

Bei der tachymetrischen Aufnahme des Geländes nach ebenen Dreiecken und windschiefen Vierecken, mit welch letzteren sattelförmige Geländeflächen sich am günstigsten aufnehmen lassen, kann die Berechnung der Kote eines seiner Lage nach gegebenen Punktes *H* (Fig. 1 und 2) erforderlich werden, wenn die Koten der Eckpunkte (*I, II, III, IV* im windschiefen Viereck) gemessen und bekannt sind. Liegt *H* in einem ebenen Dreieck, so läßt sich seine Kote aus den Koten der drei Eckpunkte dadurch finden, daß man die Verbindungslinie von *H* mit einem Eckpunkt bis zum Schnitt mit der Gegenseite verlängert, die abgeschnittenen Stücke graphisch aus der Karte entnimmt und nun die Koten des Schnittpunktes und des Punktes *H* interpoliert. Die sattelförmige Fläche des windschiefen Vierecks ist dagegen ein hyperbolisches Paraboloid, so daß man die Kote von *H* nicht durch Interpolation finden kann, ohne die Lage derjenigen die krumme Fläche erzeugenden Geraden (in Fig. 1 und 2 *V VI* und *VII VIII*), die durch *H* gehen, vorher rechnerisch oder konstruktiv festzulegen.

Die analytische Lösung führt auf eine für die praktische Rechnung ungeeignete Gleichung zweiten Grades, weshalb im folgenden eine einfache geometrische Konstruktion mit Zeichendreiecken und Zirkel, den man hier vorteilhaft durch ein Stück Pauspapier ersetzt, beschrieben werden soll. Die durch *H* zu legenden Geraden müssen die Seiten des windschiefen Vierecks nach gleichem Verhältnis teilen.

Fig. 1.



1. Abschnitt.

Man zieht zu irgend zwei aufeinanderfolgenden Vierecksseiten z. B. *II I* und *III IV* in Fig. 1 mit Hilfe zweier Zeichendreiecke Parallele durch die Ecken *I* und *IV*, welche sich in *K* schneiden.

Den Winkel $IV\,II\,K = \varepsilon$ zeichnet man auf Pauspapier durch, trägt ihn in *II* an die Seite *II I*, in *IV* an *IV III* nach links an und erhält *S* als Schnittpunkt der freien Schenkel.

1) Wird mit Zustimmung der beiderseitigen Schriftleitungen gleichzeitig in der Zeitschrift für Vermessungswesen abgedruckt.

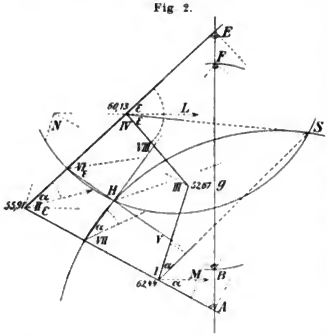
Sollen durch einen beliebig gewählten Punkt *H* die die windschiefe Fläche erzeugenden beiden Geraden gelegt werden, so bewegt man das Pauspapier mit dem Winkel ε derart, daß der Scheitelpunkt auf der Seite *II IV* entlanggleitet, während der linke Schenkel durch den Punkt *S* geht. Sobald der rechte Schenkel den Punkt *H* trifft, was in Lage *VI V* und *IX VII* der Fall sein wird, sind *V H VI* und *VII H VIII* die gesuchten Geraden.

Statt des Pauspapiers, dessen Verwendung besonders zweckmäßig ist, wenn mehrere Punkte *H* gegeben sind, kann man den Winkel ε mit dem Zirkel an die Seiten *II I*, *IV III* und nachträglich an *HS* von *H* aus nach rechts antragen. Das Lot in *H* auf dem freien Schenkel[1]) und das Mittellot von *HS* schneiden sich dann im Zentrum eines Kreises, der durch *H* und *S* geht und die Seite *II IV* in den gesuchten Punkten *VI* und *IX* trifft. (In der Figur ist der Kreis nicht gezeichnet.)

2. Abschnitt.

Die Konstruktion kann auch von der Seite *II I* aus, anstelle von *II IV* und mit Winkel $K\,II\,I = \alpha$ anstatt ε oder allgemein von jeder Vierecksseite aus mit dem entsprechenden Winkel ausgeführt werden (vgl. Fig. 2). Wird der Zirkel benützt, so trägt man α von *H* aus an *HS* nach links an und errichtet in *H* auf dem freien Schenkel ein Lot, das sich mit dem Mittellot von *HS* im Zentrum eines durch *H* und *S* gehenden Kreises schneidet. Seine beiden Schnittpunkte auf *II I* liegen mit *H* auf den gesuchten Geraden.

Fig. 2.



Zweckmäßig ist es, den ganzen α und ε enthaltenden Strahlbüschel *II IV*, *II K*, *II I* auf Pauspapier zu bringen. Dann läßt sich *S* von den drei Ecken *IV*, *II* und *I* aus gleichzeitig vorwärts abschneiden, was eine Kontrolle für die richtige Lage des Punktes *S* gibt. Die Gerade *VI H V* wird dann mit Hilfe von ε, dagegen *VII H VIII* mit α abgesetzt, sodaß die

1) Dieser Schenkel bildet mit *HS* den Tangentenwinkel ε des Kreises, der gleich den Peripheriewinkeln *S VI H* und *S IX H* ist.

sonst notwendige Verlängerung IVIX fortfällt und die Bestimmung korrekter wird.

In Fig. 1 ist IIK die gemeinschaftliche Basis der beiden Konvergenzdreiecke $IIKIV$ bezüglich der Vierecksseiten IIII, IIIV und $IIKI$ bezüglich III, IIIIV. Die Richtung der Basis kann man auf vier verschiedenen Wegen konstruieren; so sind in Fig. 2 die Seiten III und IIII dazu benützt und die Basisrichtung $NIVL = IM$ erhalten worden.

Durch Verlängerung je zweier gegenüberliegender Seiten des Vierecks zum vollständigen Vierseit entstehen vier Dreiecke.[1]) Die ihnen umgeschriebenen Kreise gehen durch S, woraus eine andere Konstruktion dieses Punktes folgt.

Er liegt innerhalb des Winkels $DIIIC$, wenn K innerhalb des Vierecks liegt. Sind zwei gegenüberliegende Vierecksseiten einander parallel, so fällt S mit dem Schnittpunkt der beiden nichtparallelen Seiten zusammen.

Fällt man von S Lote auf die Seiten, z. B. in Fig. 2 auf III und IIIV, so gestaltet sich die weitere Konstruktion sehr einfach. Entsprechend dem im ersten Abschnitt gegebenen Verfahren mit dem Strahlbüschel bewegt man hier den rechten Winkel eines Zeichendreiecks so, daß der Scheitelpunkt die feste Gerade g, die Verbindungslinie der Fußpunkte A und E durchläuft, während der eine Schenkel durch S geht. Trifft der andere Schenkel[2]) den Punkt H, so gibt er in FH und BH die Lage der gesuchten Geraden an. Eine Kontrolle besteht wieder darin, daß die Fußpunkte aller Lote von S auf die Seiten in einer Geraden g liegen müssen.

Beispiel einer Kotenberechnung.

In Fig. 2 sind die Koten der Eckpunkte des windschiefen Vierecks eingetragen. Greift man im Maßstab 1 : 1000 die Längen $IIIV = 21{,}1$ m, $IIII = 36{,}8$ m usw. ab, so erhält man mit Anwendung des logarithmischen Rechenschiebers Kote V = Kote $III + \frac{21{,}1}{36{,}8} \cdot 9{,}77 = 58{,}27$ und Kote VI = Kote $II + \frac{21{,}2}{51{,}1} \cdot 4{,}22 = 57{,}65$. Hieraus findet sich Kote H = Kote $VI + \frac{21{,}0}{46{,}8} \cdot 0{,}62 = 57{,}93$. Aus den Koten VII und VIII ergibt sich für H andererseits 57,96. Die gute Übereinstimmung läßt einen Schluß auf die Genauigkeit der Konstruktion zu.

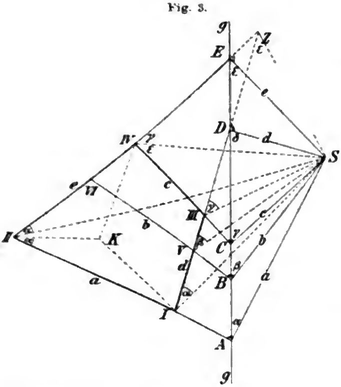
1) Das vollständige Vierseit ist in den Figuren nicht ausgezogen.

2) Dieser Schenkel umhüllt eine Parabel.

3. Abschnitt.

Zum Beweise der bisher aufgestellten Behauptungen geht man von Fig. 3 aus. Der Strahlbüschel $S = a, b, c, d, e$ und die Punktreihe $g = A, B, C, D, E$ mögen sich in perspektiver Lage befinden. In diesen Punkten sei jeder Strahl unter dem gleichen Winkel $IIAS = VIBS = IVCS = ZDS = ZES$ gebrochen. Dann sind $AIDS$, $BVDS$, $CIIIDS$ Sehnenvierecke, weil $\sphericalangle SDI = 180^0 - ZDS = 180^0 - IAS = 180^0 - VBS = 180^0 - IIICS$. Also ist $\sphericalangle DAS = DIS = \alpha$, $\sphericalangle DBS = DVS = \beta$, $DCS = DIIIS = \gamma$ als Peripheriewinkel in den drei Kreisen über der Sehne DS.

Fig. 3.



Somit ist der Strahlbüschel $S = a, b, c$ ähnlich dem gleichfalls perspektiven Büschel SI, $SIII$, SV und auch dem Büschel SII, SIV, SVI. Im Anschluß an die Darstellungsweise, die Professor O. Staude[1]) in seiner „Analytischen Geometrie" § 5, Nr. 2, 8 und 9 gibt, folgt daraus:

Befindet sich ein Strahlbüschel $S = a, b, c, d, e$ und eine Punktreihe $g = A, B, C, D, E$ in perspektiver Lage und sind die Strahlen in diesen Punkten unter gleichen Winkeln gebrochen, so schneiden drei von ihnen die anderen beiden in je drei entsprechenden Punkten, die dasselbe einfache Teilungsverhältnis haben: $(A\,C\,B) = (I\,III\,V) = (II\,IV\,VI)$, $(C\,IV\,III) = (A\,II\,I)$.

Aus der Ähnlichkeit der perspektiven Strahlbüschel mit dem gemeinsamen Scheitel S und den Punktreihen $d = I, III, D$ und $e = II, IV, E$ einerseits, a und c andererseits folgt, daß *alle* in der Punktreihe g gebrochenen Strahlen des Büschels S in den Schnittpunkten mit a um Winkel α, mit c um γ, mit d um δ und mit e um ε gegen Punkt S gerichtet sind. Man kann also vom Viereck $I\,II\,III\,IV$ oder vom vollständigen Vierseit (in Fig. 3 teilweise stark ausgezogen) a, c, d, e als gegeben ausgehend, den Scheitel S von den vier resp. sechs Ecken aus durch die Richtungen IS, IIS usw. festlegen, sofern einer der Winkel α, γ, δ oder ε bekannt ist.

[1]) „Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene". Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1905.

Nun ist KIV gleich und parallel IIII, und die Strahlbüschel $d = I, III, D$ und $e = II, IV, E$ sind, wie oben bewiesen, ähnlich. Daraus folgt:

$$KIV : IIIV = IIII : IIIV = DS : ES.$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle KIVII = \sphericalangle de = \sphericalangle DSE.$$

Mithin sind die Dreiecke $IIKIV$ und EDS ähnlich, sodaß $\sphericalangle IVIIK = \varepsilon$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $IIKI$ und ACS folgt weiter, daß $\sphericalangle KIII = \alpha$. Demnach sind die Richtungswinkel $\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon$ aus dem gegebenen Viereck leicht zu konstruieren.

Bestimmt man (vgl. Abschnitt 2) die Basisrichtung der Konvergenzdreiecke dadurch, daß IIN parallel und gleich IIII gemacht wird, so ist $IINKIV$ (Fig. 2 und 3) ein Parallelogramm und die Basisrichtungen NIV und IIK sind daher einander gleich. Die in einer Punktreihe g rechtwinklig gebrochenen Strahlen wie a, b usw. sind nach einem bekannten geometrischen Lehrsatz Tangenten an eine Parabel mit dem Brennpunkt S und der Scheiteltangente g. Ferner ist IIK die Richtung der Hauptachse, da sich nun $\sphericalangle KIIA$ und $IIAE$ zu 90^0 ergänzen.

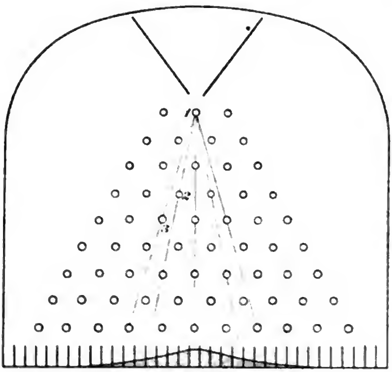
Es ist $\sphericalangle IZII = \sphericalangle de = DSE = ISII = IIISIV$ wegen der Ähnlichkeit der Strahlbüschel mit den Punktreihen g, a, c. Also sind $IIISZ$ und $IIIIVSZ$ Kreisvierecke.[1]) Daher ist ferner: $\sphericalangle SZIII = SIVIII = IVIIK = \varepsilon$. Ist Z' die zweite (in Fig. 3 nicht gezeichnete) äußere Ecke des vollständigen Vierseits a, c, d, e, so ist entsprechend $\sphericalangle IIIZ'S = KIII = \alpha$. Da nun K der *innerhalb* des Vierecks liegende Konvergenzpunkt ist, so sind α und ε immer größer als Null und kleiner als $\sphericalangle IVIII$. Punkt S liegt daher stets außerhalb des vollständigen Vierseits in der Winkelfläche $ZIIIZ'$. Auch ist leicht erkennbar, daß S auf der Geraden ZZ' liegt, wenn IIIIIIIV ein Kreisviereck, daß er aber mit Z oder Z' zusammenfällt, wenn es ein Paralleltrapez ist.

1) Dies ist eine aus der Geometrie der Parabel schon bekannte Eigenschaft.

Experimentelles zum Gaußischen Fehlergesetz.

Von Otto Gruber in München.

Auf Veranlassung von Herrn Prof. Sommerfeld und im Anschluß an seine Vorlesung über kinetische Gastheorie wurden von meinem Bruder und mir einige Versuche angestellt mit der „Quincunx zur Illustration des Fehlergesetzes von Francis Galton"[1]) aus der hiesigen mathematisch-physikalischen Sammlung des Staates.



Schema der Quincunx.

Auf einem geneigten Brett sind etwa 1000 Nägel in gleichseitigen Dreiecken mit einem Zwischenraum von 8 mm angeordnet. Zwischen ihnen rollen aus einem Trichter Schrotkugeln herab und werden an der Basis von 29 Fächern aufgenommen (siehe Abbildung). Die Kugeln sollen sich auf die einzelnen Fächer nach dem Gaußischen Fehlergesetz verteilen, mit dem Maximum der Dichte in dem mittelsten Fach.

Es wurden 32 Versuche mit insgesamt 22 162 Kugeln in 4 Gruppen angestellt: 1. mit Schrotkugeln von 2,2 mm Durchmesser, 2. mit solchen von 1,2 mm Durchmesser und zwar a) bei einer Neigung des Brettes von 12° gegen den Horizont, b) bei einer Neigung von $28\frac{1}{2}$°. Die Kugeln in den einzelnen Fächern wurden abgezählt.

Die Figuren 1 und 2 geben zwei charakteristische Einzelversuche wieder (die Ordinaten proportional den Kugelzahlen in dem betreffenden Fache, die Abszissen gleich der von der Mitte gerechneten Fächerzahl); die Figuren 3 bis 6 stellen das Mittel aus den 4 Gruppen der je unter gleichen Umständen angestellten Einzelversuche dar.

1) Siehe Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892, S. 154 f. u. Nachtrag S. 6.

Es ergaben sich Abweichungen von der Rechts-Links-Symmetrie der Kugelverteilung um die Mitte und zwar einmal unregelmäßige, die auf die zu geringe Empfindlichkeit der an der Quincunx angebrachten Libelle und die dadurch bedingten zufälligen Justierungsfehler des Brettes zurückzuführen sind, und dann regelmäßige nach der rechten Seite, die

Fig. 1.

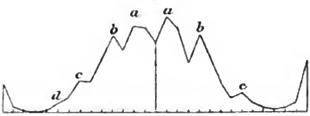
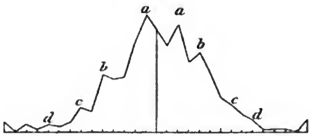


Fig. 2.



vermutlich ihre Ursache in einer leichten Verwerfung des Holzes haben und sich namentlich in Fig. 3 deutlich ausprägen.

Um die Resultate der einzelnen Versuche besser miteinander vergleichen zu können, wurden alle Versuche auf eine Kugelsumme von 500 Kugeln reduziert. Mit der Gaußischen Fehlerkurve wurden die

Fig. 3.

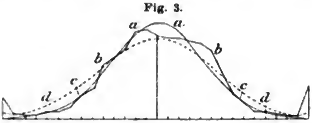


Fig. 4.

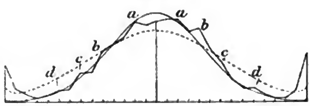


Fig. 5.

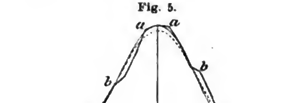
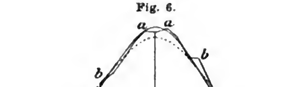


Fig. 6.



Ergebnisse nach dem Vorgehen von Jordan[1]) in der Weise verglichen, daß zunächst die mittlere Abweichung von der Mitte berechnet wurde (als Wurzel aus der Summe der mit den entsprechenden Kugelzahlen multiplizierten Fächerzahlquadrate gebrochen durch die Gesamtkugelzahl). Dann wurde mittels der Tabelle von Jordan, die die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen Null und dem n-fachen mittleren Fehler angibt, die dieser mittleren Abweichung entsprechende Gaußische Fehlerkurve gesucht.

1) Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 5. Aufl. Stuttgart 1904, I. Bd. § 139, S. 559 ff, u. Anhang S. [21].

Es ergaben sich die in der vorletzten Spalte wiedergegebenen mittleren Abweichungen für die Mittelwerte der einzelnen Versuchsgruppen.

	Aus sämtlichen Fächern	Ohne die drei äußersten Fächer
I. Gruppe (2,2 mm Kugeln, 12° Neigung)	± 5,3 Fächer	± 4,1 Fächer
II. „ (2,2 mm „ , 28½° „)	± 6,1 „	± 4,26 „
III. „ (1,2 mm „ , 12° „)	± 3,55 „	± 3,38 „
IV. „ (1,2 mm „ , 28½° „)	± 4,44 „	± 3,9 „

Aus dieser Tabelle geht hervor, daß einmal der größeren Kugelgröße, dann aber auch einer größeren Neigung des Brettes eine größere mittlere Abweichung entspricht.

Die mit diesen mittleren Abweichungen gefundenen theoretischen Kurven (in Fig. 3 bis 6 die punktierten Kurven) schmiegen sich den aus den Versuchen erhaltenen sehr schlecht an. Der Grund liegt im Bau des Instrumentes. Es sollten nämlich in die äußersten Fächer nur diejenigen Kugeln fallen, die eine die Breite des Instrumentes überschreitende Abweichung haben. Bei dem vorliegenden Instrument sind jedoch sämtliche Nägel in einem gleichseitigen Dreieck angeordnet, an dessen oberer Spitze die Trichtermündung liegt. Kugeln, die so abprallen, daß sie aus diesem Dreieck herausgeraten, begegnen dort keinem Hindernis mehr und kommen daher in größerer Anzahl in die äußeren Fächer, als wenn ihnen auch außerhalb des Dreieckes Nägel entgegenstünden. Es wäre also zweckmäßiger auch den Raum außerhalb des benagelten Dreieckes mit Nägeln auszufüllen entsprechend der von Galton angegebenen Abbildung (siehe obiges Zitat).

Da mehrere Versuche zeigten, daß die Kugelzahlen in dem vierten Fache von außen bereits nahezu Null sind, wurden von mir die in die drei äußersten Fächer fallenden Kugeln weggelassen und ohne diese die mittlere Abweichung berechnet. Sie findet sich in der letzten Spalte der Tabelle.

Die mit diesen mittleren Abweichungen gefundenen theoretischen Kurven (in Fig. 3 bis 6 die ausgezogenen) schmiegen sich den aus den Versuchen gewonnenen sehr gut an. Hierdurch zeigt sich die Berechtigung unsere Quincunx in der Tat als Mittel zur Veranschaulichung des Gaußischen Fehlergesetzes anzusehen.

Eine Eigentümlichkeit der Versuchskurven ist das regelmäßige Vorkommen von Zacken. Diese treten bei sämtlichen Einzelversuchen sehr deutlich und charakteristisch hervor (z. B. Fig. 1 u. 2). Bei den Mittelwerten der Kugelzahlen für die einzelnen Fächer (Fig. 3 bis 6)

überdecken sich diese Zacken gegenseitig etwas wegen der oben erwähnten unregelmäßigen Abweichung in der Verteilung, doch sind sie auch hier deutlich vorhanden. Es lassen sich 4 Paare nahezu symmetrisch zur Mitte liegender Zacken erkennen. Sucht man für die einzelnen Versuchsreihen jeweils das dem einzelnen Zacken im Mittel entsprechende Fach, so ist es für sämtliche Gruppen das gleiche, d. h. die Lage der Zacken scheint von der Kugelgröße und Neigung des Instrumentes nicht wesentlich abzuhängen. Dies wird durch die Figuren 7 u. 8 erläutert. In ihnen sind für die Gruppen I bez. III nur die mittleren Abszissen und Ordinaten der Zacken dargestellt, wobei das Mittel aus der rechten und linken Hälfte vereint gebildet und symmetrisch aufgetragen wurde.

Fig. 7.

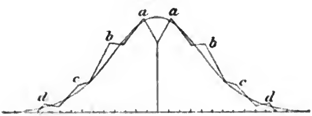
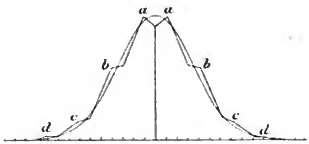


Fig. 8.



Die geringe Abhängigkeit von Kugelgröße und Neigung läßt vermuten, daß die Lage der Zacken von der Anordnung der Nägel herrührt. Nun zieht eine gerade Nagelreihe von der Trichtermündung zum Fach in der Mitte, die augenscheinlich die Kugeln von diesem Fach abhält. Zieht man aber auch (siehe Schema) durch den der Trichtermündung nächsten Nagel 1 und der Reihe nach durch die Nägel 2 und 3 Verbindungsgerade, so stellen diese ebenfalls gerade Nagelreihen dar, die auf das 4. bzw. die Scheidewand des 6. und 7. Faches von der Mitte gerechnet führen. Auf die diesen Fächern gegen die Mitte zu benachbarten Fächer fallen aber die weiteren Zackenminima, womit wohl ein Zusammenhang zwischen Zackenbildung und Nagelstellung nachgewiesen ist.

Man sieht also im großen und ganzen auch in diesen Versuchen eine schöne Übereinstimmung mit dem Gaußischen Fehlergesetz, denn die besprochenen periodischen Abweichungen finden ihre Erklärung in der Regelmäßigkeit der Nagelstellung und liegen daher durchaus im Sinne dieses großen Gesetzes, welches nur bei völliger Unordnung der Elementarfehler strenge Gültigkeit beansprucht.

Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn Friedrich Schilling „Über die Anwendung der Fluchtpunktschiene in der Perspektive."

(Diese Zeitschrift Band 56, S. 189—208).

Von R. Mehmke in Stuttgart.

1. Herr Schilling sagt in der Anmerkung auf S. 192, daß bei der Einstellung der dreiteiligen Fluchtpunktschiene in gewissen Fällen (die deshalb zu vermeiden seien) bei jedem neuen Schritt des Einstellens der eine Stift herausgenommen werden müßte. Ich habe das nie nötig gehabt, weil die Gleitschienen genügend federten, um bequem über die Stifte hinweg bewegt werden zu können. Natürlich wird der Wert der Untersuchungen des Herrn Schilling darüber, wo man die Stifte am zweckmäßigsten einsteckt, hierdurch nicht vermindert.

2. Das neue, auf S. 200 und 201 beschriebene Einstellverfahren des Herrn Schilling ist gewiß eine dankenswerte Bereicherung der Hilfsmittel, allein bei meinen zum Vergleich vorgenommenen Versuchen, bei denen ich die zur Einstellung nötigen Zeiten aufschrieb, habe ich nicht finden können, daß es schneller zum Ziel führte als das ältere (diese Zeitschrift Band 42, 1897, S. 100—101). Herr Schilling sagt auf S. 202, daß beim neuen Verfahren bei jedem Schritt sogleich beide Schienen korrigiert würden, während beim alten hierzu zwei einzelne Schritte nötig seien, aber nach meinen Beobachtungen ist eben die Anzahl der einzelnen Schritte beim neuen nicht kleiner als beim alten. Man könnte es ebensogut als einen Mangel des neuen Verfahrens hinstellen, daß bei jedem Schritt beide Gleitschienen statt einer korrigiert werden müssen. Selbstverständlich kann auch beim alten Verfahren jede einzelne Lage der Fluchtpunktschiene durch einen Strich auf dem Papier bezeichnet und wiedergefunden werden, und man braucht ebenfalls nur eine Schiene mit der Hand festzuhalten, nicht zwei. Endlich kann es beim neuen Verfahren leicht vorkommen, daß man den ersten Schritt oder sogar noch einen späteren umsonst tut, indem man sich dabei von der richtigen Lage entfernt, statt sich ihr zu nähern, während beim alten Verfahren jeder Schritt unbedingt näher zum Ziel führt. Deshalb scheint mir die Frage, welches der beiden vorzuziehen sei, mindestens noch unentschieden zu sein.

3. Das von Herrn Schilling auf S. 203 in Zusatz 3 angegebene Verfahren, die Fluchtpunktschiene auf einen unzugänglichen Fluchtpunkt einzustellen, der auf einer gegebenen Geraden in gegebenem Abstand von einem bekannten Punkt dieser Geraden liegt, ist schön von mir (diese Zeitschrift Band 42, 1897, S. 103) vorgeschlagen worden. Ich bin dort noch einen Schritt weiter gegangen und habe empfohlen, auf dem Rand der Zeichenschiene eine Teilung anzubringen, die ohne Rechnung oder Konstruktion ein sofortiges, endgültiges Einstellen erlaubt.

Kleinere Mitteilungen.

Erläuterung zu einer Tabelle in: „Sechsstellige Gaußische und siebenstellige gemeine Logarithmen“ von S. Gundelfinger.

(Nach einer brieflichen Mitteilung des Verfassers.)

Die zweite Auflage der in der Überschrift genannten Tafeln, Leipzig 1902, enthält in einer Ergänzung zu S. 1 der ersten Auflage unter Nummer III ein Täfelchen, das den Zweck hat, für $B > 2$ den Wert von $B - A$ auf bequeme Weise zu liefern. Es wird

$$B = A_0$$

gesetzt, dann ist, wenn B_0 den zum Argument A_0 gehörigen Wert in der Tafel der Additionslogarithmen bezeichnet,

$$B - A = B_0 - A_0 + k,$$

wo die Korrektion k sich gerade dem erwähnten Täfelchen entnehmen läßt. Die Erklärung ist folgende. Setzt man, unter log den gemeinen Logarithmus verstehend,

$$A = \log x,$$

dann ist bekanntlich

$$B = \log(1 + x),$$

also wird für $B = A_0$:

$$B_0 = \log(2 + x).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} k = B - A - (B_0 - A_0) &= \log\left\{\frac{1+x}{x} : \frac{2+x}{1+x}\right\} \\ &= \log\frac{(1+x)^2}{2x+x^2} = -\log\frac{2x+x^2}{(1+x)^2} \\ &= -\log\frac{(1+x)^2-1}{(1+x)^2} = -\log\left(1-\frac{1}{(1+x)^2}\right) \\ &= M\left\{\frac{1}{(1+x)^2} - \vartheta\,\frac{1}{(1+x)^4}\right\}, \end{aligned}$$

wo M den Modul der gemeinen Logarithmen und ϑ eine Größe zwischen 0 und 1 bedeutet. Wenn $B = 2{,}000$, so wird annähernd $x = 99{,}31$, also $1 + x > 100$. Da ferner $M < \frac{1}{2}$, so beträgt, wenn man für $B \gtreqless 2$

$$k = \frac{M}{(1+x)^2}$$

setzt, der Fehler weniger als

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^4,$$

d. h. weniger als eine halbe Einheit der achten Dezimale. Deshalb konnten in dem fraglichen Täfelchen, dessen zweite Spalte die Werte k, in Einheiten der siebenten Dezimale, von 5 angefangen bis 435 immer von 10 zu 10 fortschreitend enthält, die zugehörigen B in der ersten Spalte folgendermaßen berechnet werden. Aus der obigen Näherungsformel für k folgt durch Logarithmieren

$$\log k = \log M - 2 \log (1 + x),$$

woraus man, da

$$\log (1 + x) = B$$

ist, erhält:

$$B = \frac{\log M - \log k}{2}.$$

Dabei ist $\log M = 9{,}637\,7343\,113 - 10$.

Mathematische Schreibmaschine.

Die „Hammond Typewriter Co." in Neuyork teilt mit, daß sie eine mathematische Schreibmaschine auf den Markt gebracht hat. Mit dieser Maschine können mathematische Manuskripte vollständig geschrieben werden, ohne daß man, wie es seither der Fall war, genötigt ist, für griechische Buchstaben und gewisse mathematische Zeichen, die auf andern Schreibmaschinen gewöhnlich fehlen, Raum zu lassen und sie nachträglich mit der Feder einzusetzen. Das Typenrad enthält 120 Buchstaben und Zeichen, darunter außer $=$, $+$, $-$, ∞ und manchen anderen auch ein Wurzelzeichen, Summenzeichen (Σ), Integralzeichen, ein „rundes De" (∂) für partielle Differentiale, und außer den gewöhnlichen Ziffern auch kleinere für Exponenten und Indizes.

Bücherschau.

Meisel, Dr. **Ferdinand**, Großh. Direktor der Gewerbe- und Handwerkerschule und Privatdozent an der Technischen Hochschule in Darmstadt, **Elemente der geometrischen Optik.** Eine Einführung in das Verständnis der Wirkungsweise optischer Instrumente. Mit 157 Abbildungen im Texte. Hannover 1908, Verlag v. Dr. Max Jänecke. (69. Band der Bibliothek der gesamten Technik.) 294 S. kl. 8. Geh. n. *M* 4, geb. n. *M* 4,40.

Der Verfasser gibt in der Einleitung eine ausführliche Darstellung der Entstehung eines optischen Bildes. Er geht von der kaustischen Linie aus, legt die Abhängigkeit des Bildes vom Augenorte dar und leitet in ganz allgemeiner Weise die Grundbegriffe — Hauptpunkte, Brennpunkte, Brennweiten — ab. Im ersten Abschnitte wird sodann die *Spiegelung* behandelt. Die durch einen ebenen Spiegel und durch die Zusammenstellung ebener Spiegel erzeugten Bilder, auch die praktischen Anwendungen des ebenen Spiegels werden eingehend besprochen. — Bei der Behandlung des an einer Kugelfläche gespiegelten Strahls werden dann die Begriffe des Astigmatismus und der sphärischen Aberration abgeleitet. Ebenso wird die nun folgende Darlegung der durch sphärische Spiegel erzeugten Bilder zur allgemeinen Erklärung des Abbildungsverhältnisses und der Vergrößerung benützt. Hierbei wird auch das Bild eines unendlich großen und unendlich fernen Objekts, sowie das durch eine beliebige Öffnung erzeugte Sonnenbild untersucht. Auch das Tiefenabbildungsverhältnis wird ohne Zuhilfenahme höherer Rechnung behandelt. Es schließt sich nun die Kombination zweier sphärischer Spiegel an, deren Kardinalpunkte ermittelt werden. Bei dieser Gelegenheit werden auch die teleskopischen Systeme definiert. Mit einer Betrachtung der durch Rotation der Kegelschnitte erzeugten Flächen als Spiegel und der Spiegel-Teleskope schließt dieser Abschnitt.

Im zweiten Abschnitte behandelt der Verfasser **die Brechung des Lichts.** Das Refraktionsgesetz und das Fermat'sche Prinzip werden vorgeführt; sodann schließt sich die Konstruktion des gebrochenen Strahls, dieser die totale Reflexion an. Die Weierstraßische Konstruktion für die brechende Kugelfläche führt unmittelbar auf die aberrationsfreien Punkte. Bei der Behandlung der Strahlenbrechung an einer Ebene wird die Entstehung der Bilder unter Wasser befindlicher Gegenstände und ihre Abhängigkeit vom Auge eingehend besprochen. Der optischen Wirkung einer planparallelen Platte schließt sich der absolute Brechungsquotient an. Bei der Betrachtung des Prismas wird auch die Bildumkehrung durch eine Kombination zweier rechtwinkliger, gleichschenkliger Prismen dargelegt. — Die Brechung an einer Kugelfläche, bei der auch die totale Reflexion nicht vergessen wird, leitet zur Behandlung der Linsen über. Für die Lage der Kardinalpunkte werden genaue, allgemein gültige Formeln aufgestellt. Bei dieser Gelegenheit wird auch gezeigt, daß eine Linse, die am Rande dicker als in der Mitte ist, gleichwohl eine Sammellinse sein kann und die Bedeutung der Eulerschen Näherungsformel erläutert.

Auch die Bedeutung des optischen Mittelpunktes wird eingehend besprochen. Es schließt sich nun eine die Dicke nicht vernachlässigende Behandlung des Linsenspiegels und sodann die allgemeine Betrachtung eines Systems zentrierter brechender Kugelflächen an Hierbei folgt der Verfasser im großen Ganzen den Spuren Abbes[1]) und betont namentlich das Konvergenzverhältnis und die Knotenpunkte. Auch der Durchgang der Parallelstrahlenbüschel wird eingehend besprochen. Es folgt die Zusammensetzung zweier Linsensysteme; die verschiedenen möglichen Fälle werden durchgenommen und im Anschluß daran die teleskopischen Linsensysteme betrachtet. Den Schluß dieses Abschnitts bildet die Besprechung der Abbildungsfehler, der Sinusbedingung und der aplanatischen Punkte.

Der dritte Abschnitt ist der **Farbenzerstreuung** gewidmet. Die Entstehung des Spektrums wird geschildert und die Bedingung seiner Umkehrung dargelegt. Das Zerstreuungsvermögen wird abgeleitet, die Prismen-Kombination mit gerader Durchsicht und die ohne Ablenkung kurz behandelt. Bei der nun folgenden Besprechung der achromatischen Linse wird besonderes Gewicht auf die Unterscheidung der ganz verschiedenen Bedingungen des Zusammenfallens der Brennpunkte und der Gleichheit der Brennweiten für zwei Farben gelegt. Auch die Möglichkeit der achromatischen Linse aus einem Glasstücke, und zwar für jede der beiden Bedingungen wird dargelegt.

Der vierte Abschnitt, in dem die **Fernrohre und Mikroskope** behandelt werden, beginnt mit einer allgemeinen Betrachtung der Vergrößerung; hierbei wird auch der Begriff der leeren Vergrößerung abgeleitet. Die durch eine einfache Linse und die durch eine Kombination zweier Linsensysteme erzeugte Vergrößerung werden ausführlich behandelt. Das Gesichtsfeld des astronomischen und das des holländischen Fernrohres gelangen zur Behandlung, und nun folgt eine Darlegung des durch Abbe eingeführten Begriffs der Eintritts- und der Austrittspupille. Die Lichtstärke, die sie beim Mikroskope bedingende numerische Apertur und die Schilderung der Wirkung der Immersion schließen sich an. Schließlich werden die Objektive und die Okulare der Fernrohre und Mikroskope und die photographischen Objektive kurz behandelt.

Wenn wir zu dem hier mitgeteilten Inhalt des Werkes noch bemerken, daß es bei aller Kürze und Prägnanz des Ausdrucks überaus klar und mit ganz elementaren Hilfsmitteln der Mathematik geschrieben ist, so darf man das Buch als eines der reichhaltigsten und besten Werke auf dem Gebiete der geometrischen Optik bezeichnen, so lange man die Theorie der optischen Abbildung im Sinne der Wellentheorie ausschließt.

Darmstadt. S. GUNDELFINGER.

---

1) Bekanntlich hat Gauß durch seine Theorie der Hauptstrahlen und Hauptpunkte die erste genaue Definition der beiden Brennweiten für ein System mehrerer Linsen auf gemeinschaftlicher Achse gegeben. Seit den Arbeiten Abbes ist es fast unbegreiflich, daß Gauß sich bei seinen Untersuchungen über die Theorie der Abbildung durch ein unendlich wenig geöffnetes Strahlenbündel auf das Snelliussche Brechungsgesetz gestützt hat, während Abbe zuerst erkannt zu haben scheint, daß die Gesetze der Abbildung im elementaren zylindrischen Raum von der Art der physikalischen Verwirklichung der Abbildung ganz unabhängig und rein geometrischer Natur sind. In der Einleitung des vorliegenden Buches werden nun die fundamentalen Begriffe „Brennpunkte, Hauptpunkte, Brennweiten" in der allgemeinsten Weise aus weit geöffneten Büscheln abgeleitet.

Dr. **Gino Loria**, ord. Professor der höheren Geometrie an der Universität Genua, **Vorlesungen über darstellende Geometrie.** Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberlehrer am Gymnasium zu Düren. In 2 Teilen. I. Teil: Die Darstellungsmethoden. A. u. d. T.: Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. 25, 1. Mit 163 Figuren. [XI u. 219 S.] 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geb. n. M 6.80.

Das vorliegende Buch behandelt in ausgezeichneter Weise die Methoden der darstellenden Geometrie; es könnte den Titel tragen: theoretische darstellende Geometrie. Auf die Reichhaltigkeit des Inhaltes kann man schon aus der Disposition des Stoffes schließen: in fünf Büchern werden behandelt 1. Die Mongesche Methode der doppelten Orthogonalprojektion; 2. Die Zentralprojektion (Freie Perspektive); 3. Die Methode der kotierten Projektionen; 4. Die Axonometrie; 5. Die Photogrammetrie. Einige Bemerkungen über die Werkzeuge des Geometers, über Geometrie des Zirkels und über Geometrographie bilden die Einleitung. Aus der neueren Geometrie werden die Elemente vorausgesetzt etwa in dem Umfange, wie man sie in dem Buche von Enriques findet. Der Verfasser zieht diese Disziplin von Anfang an zur Behandlung der Aufgaben der darstellenden Geometrie heran; dadurch gelangt er zu manchen interessanten Lösungen, wenn diese auch praktisch nicht immer zu bevorzugen sind. Vertraut mit der neueren Literatur weiß er dem viel bearbeiteten Stoffe neue und originelle Seiten abzugewinnen, er bewahrt die größte Allgemeinheit der Gesichtspunkte und versteht es, alle Teile in Zusammenhang zu bringen. Als besonders elegant seien erwähnt: die Projektion auf die Koinzidenzebene (S. 45), die Behandlung senkrechter Geraden und Ebenen in der freien Perspektive (S. 114 ff.), das Porisma II auf S. 135. Überhaupt möchte der Referent das 2. Buch über die freie Perspektive als besonders gelungen bezeichnen, während die Darstellung der Axonometrie weniger befriedigt. Verdienstlich ist es auch, daß im 5. Buche die theoretische Photogrammetrie kurz behandelt wird. Wir finden erörtert, was man über eine Figur aussagen kann, wenn man von ihr in einer gegebenen Ebene *eine* Projektion aus einem unbekannten Zentrum kennt oder 2 bzw. 3 Projektionen in ebensovielen Ebenen. Der letzte Fall, wo vier Projektionen in vier gegebenen Ebenen bekannt sind und die Figur also der Gestalt nach bestimmt ist, wird leider ohne Beweis bloß angeführt. Hier wäre wohl auch ein Hinweis auf Finsterwalders Arbeiten am Platze gewesen, der in den letzten Jahren die Photogrammetrie auf neuen Grundlagen aufgebaut hat. Zahlreiche Aufgaben sind durch das ganze Buch verstreut.

Dem Titel nach haben wir es mit Vorlesungen des Verfassers über darstellende Geometrie zu tun; es ist zu vermuten, daß der mehr praktische Teil, also die wirkliche zeichnerische Durchführung von Aufgaben etwa in besonderen Übungen erledigt wurde. Jedenfalls sind in dem Buche Ausführungen praktischer Art vermieden z. B. die sog. angewandte Perspektive, die Eigenschaft der Teilungspunkte, die Konstruktion von Maßstäben usw. Deswegen wird der mit dem Gegenstande schon Vertraute aus dem Buche mancherlei Nutzen ziehen können; einem Anfänger aber oder auch einem Techniker kann man es weniger empfehlen. Für diese ist es auch nötig Figuren beizufügen, die sorgfältig und auf eine gewisse *Bildwirkung* hin durchgeführt sind.

Denn über den beigefügten Figuren hat kein guter Stern gewaltet; sie sind — welchem Zwecke sie nun auch dienen mögen — zu ungenau, zu wenig übersichtlich und zu flüchtig entworfen. Die einzige Figur 43 gibt ein Beispiel, wie alle sein sollten. Als besonders verbesserungsbedürftig seien erwähnt: Fig. 24 und Fig. 122, wo die Drehung der Bildebene nach der andern Seite erfolgen müßte, damit man das Bild *so* sieht, wie es einem im Projektions-Zentrum angebrachten Auge wirklich erscheint, Fig. 150, wo auch im Text ein störendes Versehen vorliegt und Fig. 153, wo O^* der Höhenschnitt des Spurendreiecks $T_x T_y T_z$ sein sollte.

Hindelang im Allgäu. KARL DOEHLEMANN.

Arnold Emch, Ph. D. Professor of Graphics and Mathematics in the University of Colorado. **An Introduction to the Projective Geometry and its Applications on analytic and synthetic treatment**. First edition, first thousand. 114 Figuren. VII u. 267 Seiten. 8. New York 1905, John Wiley & Sons, London: Chapman & Hall, limited. Geb. n. 2.50 $

In diesem Buche unternimmt der Verfasser, jetzt Professor an der Kantonschule in Soloturn in der Schweiz, den interessanten Versuch, eine Darstellung der projektiven Geometrie mit einer Übersicht ihrer Anwendungen zu vereinigen. Natürlich muß er auf einen sorgfältigen, theoretischen Aufbau verzichten und die Theorie kurz und knapp halten. In den drei ersten Kapiteln werden in analytisch-synthetischer Behandlung und unter ausschließlicher Benutzung Cartesischer Koordinaten die Sätze über das Doppelverhältnis, über projektive Strahlenbüschel und Punktreihen, über die involutorische Beziehung, sowie eine Theorie der Kegelschnitte behandelt. Mit Rücksicht auf die spätere Verwendung findet die ebene Kollineation, speziell die zentrale, eine ausführliche Erörterung, woran sich sofort Anwendungen dieser Verwandtschaft in der darstellenden Geometrie schließen. Im vierten Kapitel werden Kegelschnitt-Büschel und Kegelschnitt-Schar analytisch definiert. Die in bezug auf ein Kegelschnitt-Büschel konjugierten Punkte bilden eine quadratische involutorische Verwandtschaft, welche auch bei uns noch gelegentlich als „Steinersche Transformation“ bezeichnet wird; einem Strahlenbüschel entspricht in ihr ein Kegelschnitt-Büschel und das Erzeugnis dieser beiden Gebilde ist eine allgemeine Kurve dritter Ordnung. Die Theorie dieser Kurven wird verhältnismäßig ausführlich besprochen und speziell gezeigt, wie die schon von Newton aufgestellten fünf Typen durch die verschiedenen Fälle der quadratischen Transformation sich erzeugen lassen. Dabei verdient hervorgehoben zu werden, daß die beigefügten Figuren wirklich konstruierte, also nicht bloß schematische Kurven dritter Ordnung geben.

Das letzte, fünfte Kapitel enthält die Anwendungen der projektiven Geometrie in der Mechanik und zwar zunächst, etwas kurz gehalten, die in der graphischen Statik, indem eine Anwendung des Seilpolygons gegeben wird. Es folgen dann statische Beweise für den Gaußschen Satz von der Mitte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits und des Pascalschen Satzes für den Kreis. Als Übungsaufgaben sind diese ja wohl geeignet, prinzipiell wird es wenig angemessen sein, geometrische Theoreme unter Anwendung von Sätzen der Statik zu beweisen. Es folgt weiter eine Geometrie der Spannungen

in einer Ebene. Die Spannungsellipse, sowie die Involution der konjugierten Schnittrichtungen werden analytisch abgeleitet. Die Gletscher bieten in ihren Spalten und Strömungslinien ein Beispiel für den Fall, wo die betreffende Involution in jedem Punkte hyperbolisch ist. Es fehlt nicht eine Veranschaulichung durch eine kleine Karte des Arapahoegletschers. Ein Feld mit überall elliptischer Involution zeigt sich in der Spaltenbildung eines auftrocknenden Schlammfeldes oder einer stark lakierten Fläche. Den Schluß bildet ein bemerkenswerter Abschnitt über die Realisierung von Kollineationen durch Gelenkwerke. Außer den bekannten Inversoren von Peaucellier, Hart, Kempe, Silvester werden hier noch weitere, zum Teil wenig bekannte Apparate besprochen, welche eine Zentral-Kollineation kinematisch erzeugen. Dieselben bieten ein theoretisches Interesse, auch wenn sie praktisch wegen zu großer Kompliziertheit und der damit verbundenen Hemmungen wohl nicht zu verwenden sind.

Auch sonst findet man manches Neue z. B. in dem S. 167 behandelten „Optischen Problem". Schon Cremona hat folgende Aufgabe gelöst: Durch einen festen Punkt gehen Lichtstrahlen, welche der Reihe nach an n Geraden reflektiert werden. Man finde einen Strahl, der nach n Reflexionen mit dem ursprünglichen einen gegebenen Winkel bildet. Dem Verfasser gelingt es, durch genauere Untersuchung der Winkelrelationen einige weitere allgemeine Sätze abzuleiten, welche praktisch bei dem Winkelprisma, z. B. dem von Bauernfeind, Verwendung finden. Leider ist gerade dieser Teil durch Druckfehler entstellt: statt der Winkel α, α_1, α_2 etc. müssen in den Formeln auf S. 168 und 169 und in der Figur 71 die Winkel α_1, α_2, α_3 etc. gesetzt werden.

Die Darstellung des Verfassers ist durchweg einfach und verständlich; manche Entwickelungen zeichnen sich, namentlich mit Rücksicht auf die Einfachheit der verwandten Mittel, durch Übersichtlichkeit und praktische Anordnung aus. Der eine oder andere Punkt bleibt noch zu verbessern. So ist auf S. 37, 38 der falsche Satz ausgesprochen, daß die Tangenten eines Kreises auf zwei festen Tangenten gleiche Punktreihen ausschneiden. In der Tat sind aber diese Punktreihen ganz allgemein; irgend zwei projektive Punktreihen können — und zwar noch auf unendlich viele Arten — so gelegt werden, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Kreis umhüllen. Ungern hat der Referent jede Erwähnung der reziproken Figuren der graphischen Statik vermißt: sie bieten doch gerade ein glänzendes Beispiel, wie eine rein spekulative Betrachtung direkt in der Technik Verwendung finden kann. Im übrigen sei das Buch, dessen vielseitiger Inhalt wenigstens angedeutet wurde und das im kleinen den Unterschied zwischen der alten und neuen Welt auch einigermaßen widerspiegelt, den Geometern, die sich für die Anwendungen der neueren Geometrie interessieren, bestens empfohlen.

München, 27. Dez. 1907. Karl Doehlemann.

C. Rohrbach. Sternkarten in gnomonischer Projektion. 3. Aufl. II u. 12 Blätter. 4. Gotha 1907, E. F. Thienemann. n. *M* 1.40.

Die 12 Blätter dieses Atlas sind in Zentralprojektion ausgeführt, und zwar bilden die Zentren der Projektionsebenen je drei um 8^h in Rektaszension voneinander abstehende Punkte in den Deklinationsparallelen $+ 52{,}6^0$, $+ 11^0$, $- 11^0$, $- 52{,}6^0$ (Äquinox 1900). Alle größten Kugelkreise erscheinen somit als

gerade Linien und das erleichtert die Einzeichnung von Meteorbahnen, Nordlichtstrahlen und Kometenschweifen. Der Umriß jeder Karte entspricht einem Kreise von 20 cm Durchmesser, dessen Rand eine doppelte Einteilung aufweist: eine innere deutet Rektaszension und Deklination an, eine äußere ermöglicht es dem mitteleuropäischen Beobachter, in Verbindung mit der Sternzeit die Karte dem jeweiligen Himmelsanblick gemäß vor sich hin zu halten. Das Koordinatennetz ist nicht eingezeichnet und nur die helleren Sterne tragen die Bayerschen Buchstaben. Einer beiläufigen Vergleichung zufolge erstrebte der Verf. Vollständigkeit bis zu den Sternen 4. Größe, schwächere Sterne hat er aber dann mitgenommen, wenn es das Charakteristische der Konstellation verlangte. Die Abstufung der Sterngrößen durch die Durchmesser kleiner schwarzer Kreise ist recht glücklich getroffen. Beim Überblicken der Kartenblätter fällt insbesondere auf Tafel XI die Zusammendrängung der hellen Sterne um den Gouldschen Kreis herum auf.

Gegenüber den beiden früheren Auflagen — die erste erschien Berlin 1895 — erfuhr die vorliegende eine Vermehrung um eine Indexkarte, die auf 9 Kärtchen des nördlichen Himmels die Sternbilder, ihre Grenzen und die wichtigsten Alignements angibt. Das mit großer Sorgfalt gearbeitete handliche Werkchen erwies sich schon für manche Beobachtungen dem Fachmanne und dem Liebhaber der Astronomie gleich willkommen.

Straßburg i. F. WIRTZ.

---

1. **O. Hermes** und **P. Spies. Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie.** 5. Aufl. Mit 48 Holzschnitten und 2 Sternkarten. 73 S. 8. Berlin 1906, Winckelmann & Söhne. n. ℳ 1.20.
2. **W. Láska. Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie.** I. Teil: Sphärische Astronomie. 2. Aufl. XII u. 192 S. 8°. Bremerhaven u. Leipzig 1906, L. v. Vangerow.
3. **H. Andoyer. Cours d'Astronomie.** I. Astronomie théorique. 222 S. 8. Lithographiert. Paris 1906, A. Hermann. n. ℳ 7.20.

Die drei Schriften behandeln den gleichen Stoff mit etwas anderen Zielen.

1. Das Werkchen von Hermes erfreut sich seit langen Jahren teils selbständig, teils als Anhang zu dem reichhaltigen und beliebten Grundriß der Experimentalphysik von Jochmann verdienter Anerkennung. An der bewährten Disposition (I. Achsenumdrehung der Erde, II. Bewegung der Erde um die Sonne, III. Mathematische Geographie, IV. Das Sonnensystem, V. Die Fixsterne), die zwanglos jeden Gegenstand einzuordnen erlaubt, hat die neue Auflage nichts geändert. Ebenso findet man in Einzelheiten nur dann Zusätze, wenn es die Fortschritte der Forschung verlangen, deren neuere Ergebnisse eine angemessen vorsichtige Berücksichtigung erfahren. Dafür treten freilich an manchen Stellen Kürzungen ein, denen u. a. die lehrreiche Bestimmung der Stillstandspunkte der unteren Planeten zum Opfer fiel.[1])

2. Láskas sphärische Astronomie wendet sich vor allem an den Studierenden, für den das Buch eine bequeme Einführung abgibt. Die mathematische Einleitung bringt eine gute Auswahl der dem Astronomen wichtigen Formeln, darunter graphische Lösungsmethoden, Interpolation, Reihenentwicke-

1) Zum Vergleich liegt mir Jochmanns Grundriß, 10. Aufl. 1887 vor.

lungen und Ausgleichungsrechnung. Der weitere Inhalt schreitet in den gewohnten Bahnen einher. Die Schreibweise und die Zeichnung der Figuren ist klar und leicht verständlich. Hinweise auf Originalabhandlungen und ausführliche Werke trifft man reichlich, und die numerischen Konstanten haben die wünschenswerte Genauigkeit. Die zahlreichen kleinen Tafeln und tabellarischen Übersichten, sowohl im Text verstreut wie am Ende des Buches, sind auch für den Fachmann nicht ohne Wert.

3. Auch Andoyers „Astronomie théorique" besteht wesentlich aus sphärischer Astronomie und mathematischer Geographie. Darüber hinaus geht nur das 9. Kap. mit seinen „Notions de mécanique céleste", die einen trefflich orientierenden Charakter tragen. Die Refraktion erfährt in allen ihren Eigenschaften und Wirkungen eine erschöpfende Behandlung, während den breitesten Raum das Schlußkapitel „Eclipses" einnimmt, das sich an Bessels Analyse der Finsternisse anlehnt und die Theorie bis zur Bestimmung der Sichtbarkeitskurven auf der Erdoberfläche durchführt. Der Vortrag des ganzen Buches zeichnet sich aus durch Strenge und Einfachheit; über die Disposition indes könnte man anderer Ansicht sein als der Verfasser.

Straßburg i. E. WIRTZ.

C. F. Gauß. Werke. Herausgeg. v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. VII. Band. 650 S. 4. Leipzig 1906, in Komm. bei B. G. Teubner. n. *M*. 30.—.

Über den Inhalt des Bandes und die Bedeutung der neuen Funde in Gauß' Nachlaß hat der Herausgeber, Herr M. Brendel, schon an zwei Stellen[1]) Bericht erstattet. Wir beschränken uns daher auf einige wenige Hinweise. —

An den revidierten und in seinen Zahlenbeispielen sorgfältig nachgerechneten Abdruck der Theoria motus schließen sich verschiedene zum größeren Teil noch unbekannte Aufsätze über die parabolische Bewegung an. Besonders interessieren die 1816 entworfenen Tabulae novae motus parabolici, die schon eine ähnlich kompendiöse Anordnung der Barkerschen Tafel aufweisen, wie sie später Burckhardt vorgeschlagen und neuerdings Bauschinger in seinen Tafeln zur theoretischen Astronomie (1901) verwertet hat.

Die Arbeiten über die Störungen der Ceres fallen in die Jahre 1802 bis 1805; sie enthalten die von Hansen 1843 unabhängig gefundene interpolatorische Entwickelung der Störungsfunktion, tragen aber im ganzen mehr den Charakter einer Vorbereitung auf die ausgedehnten Untersuchungen über die Pallasstörungen, in deren Veröffentlichung der Band gipfelt. Gauß gelangt zu dem Resultat, daß die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas im rationalen Verhältnis 7 : 18 stehen, ein Ergebnis, das er zunächst in einer nie aufgelösten Chiffre niederlegte. Welche Wichtigkeit gerade jetzt derartige Kommensurabilitätsfragen für die Konstitution des Planetoidengürtels besitzen, lehren die Entdeckungen der jüngsten Zeit. „Man sieht, daß Gauß das gewaltige Problem der Berechnung der Pallasstörungen innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Beobachtungen, an das auch heute noch der Astronom sich nicht gern heranwagen möchte, fast ganz zu Ende geführt hat .... Umsomehr

---

1) Geschäftl. Mitt. d. K. Ges. d. Wiss. Gött., 1906 und Gött. gelehrte Anz., 1906, Nr. 1.

zu bedauern war es, daß bis auf den heutigen Tag diese Arbeit unbekannt geblieben ist". (Brendel).

Den Schluß bildet eine ebenfalls zum erstenmal veröffentlichte Theorie der Bewegung des Mondes. Sie stammt aus den Jahren 1801/02 und gelangt in der Darstellung der Störungen auf dieselbe Form, die Plana 1832 (Théorie du mouvement de la lune, Turin) entwickelt.

Dem Namen Gauß vermag ja nichts mehr einen noch höheren Glanz zu verleihen. — Herrn Brendel aber wird man nicht nur Dank wissen für die Ausdauer, die er einer großen Aufgabe gewidmet, sondern ihn auch beglückwünschen ob der glücklichen Hand, die ihm die Lösung der schwierigen mit der Deutung des Nachlasses verbundenen Fragen erleichtert hat.

Straßburg i. E. WIRTZ.

C. V. L. Charlier. Über die Acceleration der mittleren Bewegung der Kometen. (Ark. f. Mat., Astron. och fys. Bd. 3, Nr. 4.) 12 S. · 8. Stockholm, 1906.

Bei einigen Kometen, insbesondere beim Enckeschen, beobachtet man eine sog. Acceleration, eine Verkürzung der Umlaufszeit, deren Erklärung der Himmelsmechanik von jeher Schwierigkeiten bereitete, gesteigert noch dadurch, daß diese Acceleration manchmal sprungweise auftrat. Charlier beweist nun hier analytisch den nach Airys Methoden auch geometrisch leicht zu demonstrierenden Satz: Wenn zwei Körper sich nahe einander in derselben Ellipse um die Sonne bewegen, so wird die mittlere Bewegung des vorhergehenden Körpers durch die Anziehung des nachfolgenden eine Acceleration erhalten, und umgekehrt wird die mittlere Bewegung des nachfolgenden Körpers eine Retardation erleiden infolge der Anziehung des vorhergehenden Körpers. Da nun in der Zusammensetzung der Kometen Schwärme kleiner Körper die Hauptrolle spielen, so mag es leicht geschehen, daß unter der auflösenden Kraft der Sonnenstrahlung ein Teilschwarm sich abspaltet und etwas hinter dem den eigentlichen Kern enthaltenden Hauptschwarm zurückbleibt. Damit ist die Bedingung für eine Acceleration geschaffen, die überdies wegen der raschen Veränderlichkeit der lockeren Schwärme keine von Umlauf zu Umlauf gleichförmig fortschreitende zu sein braucht. Daß der durch den Charlierschen Satz geforderte Vorgang bei allen Kometen mehr oder weniger wirken muß, ist sicher; fraglich nur, ob er allein zur Erklärung des beobachteten Phänomens hinreicht, dessen Sinn er richtig wiedergibt.

Straßburg i. E. WIRTZ.

Ableitungs-Bildung im räumlichen Größenfelde.

Von F. Jung in Wien.

Als Zweck des Rechnens mit Vektoren glaube ich mit in erster Linie betrachten zu sollen die Aufstellung von Formeln in einer Gestalt, welche sich nicht auf ein bestimmtes Koordinatensystem stützt. Dabei ist vor allem an die Verwendung der Vektorenrechnung in der Physik und besonders der Mechanik gedacht. Jede Formel soll eine Anweisung geben, wie man womöglich ohne Zuhilfenahme eines Koordinatensystems die Beziehungen der betreffenden Größen, ihre Abhängigkeit voneinander, darstellen kann. Die Vektorformeln sollen so beschaffen sein, daß auf Grund derselben die entsprechenden Formeln in Koordinatensystemen aufgestellt werden können ohne Koordinatentransformation. Die gebräuchlichen vektoranalytischen Darstellungen im Gebiete der Physik erfüllen diese Forderung meist nur teilweise. Einzelne sind eigentlich nur ein Rechnen in rechtwinkligen Koordinaten unter nachträglicher Zusammenfassung der Ergebnisse in vektoranalytischer Form. Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, in der oben als wünschenswert bezeichneten Richtung einen Beitrag zu liefern.[1])

In der Hydrodynamik und Elektrodynamik spielen eine wichtige Rolle der Gradient eines räumlichen Skalarfeldes, die Divergenz, der Rotor und der Tensor eines Vektorfeldes. Diese Größen lassen sich einheitlich vektoranalytisch festlegen mit Hilfe des Oberflächenintegrals, indem man einen Grenzwert desselben benützt. Der im Folgenden eingeschlagene Weg wurde bisher in einzelnen Fällen verwendet, ohne jedoch einheitlich zur Festlegung der früher genannten Größen zu dienen. Es läßt sich zeigen, daß auf Grund des im Folgenden angewendeten Verfahrens die „Hamiltonsche Operation ∇“, welche so wichtig ist für räumliche Größenfelder, von ihrem formalen Zusammenhange mit rechtwinkligen Achsensystemen befreit werden kann. Die Anwendung des Operators ∇ als eines symbolischen Vektors ergibt sich in den betreffenden Fällen als Anwendung von wirklichen Vektoren.

1) Die meiste Anregung in dieser Hinsicht bietet Jaumann, Die Grundlagen der Bewegungslehre. Leipzig, Barth, 1905.

Das räumliche Feld einer Größe sei gegeben, also die Größe für jeden Punkt des Raumes bekannt. Wir legen innerhalb dieses Feldes eine beliebige geschlossene Fläche (einfach zusammenhängend) und bilden für sie das Oberflächenintegral O der Feldgröße G. Dabei nehmen wir die Flächennormalen als positiv an in den Außenraum hinaus. Der Rauminhalt des eingeschlossenen Gebietes sei τ. Nun wählen wir innerhalb der Fläche irgendeinen Punkt und ziehen sie um ihn zusammen. Dabei fassen wir den Quotienten $\frac{O}{\tau}$ ins Auge. Strebt dieser, während man die Fläche „auf Null reduziert", d. h. dem gewählten Punkte allseitig unbegrenzt nähert, einem Grenzwerte zu, so nennen wir diesen die *Polarableitung* der Feldgröße für jenen Punkt, haben also für sie den Ausdruck

$$\lim_{\tau=0} \frac{O}{\tau} = \frac{O_{d\tau}}{d\tau} = O', \tag{1}$$

wo der Ausdruck rechts als kürzere Bezeichnung dienen soll. Ebenso können wir eine *Axialableitung* der Feldgröße festlegen mittels des Linienintegrals. Eine geschlossene Kurve werde im Felde so gezogen, daß sie Randkurve einer (einfachen) Fläche sein kann, sonst beliebig. Für diese Kurve wird das Linien- oder Randintegral R gebildet. f sei der Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche. Hier handelt es sich um den Wert eines Quotienten $\frac{R}{f}$. Legen wir durch einen beliebig gewählten Punkt C des Feldes eine Fläche mit der obigen Randkurve und ziehen nun diese allseitig um den Punkt zusammen, so erhalten wir ein ebenes Flächenelement um C, welches gekennzeichnet ist durch die zugehörige Normale $\mathbf{e}$[1]) von bestimmter Stellung. Der Grenzwert des Quotienten $\frac{R}{f}$ heiße, falls er vorhanden ist, die *Axialableitung* der Feldgröße *für die Richtung* $\mathbf{e}$. Sie ist also dargestellt durch

$$\lim_{f=0} \frac{R}{f} = \frac{R_{d\mathbf{f}}}{d\mathbf{f}} = R'_e, \tag{1 a}$$

wo $d\mathbf{f}$ der das Flächenelement darstellende, zu ihm normale Vektor ist. Gerichtet sollen $\mathbf{e}$ und $d\mathbf{f}$ genommen werden derart, daß, gesehen in ihrem positiven Sinne, die willkürlich annehmbare Umlaufsrichtung der Randkurve im Uhrzeigersinne erfolgt, oder Umlaufsinn und Vektor ein Rechtssystem bestimmen. Vorausgesetzt wird, daß beim Zusammenziehen der Oberfläche und Randkurve die Größenordnung des Verhältnisses zwischen Oberfläche und eingeschlossenem Raume, bzw. zwischen

1) Vektoren sollen in dieser Abhandlung durch fette Buchstaben bezeichnet werden.

Randkurve und begrenzter Fläche nicht geändert wird. Anders ließe sich das auch dahin aussprechen, daß der Abstand des eingeschlossenen Punktes C von allen Grenzpunkten des Raumelementes, bzw. des Flächenelementes von derselben Größenordnung sein soll. Ob und wann der Fall eintreten kann, daß O' und R'_r auch unter diesen Voraussetzungen keinem eindeutig bestimmten Grenzwerte zustreben, das mag an dieser Stelle nicht untersucht werden.

Die festgelegten Ableitungen sollen nur betrachtet werden in den Fällen eines räumlichen Skalarfeldes und eines räumlichen Vektorfeldes, Die Polarableitung im Skalarfelde kann man nur in einer Weise bilden, da bei dem Oberflächenintegrale hier nur eine Art der Produktbildung möglich ist. Ist φ der Skalar, so ist in

$$O = \int df \cdot \varphi$$

das Produkt $df \cdot \varphi$ ein Vektor, das Integral also ebenfalls. Da τ ein Skalar ist, so ist der Quotient $\frac{O}{\tau}$ offenbar ein Vektor und daher die Polarableitung eines Skalarfeldes ein Vektor. Es ist der *Gradient* des Skalars φ

$$grad\,\varphi = \lim_{\tau = 0} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} df \cdot \varphi = \frac{1}{d\tau} \int_{d\tau} df \cdot \varphi.$$

Die Bezeichnung $\int_{d\tau}$ ist so zu verstehen, daß die Integration über die Grenze des Raumes $d\tau$ zu erstrecken ist.

Im Falle eines Vektorfeldes, dessen Vektor $\boldsymbol{v}$ heiße, haben wir bei der Bildung des Oberflächenintegrals das Produkt der Vektoren $\boldsymbol{df}$ und $\boldsymbol{v}$ zu verwenden. Jeder Art der Produktbildung entspricht eine Bildungsweise des Integrals und damit der Ableitung. Die verschiedenen Produktarten sollen im Folgenden in der nachstehenden Weise bezeichnet werden: Das *innere* Produkt

$$\boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} = ab \cos(ab) = \boldsymbol{b} | \boldsymbol{a};$$

das Vektorprodukt, für welches der Name *seitliches* Produkt gebraucht werden möge,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} ab \sin(ab) = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a},$$

wo $\boldsymbol{e}$ ein Einheitsvektor normal zur Ebene $(\boldsymbol{ab})$ ist und $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden; das *äußere* Produkt

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{e}_a \wedge \boldsymbol{e}_b) ab \sin(ab) = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a},$$

wo $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_b$ Einheitsvektoren in der Richtung von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind; das *algebraische* Produkt

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba};$$

das *dyadische* Produkt $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, gekennzeichnet durch die Multiplikationsregel

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}|\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}|(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}, (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a}.$$

Es komme hier nur das von Gibbs benützte dyadische Produkt zur Anwendung, das von Jaumann als „skalares" dyadisches Produkt bezeichnet wird im Gegensatze zu dem von ihm eingeführten „rotorischen" dyadischen Produkte. Für dieses ließe sich übrigens die Betrachtung in entsprechender Form ebenfalls ausführen. Bei den Umformungen kommt im Folgenden die bekannte Formel

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{r}|\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{r}|\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}|(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$$

in Verwendung.

Die eben getroffene Auswahl unter den verschiedenen in Gebrauch stehenden Bezeichnungsweisen der Produktarten entspricht dem Wunsche, das Multiplikationszeichen *einheitlich* in allen Fällen *zwischen* die Faktoren zu setzen. Der Punkt zwischen Faktoren soll dienen als bloßes Trennungszeichen (bei der algebraischen Multiplikation), oder auch zur Andeutung einer Produktbildung, deren Art unbestimmt gelassen wird. Neu eingeführt ist hier nur das Zeichen $\wedge$ für die äußere Multiplikation, statt der Graßmannschen eckigen Klammer.[1])

Die verschiedenen Oberflächenintegrale des Vektors $\boldsymbol{v}$ stellen offenbar dar: $\int d\boldsymbol{f}|\boldsymbol{v}$ einen Skalar, $\int d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v}$ einen Vektor, $\int d\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{v}$ einen Bivektor, $\int d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$ ein „Tensortripel" (nach Voigt), $\int d\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}$ eine „komplette Dyade" (nach Gibbs). Für „Tensortripel" soll im Folgenden kurz *Tensor* gesagt werden, der Größe $\int d\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}$ aber wollen wir einen neuen Namen geben, nämlich *Affinor* (entsprechend gebildet zur Benennung „Rotor").

Zur Begründung dieser hiermit in Vorschlag gebrachten Bezeichnung sei folgendes gesagt. Jede Summe von dyadischen Produkten läßt sich bekanntlich zurückführen auf die Summe von drei solchen, eine komplette Dyade, dagegen nicht auf ein einziges dyadisches Produkt. Das innere Produkt eines Vektors $\boldsymbol{r}$ mit einer Summe von dyadischen Produkten Φ liefert einen Vektor $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}|\Phi$, wie aus der oben angeführten Multiplikationsregel ohne weiteres folgt. $\boldsymbol{r}_1$ ist eine „lineare Vektorfunktion" von $\boldsymbol{r}$, wenn dieses als veränderlich angesehen wird. Werden $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_1$ als Ortsvektoren aufgefaßt für ihre End-

1) In der Verbindung $\overset{\wedge}{+}$ gebraucht es Budde zur Bezeichnung der Vektoraddition.

punkte A, A' (die Anfangspunkte also fest gewählt), so sind die beiden so aufeinander bezogenenen Punktsysteme $(A), (A')$ affin. Gerade um diese Beziehung einfach darstellen zu können in der Form

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} | \Phi$$

wird der Begriff des dyadischen Produktes gebildet. Da aber der Faktor Φ im allgemeinen gar nicht als ein dyadisches Produkt sich darstellen läßt, dagegen gerade zur Herstellung der Affinität zwischen $\boldsymbol{r}'$ und $\boldsymbol{r}$ dient, erscheint es passender, die Größe, welche Φ darstellt mit einer Benennung zu versehen, die ihre Wirksamkeit anzeigt. Die Benennung „Dyade" für Φ haftet ganz an dieser doch immerhin zufälligen Darstellungsweise, während der Affinor eine von dieser ganz unabhängige Größenart bedeutet, wie der Vektor und Skalar. Geradeso wie der Vektor geometrisch in verschiedener Weise vorgestellt werden kann, nicht nur als Strecke, auch als Keil z. B., so ist das auch beim Affinor der Fall. Seine Darstellung mittels des Dyadentripels ist nur *eine* der Möglichkeiten.

Mit Hilfe der aufgestellten Oberflächenintegrale bilden wir nun wieder Polarableitungen des Vektors $\boldsymbol{v}$, welche je nach der verwendeten Produktbildung als innere, seitliche etc. bezeichnet seien. Da durch den Skalar t zu dividieren ist, so sind die Ableitungen Größen derselben Art, wie die betreffendenden Integrale. Die innere Polarableitung eines Vektorfeldes ist demnach ein Skalar, die *Divergenz* des Vektorfeldes

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} df | \boldsymbol{v} = \frac{1}{d\tau} \int_{d\tau} df | \boldsymbol{v},$$

die seitliche Polarableitung ist ein Vektor, der *Rotor*[1]) (im Anschlusse an Jaumann) oder *Wirbel* des Feldes

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} df \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{d\tau} \int_{d\tau} df \times \boldsymbol{v},$$

die algebraische Polarableitung ist der *Tensor* des Feldes

$$\lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} df \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{d\tau} \int_{d\tau} df \cdot \boldsymbol{v},$$

die dyadische Polarableitung endlich ein Affinor, der *abgeleitete Affinor* des Feldvektors

$$\Phi = \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} df, \boldsymbol{v} = \frac{1}{d\tau} \int_{d\tau} df, \boldsymbol{v}.$$

1) Die Benutzung einer *englischen* Bezeichnung, curl, für diese Größe, deren volle Würdigung man Helmholtz verdankt, scheint mir ganz unpassend.

Zunächst wollen wir nun untersuchen, welche Form die Polarableitung in rechtwinkligen Koordinaten annehmen. Wir führen dies an der dyadischen Polarableitung aus, weil sie durch die allgemeinste der hier verwendeten Multiplikationsarten gewonnen wurde und von ihr aus die andern Fälle leicht zu übersehen sind. Als Raumelement $d\tau$ nehmen wir ein unendlich kleines Parallelepiped, dessen Kanten parallel sind zu den Koordinatenachsen. Für seine Oberfläche ist das Integral $O^{(d)} = \int df, v$ zu bilden. Sind df_x, df_y, df_z die rechteckigen Flächenelemente normal zur x, y, z-Richtung, so ist

$$O^{(d)}_{d\tau} = \int df, v = \sum (df_x + df_y + df_z), v.$$

Den sechs Flächenelementen entsprechend hat man sechs Summanden in drei Paaren, jedes zu zwei gegenüberliegenden Flächenelementen gehörend. Ein solches Paar liefert offenbar für die Summe den Beitrag

$$-df_x, v + df_x, \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) = df_x, \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

weil die Flächenvektoren df_x gleich lang, aber entgegengesetzt sind, oder

$$dx\, df_x, \frac{\partial v}{\partial x} = d\tau\, e_x, \frac{\partial v}{\partial x},$$

wenn e_x, e_y, e_z Einheitsvektoren in den Koordinatenachsen-Richtungen sind. Es ist also

$$\frac{1}{d\tau} \int_{d\tau} df, v = e_x, \frac{\partial v}{\partial x} + e_y, \frac{\partial v}{\partial x} + e_z, \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}\right), v = \nabla, v,$$

wo ∇ der bekannte Hamiltonsche Operator ist. Die dyadische Polarableitung des Vektors v läßt sich in rechtwinkligen Koordinaten demnach darstellen als dyadisches Produkt des symbolischen Vektors ∇ mit dem Feldvektor v. Man bemerkt, daß bei dieser Ableitung die besonderen Eigenschaften der benutzten (dyadischen) Multiplikationsart gar nicht zur Verwendung kommen. Daher ändert sich nichts im Gange der Rechnung, wenn statt des dyadischen Produktes das innere oder seitliche angewendet wird, oder wenn endlich an die Stelle des Vektors v ein Skalar φ tritt. Man erhält somit die Polarableitung einer bestimmten Art für die Feldgröße, indem man das Produkt derselben Art bildet aus dem symbolischen Vektor ∇ und der Feldgröße. Zu der vorigen Formel kommt daher noch

$$\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} df \cdot \varphi = \nabla \varphi,$$

$$\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} df \,|\, v = \nabla | v,$$

$$\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} df \times v = \nabla \times v.$$

Hieraus folgern wir: Die Anwendung der Hamiltonschen Operation ∇ ist nichts anderes, als die Bildung der Polarableitung in rechtwinkligen Koordinaten. Da das Ergebnis unabhängig ist von der Benutzung irgend eines Koordinatensystems, so kann und soll im Folgenden das Hamiltonsche Symbol ∇ gebraucht werden als Operationszeichen ohne Bezug auf ein Koordinatensystem, um die Bildung der Polarableitung anzudeuten und zugleich die Art dieser Bildung anzugeben. Daher bedeutet im Folgenden

$$\nabla. = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} df. \quad \text{und} \quad .\nabla = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} \cdot df,$$

wobei durch die Multiplikationsart und Stellung des Operationszeichens ∇ jene von df gekennzeichnet wird, so daß z. B.

$$v \wedge \nabla = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} v \wedge df.$$

Die Axialableitung kann in derselben Weise gebildet werden, wie die Polarableitung. Man hätte in den früheren Formeln nur statt df das Bogenelement ds der Randkurve zu setzen und statt $d\tau$ den Flächeninhalt df des von ihr begrenzten Ebenenelementes. Daraus ergibt sich, daß die Axialableitungen Größen derselben Art sind, wie die entsprechenden Polarableitungen, also beispielsweise ist die innere Axialableitung eines Vektors ein Skalar usw.

Die Vorgangsweise, welche zur Festlegung der Ableitungen gedient hat, bringt es nun mit sich, daß man das Raumintegral der Polarableitung einer Größe verwandeln kann in das Flächenintegral dieser Größe, genommen über die Oberfläche des Raumteiles, und ferner das Flächenintegral der Axialableitung einer Größe in das Linienintegral der Größe, gebildet für den Flächenrand. Wir bezeichnen diese Beziehungen als den *verallgemeinerten Satz von Gauß*. Sie ergeben sich durch einen Integrationsvorgang, der invers ist zu dem bei Aufstellung der Ableitungen verfolgten Differentiationsvorgang. Es sei in dem Größenfelde ein Raum- bzw. Flächenstück gegeben. Wir teilen es in

Elemente von Tetraeder- bzw. Dreiecksform. Das ist immer möglich. Im zweiten Falle seien die Vektoren df sämtlich nach derselben Flächenseite gerichtet. Die Polar-, bzw. Axialableitung der Feldgröße für einen beliebigen Punkt des gegebenen Raum- bzw. Flächenstückes kann angesehen werden als das mit $\frac{1}{d\tau}$ bzw. $\frac{1}{df}$ multiplizierte Oberflächen-, bzw. Randintegral $O_{d\tau}$, R_{df} für das den Punkt umschließende tetraedrische, bzw. dreieckige Element. Es ist also

$$d\tau \cdot O' = O_{d\tau}, \qquad df \cdot R'_e = R_{df}$$

und daher

$$\int_\tau d\tau \cdot O' = \int_\tau O_{d\tau}, \qquad \int_f df \cdot R'_e = \int_f R_{df}.$$

Bei der Summierung der $O_{d\tau}$, R_{df} rechts wird offenbar jede Tetraederfläche, Dreieckseite, die innerhalb des Gebietes τ, f liegt, zweimal durchlaufen, je als Begrenzung zweier Nachbarelemente. Jedes solche Summandenpaar für eine gemeinsame Begrenzung hebt sich gegenseitig weg, da letztere entgegengesetzten Richtungssinn hat für die benachbarten Elemente und demnach die betreffenden Summanden gleich, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen ausfallen. Es bleiben also nur die Glieder, die sich auf die Oberfläche von τ, den Rand von f beziehen, und wir haben

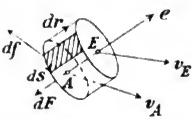
$$\int_\tau O_{d\tau} = O_\tau, \qquad \int_f R_{df} = R_f.$$

Setzen wir oben ein, so folgt als Ausdruck des *verallgemeinerten Satzes von Gauß*

$$(2) \qquad \int_\tau d\tau \cdot O'(G) = \int_\tau d\tau \cdot \nabla G = \int_\tau df \cdot G,$$

$$\int_f df \cdot R'_e(G) = \int_f ds \cdot G,$$

wo G die Feldgröße bedeutet, und bei der Produktbildung rechts dieselbe Multiplikationsart zu gebrauchen ist, welche links zur Herstellung der Ableitung gedient hat, wie aus dem Früheren ersichtlich ist.



Nun erhebt sich die Frage nach dem Zusammenhange zwischen Axial- und Polarableitung. Um sie zu beantworten, gehen wir von der ersteren aus und versuchen, das Randintegral für ein Flächenelement dF in Beziehung zu setzen zu dem Oberflächenintegral für ein Raumelement $d\tau$ von geeigneter Form, so daß dF zur Begrenzung von $d\tau$ gehört. Es gelingt dies[1]), wenn man über dF als

1) Vergl. die Figur.

Grundfläche ein zylindrisches (prismatisches) Raumelement abgrenzt, dessen Mantelfläche normal steht zu dF, während die Endebene zu diesem parallel ist. Der positive Umlaufssinn des Randes von dF sei willkürlich gewählt, womit, gemäß der früheren Festsetzung, die Richtung des Vektors dF festgelegt ist. Der gleichgerichtete Einheitsvektor sei e. Das Element $d\tau$ werde nach der positiven Seite von dF abgegrenzt, die Erzeugende des Mantels sei dr. Wir betrachten die Axialableitung einer Feldgröße G

$$R'_e(G) = \frac{1}{dF}\int\limits_{dF} ds \cdot G \tag{1a}$$

Um das Raumelement $d\tau$ einzuführen, setzen wir

$$\frac{1}{dF} = \frac{dr}{d\tau},$$

und da dr eine konstant gewählte Größe ist, so kann damit unter dem Integralzeichen multipliziert werden, so daß wir dort haben $dr ds \cdot G$. Nun ist $dr \cdot ds$ die Größe eines rechteckigen Elementes df der Mantelfläche, dessen Vektor df jedoch normal steht auf $dr \cdot ds$. Daher hat man

$$dr \cdot ds = e \times df,$$

und es wird

$$R'_e(G) = \frac{1}{d\tau}\int\limits_{d\tau} (e \times df) \cdot G, \tag{3}$$

wo die Integration über die ganze Oberfläche von $d\tau$ zu erstrecken ist, denn die beiden auf die Endflächen bezüglichen Summanden verschwinden, weil hier die Vektoren e und df parallel sind. Da wir bei unserer Betrachtung gar keinen Gebrauch gemacht haben von den besonderen Eigenschaften des Produktes $ds \cdot G$, so ist auch das Ergebnis hiervon unabhängig.

Die Axialableitung einer Größe läßt sich also wieder darstellen mittels des Grenzwertes eines Oberflächenintegrals, welches jedoch in anderer Weise gebildet ist als bei der Polarableitung. Statt jedes Vektors df ist jetzt ein zu diesem und der Achse normaler eingeführt, dessen Größe gleich ist der zur Achse e normalen Komponente von df. Daher könnte die Größe $\frac{1}{d\tau}\int\limits_{d\tau}(e \times df) \cdot G$ bezeichnet werden als eine *komponentale Polarableitung* für die Richtung e. Wollte man die Bildung dieser Ableitung durch ein Operationszeichen andeuten, so könnte man setzen

$$\frac{1}{d\tau}\int\limits_{d\tau}(e \times df). = (e \times \nabla).$$

Ist die Größe G ein Skalar φ, so haben wir

$$(e \times \nabla)\,\varphi = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(e \times df)\,\varphi = \frac{e}{d\tau} \times \int_{d\tau} df \cdot \varphi = e \times (\nabla\,\varphi).$$

Für einen Vektor v ist

$$(e \times \nabla)|v = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(e \times df)|v = \frac{e}{d\tau}\int_{d\tau}(df \times v = e|(\nabla \times v),$$

$$(4)\quad (e \times \nabla) \times v = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(e \times df) \times v = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}[(v|e)\,df - (v\;df)|e]$$

$$= \nabla(e|v) - e(\nabla|v),$$

$$(e \times \nabla),\, v = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(e \times df),\, v = \frac{e}{d\tau} \times \int_{d\tau} df,\, v = e \times (\nabla,\, v).$$

Die Umformungsgleichungen des Randintegrals in das Flächenintegral der komponentalen Polarableitung, der *verallgemeinerte Satz von Stokes*, wird jetzt

$$(5)\qquad \int_f ds \cdot G = \int_f df \cdot (e \times \nabla) \cdot G.$$

Mit Rücksicht auf die eben gefundenen Ausdrücke ergibt sich demnach

$$(6)\qquad \begin{aligned} \int_f ds \cdot \varphi &= \int_f df \times (\nabla\varphi), \\ \int_f ds|v &= \int_f df|(\nabla \times v), \\ \int_f ds \times v &= \int_f df \cdot \nabla(e|v) - \int_f df \cdot (\nabla v), \\ \int_f ds,\, v &= \int_f df \times (\nabla,\, v). \end{aligned}$$

Nun ist es naheliegend, zur Bildung einer Polarableitung auch noch das Verfahren zu benützen, das gegeben ist durch Anwendung von

$$(e|\nabla) = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(e|df).$$

Auch hier müßte der Grenzwert als eine komponentale Polarableitung P'_e bezeichnet werden. Statt jedes Vektors df ist da die Größe seiner Projektion auf die Richtung e benützt,

$$(3\,b)\qquad P'_e(G) = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(e|df)\,G.$$

Für einen Skalar φ als Feldgröße ist

$$(e|\nabla)\varphi = \frac{1}{d\tau}\int\limits_{d\tau}(e|df)\varphi = \frac{e}{d\tau}\int\limits_{d\tau} df\cdot\varphi = e|(\nabla\varphi),$$

für einen Vektor v

(4a) $$(e|\nabla)v = \frac{1}{d\tau}\int\limits_{d\tau}(e|df)v = \frac{e}{d\tau}\Big|\int\limits_{d\tau} df, v = e|(\nabla, v).$$

Die Ableitung R'_e haben wir ursprünglich gewonnen mit Hilfe des Grenzwertes eines Randintegrals der Feldgröße G. Eine ähnliche Deutung versuchen wir nun auch bei P'_e. Wenn das Raumelement $d\tau$ von derselben Form vorausgesetzt wird, wie im vorigen Falle, so verschwinden in dem Integralausdrucke für P'_e alle Summanden, die sich auf die Mantelfläche beziehen, da für diese df normal steht auf e. Es bleiben nur die beiden auf die gleich großen Endflächen bezüglichen Glieder, und da nimmt außerdem edf die Werte $-df$, bzw. df an. Die Feldgröße für die Grundfläche sei G_A, für die Endfläche G_E. Dann wird

$$P'_e(G) = \frac{df}{d\tau}(-G_A + G_E)$$

und wegen

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{dr}$$

ist weiter

$$P'_e = \frac{1}{dr}(-G_A + G_E) = \frac{dG}{dr},$$

wenn dG die Änderung der Feldgröße auf dem Linienelement dr ist. Die Ableitung P'_e ist also gleich dem Differentialquotienten der Feldgröße, genommen nach der Richtung e. Demnach ist

$$(e|\nabla)G = \frac{dG}{dr},$$

(4b) $$(e|\nabla)\varphi = e|(\nabla\varphi) = \frac{d\varphi}{dr},$$

$$(e|\nabla)v = e|(\nabla, v) = \frac{dv}{dr}.$$

Weiter können wir setzen

(1b) $$P'_e = \frac{1}{dr}\sum_{dr} G,$$

wenn das Summenzeichen so verstanden wird, wie früher die Integralzeichen, daß sich nämlich die Summation bezieht auf die Feldgröße in den Grenzpunkten des Elementes dr, wobei G im Anfangspunkte negativ, im Endpunkte positiv zu nehmen ist. So aufgefaßt erscheint

die in Rede stehende Ableitung wieder gewonnen mittels des Grenzwertes einer Summe P, die zu bilden ist aus den Werten von G für die Grenzpunkte einer nicht geschlossenen Kurve. Statt des Oberflächenintegrals für ein Raumelement und des Randintegrals für ein Flächenelement haben wir hier, um es entsprechend auszudrücken, eine Grenzpunktsumme für ein Linienelement, P_{dr}. Die vorliegende Ableitung von G

$$P'_e = \frac{P_{dr}}{dr},$$

wäre zu bezeichnen als *Linearableitung* der Feldgröße *für die Richtung* e.

Man erkennt ohne weiteres, daß sich die Grenzpunktsumme eines Kurvenstückes s umwandeln läßt in das Linienintegral der Linearableitung, denn bei der Summation längs der Kurve ist innerhalb der Grenzpunkte der Endpunkt jedes Bogenelementes $d\boldsymbol{r}$ zugleich Anfangspunkt des folgenden, die betreffenden beiden Summanden heben sich also weg, und es bleiben nur die auf die Grenzpunkte bezüglichen Glieder übrig, also

(2a) $$\int\limits_s d\boldsymbol{r}\, P'_e(G) = \sum_s G.$$

Das ist der *verallgemeinerte Satz von Gauß* für diesen Fall. Die Umformungsgleichung der Grenzpunktsumme in das Linienintegral der komponentalen Polarableitung, d. i. der *verallgemeinerte Satz von Stokes*, wird hier

(5a) $$\sum_s G = \int\limits_s d\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{e} \,|\, \nabla)\, G,$$

und daher

$$\sum_s \varphi = \int\limits_s d\boldsymbol{s} \,|\, (\nabla \varphi),$$

(6a) $$\sum_s \boldsymbol{v} = \int\limits_s d\boldsymbol{s} \,|\, (\nabla, \boldsymbol{v}).$$

Die letzten vier Gleichungen sind nur verschiedene Formen der Gleichung

$$-G_A + G_E = \int\limits_s d\boldsymbol{r}\, \frac{dG}{d\boldsymbol{r}},$$

ihre Ableitung in der vorliegenden Weise erfolgte der Übereinstimmung mit den früheren Fällen halber.

Da im Vorhergehenden alle Formeln ohne Bezugnahme auf ein Koordinatensystem gelten, können sie nun dazu dienen, die entsprechenden Beziehungen in verschiedenen Koordinaten aufzustellen. Man wird da die bei der Ableitungsbildung benützten Raum-, Flächen- und Linien-

elemente dem Koordinatensystem entsprechend wählen, für welches die Formeln aufgestellt werden sollen. Bei krummlinigen Koordinaten verwendet man zur Festlegung eines Punktes drei Flächenscharen. Um die Formeln für ein solches Koordinatensystem zu erhalten, wird man das Raumelement begrenzt denken durch Flächenelemente, die den Flächen jener Scharen angehören, ebenso die Flächenelemente durch die Schnittkurven jener Flächen und die Linienelemente in diesen Schnittkurven. Jedes Flächen- und Linienelement wird man ausdrücken durch seine Komponenten bezüglich des verwendeten Koordinatensystems. Koordinatentransformationen sind nicht erforderlich.[1])

Es besteht kein Hindernis, das Verfahren, welches zur Erzeugung der Ableitungen gedient hat, auf sie selbst anzuwenden und so Ableitungen zweiter und höherer Ordnung zu gewinnen. Man gelangt so zu einer großen Mannigfaltigkeit von Bildungen, die jedoch hier nicht untersucht werden sollen.

Im Anschlusse an das Vorhergehende wollen wir dagegen die bekannte Zerlegung eines Feldvektors in einen rotorfreien (wirbelfreien) und divergenzfreien (quellfreien) Bestandteil besprechen, weil sie sich mit Benützung der Polarableitungen des Vektors sehr übersichtlich darstellen läßt.

Ist ein Vektorfeld $\mathfrak{v}$ gegeben, so ist $\nabla, \mathfrak{v}$ der abgeleitete Affinor, $\nabla\, \mathfrak{v}$ die Divergenz, $\nabla \times \mathfrak{v}$ der Rotor oder Wirbel des Feldes. Gleichzeitig ist $\nabla\, \mathfrak{v}$ der „Skalar" des abgeleiteten Affinors, $\nabla \times \mathfrak{v}$ sein „Vektor". Kennt man also Skalar und Vektor eines Affinors Φ, so sind damit auch Divergenz und Rotor jenes Vektorfeldes bestimmt, dessen abgeleiteter Affinor Φ ist, vorausgesetzt, daß ein solches Feld möglich ist. Wäre nun $\mathfrak{v}$ bereits in einen rotorfreien Summanden $\mathfrak{v}_1$ und einen divergenzfreien $\mathfrak{v}_2$ zerlegt,

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2, \qquad \nabla \times \mathfrak{v}_1 = 0, \qquad \nabla\, \mathfrak{v}_2 = 0,$$

und Φ_1, Φ_2 die entsprechenden abgeleiteten Affinoren, so muß offenbar der Vektor von Φ_1 und der Skalar von Φ_2 verschwinden. Außerdem muß

$$\nabla, \mathfrak{v}_1 + \nabla, \mathfrak{v}_2 = \nabla, \mathfrak{v}$$

sein, und die Aufgabe der Zerlegung von $\mathfrak{v}$ in der genannten Art enthält daher die andere, den abgeleiteten Affinor $\nabla, \mathfrak{v}$ als Summe zweier anderen darzustellen von den eben genannten Eigenschaften.

---

1) Vergl. meine seither entstandene Arbeit: *Die Polarableitung in rechtwinkeligen, krummlinigen Koordinaten*, Sitzungsber. d. kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien, 1908.

Setzt man $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$, also

$$\nabla, \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(df, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}, df) + \frac{1}{2}\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(df, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}, df),$$

so ist dies die gewünschte Zerlegung. Es ist das eine identische Umformung, wenn die Integrale für dieselbe Oberfläche genommen werden. Die Gleichung gilt jedoch unabhängig von dieser Voraussetzung, da die Grenzwerte der Integrale von der Flächenform nicht abhängen. Die beiden Größen rechts sind wieder Affinoren

$$\nabla, \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(df, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}, df),$$

$$\nabla, \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(df, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}, df),$$

$\nabla, \boldsymbol{v}_1$ symmetrisch, $\nabla, \boldsymbol{v}_2$ antisymmetrisch. Mit Benützung des Operationszeichens ∇ kann man schreiben

$$\nabla, \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}(\nabla, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}, \nabla),$$

$$\nabla, \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}(\nabla, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}, \nabla).$$

Dabei ist ∇ nicht als symbolischer Faktor gemeint, sondern als Andeutung der zu bildenden Polarableitung von $\boldsymbol{v}$, und seine Stellung im Produkte gibt die von df an.

Der symmetrische Affinor $\nabla, \boldsymbol{v}$ ist der *Tensor* des gegebenen Vektorfeldes. Sein Skalar ist

$$\nabla\, \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(df\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\, df) = \nabla \boldsymbol{v},$$

sein Vektor dagegen

$$\nabla \times \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(df \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times df) = 0.$$

Das Feld $\boldsymbol{v}_1$ ist demnach wirbelfrei, seine Divergenz aber stimmt mit der des Feldes $\boldsymbol{v}$ überein. Der antisymmetrische Affinor $\nabla, \boldsymbol{v}_2$ hat den Skalar

$$\nabla\, \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\int_{d\tau}(df\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\, df) = 0,$$

sein Vektor dagegen ist

$$\nabla \times \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\int_{d\tau}(df \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times df) = \nabla \times \boldsymbol{v}.$$

Das Vektorfeld $\boldsymbol{v}_2$ ist also divergenzfrei und sein Wirbel stimmt überein mit dem von $\boldsymbol{v}$.

Nach Gleichung (4b) ist

$$dv = dr|(\nabla, v),$$

also, wenn von irgend einem Anfangspunkte O, wo der Vektor v_0 ist, nach der ins Auge gefaßten Feldstelle mit dem Vektor v eine Kurve s gezogen wird,

$$v - v_0 = \int_s dr | (\nabla, v).$$

Für die beiden Vektorkomponenten v_1, v_2 hat man also nach Einsetzen der Werte für ∇, v_1 und ∇, v_2 die Ausdrücke

$$v_1 = (v_1)_0 + \tfrac{1}{2}\int_s dr|(\nabla, v + v, \nabla),$$

$$v_2 = (v_2)_0 + \tfrac{1}{2}\int_s dr|(\nabla, v - v, \nabla).$$

Ein Affinor Φ stellt eine Affinität dar. Multipliziert man den Ortsvektor r eines Punktes A innerlich mit Φ, so ordnet der Vektor $r' = r + r\,|\,\Phi$ als Ortsvektor eines Punktes A' diesen dem A so als entsprechenden zu, daß die Punktsysteme (A) und (A') affin sind. Einer Kugel in (A) entspricht ein dreiachsiges Ellipsoid in (A'), dessen Hauptachsendreikant im allgemeinen gedreht ist gegen das entsprechende rechtwinklige Dreikant von Kugeldurchmessern.

Ist der Affinor symmetrisch, so ist seine Affinität orthogonal, die erwähnten Dreikante sind parallel. Ein solcher Affinor heißt Tensor. Er läßt sich am einfachsten darstellen als eine Summe von algebraischen Produkten. Bezeichnet Φ_1 einen symmetrischen Affinor, so ist dessen allgemeine Form

$$\Phi_1 = \sum (a, b + b, a)$$

und daher

$$\begin{aligned} r\,|\,\Phi &= \sum [(r\,|\,a) b + (r\,|\,b) a] \\ &= 2 \sum r\,|\,(ab) \\ &= 2 r\,|\,\sum ab, \end{aligned}$$

und da dies für jedes r gilt, so folgt

$$\Phi_1 = 2 \sum ab.$$

Die Affinität eines antisymmetrischen Affinors Φ_2 läßt sich ausdrücken durch jene, welche ein Vektor oder ein Bivektor bestimmt. Es sei

$$\Phi_2 = \sum (a, b - b, a),$$

so ist

$$\begin{aligned} r \mid \Phi_2 &= \sum[(r \mid a) b - (r \mid b) a] \\ &= \sum r \times (b \times a) \\ &= r \times \sum b \times a = r \mid \sum b \wedge a. \end{aligned}$$

Der Vektor des Affinors Φ_2 ist

$$u = 2 \sum a \times b,$$

sein Bivektor

$$\nu = 2 \sum a \wedge b,$$

Es ist also auch

$$\begin{aligned} r \mid \Phi_2 &= -\tfrac{1}{2}\, r \times u \\ &= -\tfrac{1}{2}\, r \mid \nu. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Phi_2 = -\times \frac{u}{2} = -\times \sum a \times b,$$

$$\Phi_2 = -\frac{\nu}{2} = -\sum a \wedge b.^{1)}$$

In die erste Gleichung ist als erster Faktor ein beliebiger Vektor zu setzen. Die Affinität von Φ_2 ist

$$r' = r - \tfrac{1}{2}\, r \times u,$$

zum Ortsvektor r tritt also noch ein zu ihm und u normaler Summand hinzu, dessen Größe proportional ist der zu u normalen Komponente r_n von r. Die Dreiecke aus den Vektoren r'_n, r_n, $\frac{1}{2} r_n \times u$ sind somit sämtlich ähnlich, die r'_n sind den r_n proportional und gegen diese um ein und denselben Winkel gedreht. Die Affinität besteht in einer Drehung des Punktsystems (A) um u als Achse und gleichzeitiger Vergrößerung des Normalabstandes r_n jedes Punktes proportional seinem ursprünglichen Abstande.

Es wurde oben die Zerlegung

$$a, b = \tfrac{1}{2}(a, b + b, a) + \tfrac{1}{2}(a, b - b, a)$$

angewendet. Nach dem eben Gesagten ist also, wie man auch unmittelbar sieht,

$$\begin{aligned} r \mid (a, b) &= r \mid (ab) - \tfrac{1}{2}\, r \times (a \times b) \\ &= r \mid (ab) - \tfrac{1}{2}\, r \mid (a \wedge b), \end{aligned}$$

1) Zur Auffindung dieser Formel wurde ich angeregt durch die in der folgenden Anmerkung erwähnte Formel.

und demnach

$$|(a, b) = |(ab) - \times \tfrac{1}{2}(a \times b),$$
$$a, b = ab - \tfrac{1}{2}\, a \wedge b.$$ [1])

In der ersten Formel ist als erster Faktor wieder ein beliebiger Vektor zu setzen, die zweite liefert die Zerlegung eines dyadischen Produktes zweier Vektoren in ein algebraisches und ein äußeres.

Nach dem Gesagten lassen sich die Ausdrücke für die Affinoren ∇, v_1 und ∇, v_2 einfacher schreiben. Es ist

$$\nabla, v_1 = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} df \cdot v = \nabla v,$$

$$\nabla, v_2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} df \wedge v = -\tfrac{1}{2}\nabla \wedge v = -\times \tfrac{1}{2}(\nabla \times v),$$

$$\nabla, v = \nabla v - \tfrac{1}{2}\nabla \wedge v,$$

$$|(\nabla, v) = |(\nabla v) - \times \tfrac{1}{2}(\nabla \times v).$$

Daher

$$dv_1 = dr\,|\,(\nabla v),$$

$$dv_2 = -dr\,|\,\tfrac{1}{2}(\nabla \wedge v) = -dr \times \tfrac{1}{2}(\nabla \times v),$$

$$dv = dr\,|\,(\nabla v - \tfrac{1}{2}\nabla \wedge v)$$ [2])

$$= dr\,|\,(\nabla v) - dr \times \tfrac{1}{2}(\nabla \times v).$$

Weiter ist

$$v_1 = (v_1)_0 + \int_s dr\,|\,(\nabla v),$$

$$v_2 = (v_2)_0 - \tfrac{1}{2}\int_s dr\,|\,(\nabla \wedge v) = (v_2)_0 - \tfrac{1}{2}\int_s dr \times (\nabla \times v).$$

Wir wollen nun annehmen, die Vektoren v seien die Geschwindigkeiten der Punkte einer strömenden Flüssigkeit. Geht man von einem Punkte, dessen Geschwindigkeit v ist, zu einem Nachbarpunkte über im Abstande dr, dessen Geschwindigkeit im selben Augenblick $v + dv$ ist, so hat man für den Zuwachs dv den obigen Ausdruck $dv = dr\,|\,(\nabla, v)$. Dies ist die relative Geschwindigkeit des Punktes A' gegen A. Das Flüssigkeitselement um A, welches etwa kugelförmig vorausgesetzt sei,

1) Die Kenntnis der Formel in dieser Gestalt verdanke ich einer gütigen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. Mehmke. Ihr zufolge hat sie Herr Mehmke erstmals vor vier Jahren in einer Vorlesung über Vektorenrechnung mitgeteilt, aber noch nirgends veröffentlicht.

2) Vgl. die vorige Anmerkung.

erleidet beim Strömen eine Formänderung, indem sich seine Punkte A' mit diesen Geschwindigkeiten gegen A verschieben. Da man nun, nach dem früher Gesagten, den Affinor $\nabla, \mathfrak{v}$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Affinor zerlegen kann, $\nabla, \mathfrak{v}_1$ und $\nabla, \mathfrak{v}_2$, so ist dies dementsprechend auch bei der Relativgeschwindigkeit $d\mathfrak{v}$ möglich und die betreffenden beiden Komponenten sind $d\mathfrak{v}_1$ und $d\mathfrak{v}_2$. Die Relativgeschwindigkeit

$$d\mathfrak{v}_2 = \tfrac{1}{2}(\nabla \times \mathfrak{v}) \times d\mathfrak{r}$$

von A' ist, wie der Ausdruck zeigt, proportional dem Normalabstande des Punktes vom Rotor $\nabla \times \mathfrak{v}$ in A, kann somit aufgefaßt werden als herrührend von einer Drehung des Flüssigkeitselementes um den Rotor $\nabla \times \mathfrak{v}$ als Achse wie ein starrer Körper. Die Drehgeschwindigkeit ist

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2}\nabla \times \mathfrak{v}.$$

Die Relativgeschwindigkeit $d\mathfrak{v}_1$ entspricht der Formänderung des Elementes, mit diesen Geschwindigkeiten verschieben sich die Punkte A' gegen das Hauptachsendreieck des Tensors $\nabla \mathfrak{v}$.

Februar 1908.

Über Fehlerabschätzung bei unendlichen Produkten.[1])

Von Richard Kischke in Königsberg in Pr.

Einleitung.

Die unendlichen Produkte haben als analytische Darstellungsformen mit den unendlichen Reihen nach theoretischer Hinsicht prinzipiell gleiche Berechtigung. Ihre Verwendbarkeit zur Herleitung der Eigenschaften der durch sie dargestellten Funktionen ist nun allerdings aus manchen Gründen eine geringere als die der unendlichen Reihen.[2]) Nicht aber ihre Brauchbarkeit zur *numerischen Berechnung*. So zeichnen sich manche Produktentwicklungen, z. B. die der elliptischen Integrale durch ihre *starke Konvergenz* aus, weshalb Legendre sie zur Berechnung seiner Tafeln benutzt hat. Ferner erscheint es in dem Falle, wo *Pro-*

1) Die vorliegende Arbeit ist im wesentlichen ein kurzer Auszug aus meiner Inaugural-Dissertation gleichen Titels (Königsberg 1908).

2) Vgl. z. B. G. A. Kinn, Die Anwendung unendlicher Produkte in der Funktionentheorie. Progr. d. Gymn. in Sächs. Regen. Hermannstadt 1899.

dukte oder Quotienten von Funktionen auftreten, naturgemäß, die Produktentwicklungen vor den Reihen zu bevorzugen. Dies ist aber bisher, soweit mir bekannt, wenig geschehen; man geht bei numerischen Berechnungen einseitig vor, indem man die Reihenentwicklungen bevorzugt. So wenden z. B. auch Klein und Sommerfeld[1]) bei dem Problem der Bewegung eines starren Körpers um einen festgehaltenen Punkt zur Berechnung eines aus vier Thetafunktionen multiplikativ zusammengesetzten Ausdrucks die *Reihen* an. Die Anwendung der *Produkt*entwicklung dürfte sich dabei, wie ich zeigen werde, mehr empfehlen.

Der Grund dafür, daß die Produktentwicklungen selten benutzt werden, mag vielleicht auch darin zu suchen sein, daß man bis vor kurzem keine allgemeine Regel kannte, um den *Fehler beim Abbrechen eines unendlichen Produkts hinter einer endlichen Anzahl von Faktoren* bestimmen zu können — eine Forderung, die neben der Konvergenz an jeden zur numerischen Rechnung benutzten unendlichen Prozeß gestellt werden muß.[2])

Eine solche, auch für Produkte mit komplexen Faktoren gültige *Fehlerabschätzungsregel* ist von meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. W. Fr. Meyer gegeben worden.[3]) Durch ihn wurde ich zur Beschäftigung mit dem vorliegenden Gegenstande veranlaßt.

Abschnitt I: Verschiedene Fehlerarten.

In einem konvergenten unendlichen Produkte $\prod_{n=0}^{\infty}(1+v_n)$, wo die v_n im allgemeinen komplexe Größen seien, wird das Restprodukt $P_{\nu,p}=\prod_{n=\nu}^{\nu+p-1}(1+v_n)$ für ein genügend hoch gewähltes ν und für jeden ganzzahligen Wert von p den Wert des Produktes der ν ersten Faktoren $\Pi_\nu=\prod_{n=0}^{\nu-1}(1+v_n)$ nicht mehr wesentlich ändern (wie unmittelbar aus der Konvergenzdefinition folgt).[4]) Daher ist man berechtigt, eine durch das unendliche Produkt $\prod_{n=0}^{\infty}$ definierte Funktion dem endlichen Produkte

1) „Über die Theorie des Kreisels". Heft II, Kap. VI, § 6.

2) Vgl. z. B. W. F. Osgood, Allgemeine Theorie d. analyt. Funktionen. Enzyklop. d. math. Wiss. II, B 1, S. 8.

3) Acta Mathematica 30 (1906), S. 93—98.

4) Vgl. A. Pringsheim, Irrationalzahlen u. Konvergenz unendlicher Prozesse. Enzykl. d. math. Wiss. I, A 3, S. 113.

Π_ν der ν ersten Faktoren näherungsweise gleichzusetzen. Der dabei begangene „Fehler" ist die Differenz

$$\prod_{n=0}^{\infty} - \prod_{n=0}^{\nu-1} = \prod_{n=0}^{\nu-1} \cdot \prod_{n=\nu}^{\infty} - \prod_{n=0}^{\nu-1} = \prod_{n=0}^{\nu-1} \cdot \left(\prod_{n=\nu}^{\infty} - 1 \right).$$

Diesen Fehler kann man nicht genau berechnen, sondern man wird ihn in Grenzen einschließen, d. h. für

$$\Pi_\nu \cdot P_{\nu,p} - \Pi_\nu = \Pi_\nu (P_{\nu,p} - 1)$$

eine *obere* und eine *untere* von p unabhängige Grenze angeben.

Dieser „Fehler" oder besser *„wahrer Fehler"* kann noch mit den bei der Ausführung der numerischen Rechnung etwa durch Benutzung von Logarithmentafeln und Abkürzen von unendlichen Dezimalbrüchen hervorgerufenen Fehlern behaftet sein. Die Größe dieses „Rechenfehlers" kann man für sich in Grenzen einschließen[1]), auf deren gesonderte Angabe hier jedoch verzichtet wird. Den absoluten Betrag des „wahren Fehlers", also

$$\left| \prod_{n=0}^{\infty} - \Pi_\nu \right| = |\Pi_\nu| \cdot \left| \prod_{n=\nu}^{\infty} - 1 \right|$$

oder

$$|\Pi_\nu \cdot P_{\nu,p} - \Pi_\nu| = |\Pi_\nu| \cdot |P_{\nu,p} - 1| \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

will ich den *„absoluten Fehler"* nennen.

Der Quotient aus dem absoluten Fehler und dem absoluten Betrag des genauen Wertes:

$$\frac{\left| \prod_{n=0}^{\infty} - \Pi_\nu \right|}{\left| \prod_{n=0}^{\infty} \right|} = \frac{\left| \prod_{n=\nu}^{\infty} - 1 \right|}{\left| \prod_{n=\nu}^{\infty} \right|}$$

heißt *„relativer Fehler"*.

Diese beiden Fehlerarten wird man wieder — wie vorher den wahren Fehler — nicht genau berechnen, sondern wird sie in für jedes ganzzahlige p gültige Grenzen einschließen, die mit wachsendem ν gegen den gemeinsamen Grenzwert Null konvergieren.

Den *relativen Fehler* kann man auch dadurch definieren, daß er angibt, welchen Bruchteil des genauen Wertes der absolute Fehler ausmacht. Die Kenntnis des relativen Fehlers, die man sich, wie ersichtlich, noch vor Berechnung des Näherungswertes Π_ν verschaffen kann, ermöglicht es daher anzugeben, *wieviel Faktoren* des Produkts zur Berechnung von Π_ν verwendet werden müssen, damit die bei dem gerade vorliegenden Problem in Frage kommende Genauigkeit erreicht wird.

1) Vgl. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig 1900.

Abschnitt II: Fehlerabschätzungsregeln.

A. Abschätzungsregeln für den absoluten und relativen Fehler.

§ 1. Vorbetrachtung.

In den analytischen Ausdrücken für den absoluten und den relativen Fehler eines nach den ν ersten Faktoren abgebrochenen unendlichen Produkts (vgl. I) treten außer $|\Pi_\nu|$ noch die Größen $|P_{\nu,p}-1|$ und $|P_{\nu,p}|$ auf. Aus der Ungleichung

$$\text{(1)} \qquad \big||P_{\nu,p}|-1\big| \leq |P_{\nu,p}-1| < \varepsilon \qquad (0<\varepsilon<1)$$

folgt aber

$$\text{(2)} \qquad 1-\varepsilon < |P_{\nu,p}| < 1+\varepsilon.$$

Somit kommt es *nur* darauf an, eine Abschätzungsregel für $|P_{\nu,p}-1|$ aufzustellen; denn alsdann kann man nach (2) auch $|P_{\nu,p}|$ abschätzen und hat damit für den absoluten bzw. den relativen Fehler die verlangten Abschätzungsformeln:

$$\text{(3)} \qquad |\Pi_\nu| \cdot |P_{\nu,p}-1| < |\Pi_\nu| \cdot \varepsilon$$

bzw.

$$\text{(4)} \qquad \frac{|P_{\nu,p}-1|}{|P_{\nu,p}|} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

§ 2. Die Abschätzungsregel von W. Fr. Meyer.

Der Abschätzungsregel von W. Fr. Meyer[1]) liegt ein Satz über natürliche Logarithmen zugrunde:

Ist g reell und positiv, und liegt $|lg|$ unterhalb der positiven Größe γ, so gilt, gleichgültig ob $g \gtrless 1$ ist, die Ungleichung:

$$|g-1| < e^\gamma - 1,$$

oder, wenn man e^γ in eine Exponentialreihe entwickelt und diese hinter dem ersten Gliede abbricht — so daß $\gamma < 2$ vorauszusetzen ist —

$$\text{(I)} \qquad |g-1| < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1-\frac{\gamma}{2}}.$$

Es sei nun ein konvergentes unendliches Produkt vorgelegt:

$$\Pi = (1+v_0)(1+v_1)\ldots(1+v_{\nu-1})(1+v_\nu)\ldots(1+v_{\nu+p-1})\ldots,$$

1) „Eine auf unendliche Produkte sich beziehende Fehlerabschätzungsregel". Acta Math. 30 (1906), S. 93—98. — Für reelle Produkte ist die Abschätzungsregel auch schon in der „Differentialrechnung" von W. Fr. Meyer (Sammlung Schubert X) Leipzig 1901, § 24 abgeleitet worden.

wo die *reellen* Größen v beliebig positiv und negativ seien; für $n > \nu$ sei $|v_n| = u_n < 1$. Es soll der Fehler des Produkts Π abgeschätzt werden, wenn man hinter dem ν^{ten} Faktor $(1 + v_{\nu-1})$ abbricht, also (cf. § 1) $P_{\nu,p} - 1$, wo $P_{\nu,p}$ das Restprodukt bedeutet:

$$P_{\nu,p} = (1 + v_\nu)(1 + v_{\nu+1}) \ldots (1 + v_{\nu+p-1}).$$

1. *Π sei absolut (und damit unbedingt) konvergent,* also die Reihe der u konvergent. Nach dem Mittelwertsatze wird

$$l(1 + v_n) = \frac{v_n}{1 + \vartheta_n v_n} \qquad (0 < \vartheta_n < 1).$$

Ist v_n positiv, so hat man $l(1 + v_n) < v_n (= u_n)$. Ist v_n negativ $= -u_n$, so hat man $|l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u_n}$. Mithin ist in beiden Fällen:

$$|l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u_n} \qquad (n \geqq \nu),$$

oder, da mit Rücksicht auf $\lim u_n = 0$ alle $u_n (n \geqq \nu) \leqq u$:

$$|l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u},$$

folglich

$$|lP_{\nu,p}| < \frac{1}{1 - u}(u_\nu + u_{\nu+1} + \cdots + u_{\nu+p-1}).$$

Die Klammer rechterhand ist der Rest $R_{\nu,p}$ der u-Reihe; da diese Reihe konvergiert, so wird $R_{\nu,p}$ eine von p unabhängige (mit wachsendem ν gegen Null konvergierende) Grenze R_ν nicht überschreiten. Daher wird

$$|lP_{\nu,p}| < \frac{1}{1 - u} R_\nu$$

und unter Anwendung des Hilfssatzes (I):

$$(\text{II}^a) \quad |P_{\nu,p} - 1| < e^{\frac{1}{1-u} R_\nu} - 1 < \frac{\frac{1}{1-u} R_\nu}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-u} R_\nu}, \quad \left(R_{\nu,p} = \sum_{n=\nu}^{\nu+p-1} |v_n| \leqq R_\nu\right).^{1)}$$

---

1) Für positive $v_n = u_n$ folgt aus $l(1 + v_n) < u_n$ auch:

$$lP_{\nu,p} < \sum_{n=\nu}^{\nu+p-1} < R_\nu,$$

und somit wegen (I):

$$(\text{II}^b) \qquad P_{\nu,p} - 1 < e^{R_\nu} - 1 < \frac{R_\nu}{1 - \frac{1}{2} R_\nu}.$$

(Vgl. W. Fr. Meyer, Differentialrechnung, S. 377.) (II^b) ist etwas schärfer als (II^a).

2. *Das Produkt* Π *konvergiere bedingt* gegen einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwert; es sei also $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ bedingt konvergent und ferner $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2$ konvergent. Unter Benutzung des einmal erweiterten Mittelwertsatzes liefert dann der Hilfssatz (I) in ähnlicher Weise wie bei 1. die Abschätzungsformel:

$$\text{(III)} \qquad |P_{\nu,p} - 1| < e^{\varrho_\nu + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu} - 1 < \frac{\varrho_\nu + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu}{1 - \frac{1}{2}\varrho_\nu - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu},$$

wo $\left|\sum_{n=\nu}^{\nu+p-1} v_n\right| \leqq \varrho_\nu, \quad \sum_{n=\nu}^{\nu+p-1} v_n^2 \leqq V_\nu,$ und für $n \geqq \nu \; |v_n| = u_n \leqq u.$

Für das *komplexe* Gebiet lautet der Hilfssatz:

Bedeutet P eine komplexe Größe $= 1 + P_1$, $|P_1| < 1$, so folgt aus der Voraussetzung $|lP| < \gamma$ (γ reell, > 0), daß

$$\text{(IV)} \qquad |P - 1| < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Es sei nun das unendliche Produkt Π vorgelegt:

$$\Pi = (1 + v_0)(1 + v_1) \ldots (1 + v_\nu) \ldots (1 + v_{\nu+p-1}) \ldots,$$

wo die v_i komplexe Größen seien, deren absolute Beträge $|v_i| = u_i < 1$ vorausgesetzt werden. Es werde der allgemeinste Fall in Betracht gezogen[1]), daß die Reihen $\sum v$, $\sum v^2, \ldots \sum v^{n-1} (n \geqq 1)$ bedingt konvergieren, dagegen die Reihe $\sum v^n$ unbedingt konvergiere. Es sei

$$|R_{\nu,p}^{(k)}| = |v_\nu^k + v_{\nu+1}^k + \cdots + v_{\nu+p-1}^k| < \varrho_\nu^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$R_{\nu,p} = u_\nu^n + u_{\nu+1}^n + \ldots + u_{\nu+p-1}^n < V_\nu.$$

Für $i \geqq \nu$ seien alle $u_i \leqq u$, wo u — ebenso wie $\varrho_\nu^{(k)}$ und V_ν — mit wachsendem ν beliebig klein wird. Unter Anwendung der logarithmischen Reihe findet man:

$$|lP_{\nu,p}| < \varrho_\nu^{(1)} + \frac{1}{2}\varrho_\nu^{(2)} + \frac{1}{3}\varrho_\nu^{(3)} + \ldots + \frac{1}{n-1}\varrho_\nu^{(n-1)} + \frac{1}{n}\cdot\frac{V_\nu}{1-u}.$$

Bezeichnet man die rechte Seite dieser Ungleichung mit γ, so folgt nach (IV):

$$\text{(V)} \qquad |P_{\nu,p} - 1| < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

1) Vgl. A. Pringsheim, Math. Ann. XXII (1883), S. 481.

Für $n = 1$ tritt der einfachste Fall ein, daß das Produkt $\prod$ unbedingt konvergiert. Die entstehende Formel deckt sich genau mit der entsprechenden (II^a) für reelle Produkte. Für $n = 2$ ist die Abschätzungsregel (V) im Falle reeller v noch etwas schärfer als (III), da $\frac{1}{1-u} < \frac{1}{(1-u)^2}$ ist.

§ 3. Über die Berechnung des Abschätzungsausdrucks und dessen Näherungswerte.

Die in der Abschätzungsregel $|P_{\nu,p} - 1| < e^\gamma - 1$ in γ auftretenden Größen u, R_ν, V_ν, $\varrho_\nu^{(k)}$ lassen sich in sehr einfacher Weise bestimmen. Da nämlich bei Konvergenz des Produkts $\prod(1 + v_n)$ die absoluten Beträge der Größen v_n von einer bestimmten endlichen Stelle ab eine Reihe nach Null abnehmender positiver echter Brüche bilden[1]), so wird man stets, wenn das Produkt hinter dem Faktor $(1 + v_{\nu-1})$ abgebrochen wird, wo ν der Index mindestens dieser endlichen Stelle ist, für $n \geqq \nu$ $u_n \leqq u_\nu$ setzen können, d. h. $u = u_\nu$. Zur Bestimmung der Grenzen R_ν, V_ν, $\varrho_\nu^{(k)}$ für die Reste der Reihen $\sum u_n$, $\sum v_n^2$, $\sum v_n^k$ wird sich aus eben diesem Grunde (indem nämlich jedes Glied dieser Reihenreste einen gewissen Bruchteil des vorhergehenden Gliedes nicht überschreitet,) als allgemeines Prinzip das Herunterdrücken dieser Reihen unter *geometrische* Reihen anwenden lassen[2]), deren Summe bekannt ist.

Da γ meistens sehr klein ist, so wird man $e^\gamma - 1$ für gewöhnlich nicht direkt berechnen oder aus Tafeln für die Exponentialfunktion entnehmen können, sondern wird dafür Näherungswerte einführen müssen. Solche Näherungswerte liefert

1) die *Exponentialreihe*. Durch Abbrechen derselben hinter dem 1. Gliede wurde schon im vorigen Paragraphen nach W. Fr. Meyer der Näherungswert $\frac{\gamma}{1-\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\gamma}{2-\gamma}$ erhalten. Beim Abbrechen der Reihe nach dem 2. Gliede bekommt man $\frac{6\gamma + \gamma^2}{6 - 2\gamma}$ usw.

2) Die ungeraden Näherungsbrüche von *Kettenbrüchen* mit positiven Teilzählern und Teilnennern[3]) ergeben zunächst die beiden soeben hin-

1) A. Pringsheim, Über die Konvergenz unendlicher Produkte. Math. Ann. XXXIII (1889), S. 128.

2) Vgl. z. B. C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. Sammlung Schubert XXXII. Leipzig 1904. S. 13.

3) Hier kommt vor allem ein Kettenbruch von Euler (Commentarii Academiae Petropolitanae IX (1737), Petropoli 1744, S. 132) in Betracht.

geschriebenen Näherungswerte und genauere, die besser sind als solche mit gleich hohen Potenzen von γ aus der Exponentialreihe.

3) Exponentialreihe und Kettenbrüche lassen sich in konvergente unendliche *Produkte* für e^γ und $e^\gamma - 1$ verwandeln[1]), die aber keine besseren Näherungswerte liefern.

In praktischen Fällen gibt meistens schon der erste Näherungswert $\frac{2\gamma}{2-\gamma}$ eine hinreichende Genauigkeit.

§ 4. Erweiterung der Abschätzungsregel für eine Kombination von unendlichen Produkten.

Die zu berechnende Funktion sei nicht durch ein einzelnes unendliches Produkt dargestellt, sondern allgemeiner durch *Multiplikation* und *Division* aus einer endlichen Anzahl von unbedingt oder bedingt konvergenten Produkten gebildet:

$$(1)\qquad \Phi = \frac{\prod\limits_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(a)}\right)\cdot\prod\limits_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(b)}\right)\cdots}{\prod\limits_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(a')}\right)\cdot\prod\limits_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(b')}\right)\cdots},$$

wo die $v_h^{(k)}$ $(k = a, b, \ldots, a', b', \ldots)$ reelle oder komplexe Größen sind, deren absolute Beträge $u_h^{(k)} < 1$ vorausgesetzt werden mögen. Es soll der *„absolute“* und der *„relative Fehler“* abgeschätzt werden, den man begeht, wenn man die einzelnen Produkte $\prod\limits_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(k)}\right)$ nach beliebig gewählten endlichen Faktorenanzahlen $l, m, \ldots q, r, \ldots$ abbricht, also

$$(2)\qquad |\Phi - A| = |A|\cdot|R-1|$$

und

$$(3)\qquad \frac{|\Phi - A|}{|\Phi|} = \frac{|R-1|}{|R|},$$

wo

$$(4)\qquad A = \frac{\prod\limits_{h=0}^{l-1}\left(1+v_h^{(a)}\right)\cdot\prod\limits_{h=0}^{m-1}\left(1+v_h\right)\cdots}{\prod\limits_{h=0}^{q-1}\left(1+v_h^{(a')}\right)\cdot\prod\limits_{h=0}^{r-1}\left(1+v_h^{(b')}\right)\cdots}$$

und

$$(5)\qquad R = \frac{\prod\limits_{h=l}^{\infty}\left(1+v_h^{(a)}\right)\cdot\prod\limits_{h=m}^{\infty}\left(1+v_h^{(b)}\right)\cdots}{\prod\limits_{h=q}^{\infty}\left(1+v_h^{(a')}\right)\cdot\prod\limits_{h=r}^{\infty}\left(1+v_h^{(b')}\right)\cdots}$$

---

1) Nach den Transformationsformeln von Stern: Journ. f. Math. 12 (1834), S. 353; 10 (1833), S. 269 ff oder Lehrb. d. algebr. Anal., Leipzig 1860, S. 319. Vgl. auch Pringsheim, Enz. d. math. Wiss. I A 3, S. 115, Fußnote 116; S. 139 oder da in der dort gegebenen Formel der erste Faktor des betreff. Produkts fehlt, die französ. Ausgabe: Pringsheim-Molk, Enc. d. sc. math. I$_1$ 4, Nr. 37.

Nach den vorher angegebenen Methoden wird man zu den Restprodukten $P_{\nu,p}^{(k)} = \prod_{h=\nu}^{\nu+p-1}\left(1+v_h^{(k)}\right) \binom{k=a,b,\ldots a',b',\ldots}{\nu=l,m,\ldots q,r,\ldots}$ gewisse, mit wachsendem ν gegen Null konvergierende Grenzen $\gamma^{(k)}$ finden, so daß für jedes p $\left|l P_{\nu,p}^{(k)}\right| < \gamma^{(k)}$ ist. Aus

$$(6)\qquad \begin{aligned} |lR| &= \left| lP_{l,p}^{(a)} + lP_{m,p}^{(b)} + \cdots - \left\{ lP_{q,p}^{(a')} + lP_{r,p}^{(b')} + \cdots \right\} \right| \\ &< \left|lP_{l,p}^{(a)}\right| + \left|lP_{m,p}^{(b)}\right| + \cdots + \left|lP_{q,p}^{(a')}\right| + \left|lP_{r,p}^{(b')}\right| + \cdots \end{aligned}$$

folgt dann:

$$(7)\qquad |lR| < \gamma^{(a)} + \gamma^{(b)} + \cdots + \gamma^{(a')} + \gamma^{(b')} + \cdots.$$

Bezeichne ich die rechte Seite dieser Ungleichung (7) mit γ, so ergibt sich, wenn $0 < \gamma < 2$ vorausgesetzt wird, unter Anwendung des Hilfssatzes (IV) von § 2 die Abschätzungsformel

$$(\mathrm{VI})\qquad |R-1| < e^{\gamma} - 1 < \varepsilon \qquad (0 < \varepsilon < 1),$$

wo die Berechnung von ε nach den Angaben in § 3 zu geschehen hat. Durch Multiplikation des erhaltenen Wertes mit dem absoluten Betrage von A ergibt sich nach (2) für den *absoluten Fehler* die Abschätzung:

$$|\Phi - A| < |A| \cdot \varepsilon.$$

Ferner folgt aus (VI), genau so wie in § 1:

$$(\mathrm{VI'})\qquad 1-\varepsilon < |R| < 1+\varepsilon.$$

Daher hat man nach (3) für den *relativen Fehler*:

$$\frac{|R-1|}{|R|} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

B. Abschätzung des wahren Fehlers.

§ 5.

Es werde sogleich der allgemeinste Fall betrachtet, daß wie in § 4 eine Kombination mehrerer unendlicher konvergenter Produkte gegeben sei:

$$(1)\qquad \Phi = \frac{\prod_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(a)}\right) \cdot \prod_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(b)}\right) \cdots}{\prod_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(a')}\right) \cdot \prod_{h=0}^{\infty}\left(1+v_h^{(b')}\right) \cdots},$$

wo die $v_h^{(k)}$ $(k = a, b, \ldots a', b', \ldots)$ im allgemeinen komplexe Größen von der Form $v_h^{(k)} = \alpha_h^{(k)} + i\beta_h^{(k)}$ sind, deren absolute Beträge $u_h^{(k)} < 1$ vorausgesetzt werden. Die $\beta_h^{(k)}$ dürfen auch alle oder teilweise Null sein, so daß dann die betreffenden Teilprodukte $\prod\left(1+v_h^{(k)}\right)$ reell sind.

Es soll der *„wahre Fehler“* beim Abbrechen der einzelnen Teilprodukte nach einer endlichen Faktorenanzahl abgeschätzt werden, d. h. die Differenz:

$$\Phi - A = A \cdot R - A = A\,(R-1), \tag{2}$$

wo A der aus der endlichen Anzahl von Faktoren gebildete Näherungswert von Φ und R der noch übrig bleibende Teil ist [vgl. § 4, (44) und (5)].

Da bekanntlich $1 + v_h^{(k)} = \left|1 + \alpha_h^{(k)} + i\beta_h^{(k)}\right| e^{i \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}}$ ist, so kann man R auch schreiben:

$$R = |R|\, e^{i\Sigma}, \tag{3}$$

wo

$$\Sigma = \sum_{h=l}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(a)}}{1+\alpha_h^{(a)}} + \sum_{h=m}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(b)}}{1+\alpha_h^{(b)}} + \cdots$$
$$- \sum_{h=q}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(a')}}{1+\alpha_h^{(a')}} - \sum_{h=r}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(b')}}{1+\alpha_h^{(b')}} - \cdots.$$

Für den ersten Faktor $|R|$ auf der rechten Seite in (3) läßt sich eine obere und untere Grenze nach Formel (VI′) von S. 362 angeben.

Für den *Spezialfall nur reeller Produkte* $\prod\left(1 + v_h^{(k)}\right)$, in dem $e^{i\Sigma} = 1$ und $R = |R|$ ist, ist somit nach (2) der *wahre Fehler bekannt.* Sind jedoch die $v_h^{(k)}$ *nicht alle reell,* so kommt es jetzt noch darauf an, für den zweiten Faktor $e^{i\Sigma}$ in (3) eine obere und untere Grenze anzugeben. Aus der Voraussetzung $\left|\alpha_h^{(k)} + i\beta_h^{(k)}\right| < 1$ folgt nun $\left|\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}\right| < 1$.

Es gilt daher die bekannte alternierende Reihe für $\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}$.

Nach dem Leibnizschen Satz kann man dann setzen, wenn $\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} > 0$ ist:

$$\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} - \frac{1}{3}\left(\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}\right)^3 < \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} < \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}$$

und erst recht:

$$\frac{2}{3}\,\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} < \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} < \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}. \tag{4}$$

Ist dagegen $\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} < 0$, so ergibt sich:

$$(5) \qquad \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} < \operatorname{arctg} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} < \tfrac{2}{3} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}.$$

Der Übergang von diesen Doppelungleichungen (4) und (5) für $\operatorname{arctg}\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}$ zu entsprechenden für $\sum\limits_{h=\nu}^{\nu+p-1} \operatorname{arctg}\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}$ läßt sich nicht ohne weiteres bewerkstelligen; denn ich weiß nicht, welche Glieder in dieser Reihe > 0, und welche < 0 sind, da für die Produkte $\prod\left(1+\alpha_h^{(k)}+i\beta_h^{(k)}\right)$ der allgemeinste Fall von Konvergenz[1]) angenommen war. Ich will mich im folgenden auf den einfachsten Fall beschränken, daß die $\alpha_h^{(k)}$ unter sich und die $\beta_h^{(k)}$ unter sich — aber nicht notwendig die $\alpha_h^{(k)}$ mit den $\beta_h^{(k)}$ — gleiches Vorzeichen besitzen. Dann sind alle komplexen[2]) Teilprodukte $\prod\left(1+\alpha_h^{(k)}+i\beta_h^{(k)}\right)$ absolut und unbedingt konvergent.[3]) Aus den Doppelungleichungen (4) und (5) folgt für $k = a, b, \ldots a', b', \ldots$ und die zugehörigen Zahlen $\nu = l, m, \ldots q, r, \ldots$:

$$(6) \qquad \tfrac{2}{3}\sum_{h=\nu}^{\nu+p-1} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} \lesseqgtr \sum_{h=\nu}^{\nu+p-1} \operatorname{arctg}\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} \lesseqgtr \sum_{h=\nu}^{\nu+p-1} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}},$$

wo das obere Ungleichheitszeichen für positives $\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}$, d. h. positives $\beta_h^{(k)}$, das untere für negatives $\beta_h^{(k)}$ zu nehmen ist.

Da die Produkte $\prod\limits_{h=0}^{\infty}\left(1+\alpha_h^{(k)}+i\beta_h^{(k)}\right) = \prod\limits_{h=0}^{\infty}\left(1+\alpha_h^{(k)}\right)\left(1+\frac{i\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}\right)$ konvergieren, so müssen auch die Reihen $\sum\limits_{h=0}^{\infty}\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}$ konvergieren. Es werden sich daher für die Reihenreste $\sum\limits_{h=\nu}^{\nu+p-1}\frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}}$ gewisse, von p un-

---

1) Pringsheim, Math. Ann. 22, S. 481.

2) Die etwaigen reellen Teilprodukte von Φ dürfen natürlich auch bedingt konvergieren, d. h. die betreffenden reellen $v_h = \alpha_h$ sind der Beschränkung, unter sich gleiches Vorzeichen zu haben, nicht unterworfen.

3) Pringsheim, Math. Ann. 33, S. 139.

abhängige, reelle obere und untere Grenzen $G_\nu^{(k)}$, $g_\nu^{(k)}$ angeben lassen, die mit wachsendem ν beliebig klein werden und beliebig nahe aneinander rücken. Aus (6) folgt dann:

$$\tag{7} \tfrac{2}{3}\, g_\nu^{(k)} \lesseqgtr \sum_{h=\nu}^{\nu+p-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_h^{(k)}}{1+\alpha_h^{(k)}} \lesseqgtr G_\nu^{(k)} \qquad \left(\beta_h^{(k)} \gtrless 0\right).$$

Durch Addition und Subtraktion der passenden Doppelungleichungen nach den für Doppelungleichungen geltenden Regeln ergibt sich hieraus für den Exponenten Σ in (3):

$$\tag{8} g < \Sigma < G.$$

Ich setze jetzt im Anschluß an Stolz[1]) folgende Größenordnung für komplexe Größen fest: Eine komplexe Größe $a+ib$ soll größer (kleiner) als $a'+ib'$ heißen, wenn a größer (kleiner) als a' und, falls $a=a'$, wenn b größer (kleiner) als b' ist. Unter Anwendung des Leibnizschen Satzes für alternierende Reihen auf den reellen und imaginären Teil der Reihe für $e^{i\Sigma}$ kann ich dann schreiben:

$$\tag{9} 1 - \frac{\Sigma^2}{2!} + i\left(\frac{\Sigma}{1!} - \frac{\Sigma^3}{3!}\right) < e^{i\Sigma} < 1 + i\frac{\Sigma}{1!}.$$

Setze ich hier für Σ in passender Weise einmal G, das andere Mal g, so ist auch der zweite Faktor $e^{i\Sigma}$ der rechten Seite von (3) zwischen zwei bekannte Grenzen eingeschlossen. Mit Hilfe der durch Multiplikation der erhaltenen Doppelungleichung mit (VI') sich ergebenden Doppelungleichung für R kann man dann nach (2) den *wahren Fehler* in bekannte Grenzen einschließen.

Abschnitt III: Anwendungen.

Die im vorigen Abschnitt entwickelten Fehlerabschätzungsregeln für unendliche Produkte mögen hier nur bei den beiden schon in der Einleitung erwähnten Beispielen angewandt werden.

§ 1. Das vollständige elliptische Integral erster Gattung. Genauigkeit der Legendreschen Tafeln.

Zur Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals erster Gattung K aus einem gegebenen Modul k ist, namentlich im Falle eines reellen, zwischen 0 und 1 gelegenen k, auf den ich mich hier beschränke, die folgende Produktentwicklung sehr geeignet:

$$\tag{1} K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+k_n).$$

1) Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. II. Bd., Leipzig 1886, S. 2.

Diese Formel hat auch Legendre als Grundlage gedient für die Berechnung der Tafeln der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter[1]) Gattung, die sich im 3. Bande seiner „Exercices de calcul intégral" (Paris 1816) und im 2. Bande seines „Traité des fonctions elliptiques" (Paris 1826) finden.

Man erhält das obige Produkt durch wiederholte Anwendung der Landenschen Transformation. Dabei bestehen zwischen den nach Null abnehmenden Moduln

$$k,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\cdots$$

und den nach 1 zunehmenden komplementären Moduln

$$k',\ k_1',\ k_2',\ k_3',\cdots$$

die folgenden Relationen:

$$(2)\qquad \begin{cases} k_n = \dfrac{1-k'_{n-1}}{1+k'_{n-1}}, & k_{n-1} = \dfrac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n} \\[2ex] k'_n = \dfrac{2\sqrt{k'_{n-1}}}{1+k'_{n-1}}, & k'_{n-1} = \dfrac{1-k_n}{1+k_n} \qquad k_n^2+k_n'^2=1. \\[2ex] 1+k_n = \dfrac{2}{1+k'_{n-1}} = \dfrac{2\sqrt{k_n}}{k_{n-1}} = \dfrac{k'_n}{\sqrt{k'_{n-1}}} \end{cases}$$

Das unendliche Produkt in (1) konvergiert unbedingt, da die Reihe Σk_n absolut konvergiert. Bricht man diese Reihe hinter dem νten Gliede k_ν ab, so läßt sich für ihren Rest leicht eine obere Grenze finden. Man hat nach (2):

$$k_{n+1} = \frac{1-k'_n}{1+k'_n} = \frac{1-k_n'^2}{(1+k'_n)^2} = \frac{k_n^2}{(1+k'_n)^2}.$$

Es ist also k_{n+1} nicht nur kleiner als k_n, sondern auch kleiner als k_n^2. Mithin wird der Rest der Reihe Σk_n:

$$\begin{aligned} R_{\nu,\,p} &= k_{\nu+1} + k_{\nu+2} + k_{\nu+3} + k_{\nu+4} + \cdots \\ &< k_\nu^2 + k_{\nu+1}^2 + k_{\nu+2}^2 + k_{\nu+3}^2 + \cdots \\ &< k_\nu^2 + (k_\nu^2)^2 + (k_{\nu+1}^2)^2 + (k_{\nu+2}^2)^2 + \cdots \\ &< k_\nu^2 + k_\nu^4 + (k_\nu \cdot k_\nu^2)^2 + (k_{\nu+1} \cdot k_{\nu+1}^2)^2 + \cdots \\ &< k_\nu^2 + k_\nu^4 + k_\nu^6 + (k_\nu \cdot k_\nu k_\nu^2)^2 + \cdots \\ &< k_\nu^2 + k_\nu^4 + k_\nu^6 + k_\nu^8 + \cdots \end{aligned}$$

Also $$R_{\nu,\,p} < \frac{k_\nu^2}{1-k_\nu^2}.$$

1) Das vollständige elliptische Integral 2. Gattung E drückt sich in einfacher Weise durch K aus. (Vgl. Legendre, Traité I, Paris 1825, S. 107). Ich betrachte daher hier nur das Integral 1. Gattung.

Beim Abbrechen des Produkts (1) hinter dem νten Faktor $(1+k_\nu)$ gilt daher nach Formel (IIb) für das Restprodukt die Abschätzung

$$P_{\nu,p}-1<e^{\frac{k_\nu^2}{1-k_\nu^2}}-1,$$

oder, wenn man für $e^\gamma-1$ den Näherungswert $\frac{2\gamma}{2-\gamma}$ einführt, was hier vollständig genügt:

(3) $$P_{\nu,p}-1<\frac{2k_\nu^2}{2-3k_\nu^2}.$$

Die Formel (1) läßt sich noch umformen, so daß sie zur Berechnung von K mittels Logarithmen unmittelbar anwendbar ist. Mit Hilfe der letzten der Relationen (2) erhält man nämlich[1]):

(4a) $$K=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{k'}\cdot k_1'\cdot k_2'\cdot k_3'\cdots}$$

oder, wenn man noch $k=\sin\theta$, $k_1=\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta=\sin\theta_1$, $k_2=\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta_1=\sin\theta_2,\cdots$ setzt,

(4b) $$K=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\cos\theta_3\cdots}$$

Ferner wird

$$1+k_1=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta},\ 1+k_2=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta_1},\ 1+k_3=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta_2},\cdots$$

Somit ergibt sich aus (1):

(5) $$K=\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2\frac{1}{2}\theta\cdot\cos^2\frac{1}{2}\theta_1\cdot\cos^2\frac{1}{2}\theta_2\cdots}.$$ [2])

Legendre hat in seinen oben angeführten Tafeln die Werte der vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2.[3]) Gattung[4]) und ihrer Logarithmen[5]) mit 12 Dezimalstellen, einen Teil der letzteren, nämlich für den Modulwinkel θ von 0° bis 15° und von 75° bis 90°, sogar auf 14 Stellen angegeben. Um K mit dieser Genauigkeit zu berechnen, müssen nach Legendres Angabe[6]) von $k=\sin 67°33'$ bis $k=\sin 26°34'$ vier Faktoren des Produkts verwandt werden, von $k=\sin 26°34'$ bis $k=\sin 3°11'$ drei Faktoren, von $k=\sin 3°11'$ bis $k=\sin 0°2'40''$ zwei Faktoren, von $k=\sin 0°2'40''$ ab nur ein Faktor. Bei Werten des

1) Legendre, Exercices I (Paris 1811), p. 89 = Traité I (Paris 1825), S. 90.

2) Vgl. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, 4. Aufl. Leipzig 1887, S. 203.

3) Vgl. S. 366, Anm. 4) Tafel VIII. 5) Tafel I.

6) Exercices III, S. 13 = Traité II, S. 4.

Modulwinkels θ, die größer als 67° 33′ sind, würden fünf Faktoren des Produkts berechnet werden müssen.[1])

Zur genaueren Prüfung dieser Angabe ist die folgende Tabelle entworfen, in der bei gegebener Faktorenanzahl ν unter Anwendung von (3) die obere Grenze für den wahren Fehler $\Pi_\nu(P_{\nu,p}-1)$ berechnet ist.

Modulwinkel θ	Faktorenanzahl ν	Der aus ν Faktoren berechnete Näherungswert von K ist zu klein um weniger als
75°	3	0,000 022 1
	4	0,000 000 000 011 035
67° 30′	3	0,000 001 430 12
	4	0,000 000 000 000 044 352
45°	3	0,000 000 000 360 77
	4	0,000 000 000 000 000 000 004 387 6
35°	3	0,000 000 000 004 113
	4	0,000 000 000 000 000 000 000 000 610 76
29°	3	0,000 000 000 000 165 49
	4	0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 020 3
27°	3	0,000 000 000 000 049 77
26°	3	0,000 000 000 000 033 336
20°	2	0,000 000 094 705
	3	0,000 000 000 000 000 346 02
15°	2	0,000 000 009 016 9
	3	0,000 000 000 000 000 003 179 7
10°	2	0,000 000 000 339 59
	3	0,000 000 000 000 000 000 004 553 6
4°	2	0,000 000 000 000 217 37
	3	0,000 000 000 000 000 000 000 000 002 363 9
3°	2	0,000 000 000 000 021 719
1°	1	0,000 000 009 111 4
	2	0,000 000 000 000 000 003 303
0° 6′	1	0,000 000 000 000 910 98
	2	0,000 000 000 000 000 000 000 000 033 02
0° 0′ 1″	1	0,000 000 000 000 000 000 005 425 3

1) In diesem Falle wendet man besser eine Formel an, die sich ergibt, wenn die Landensche Transformation in umgekehrter Richtung ausgefürt wird, so daß man eine Reihe von nach 1 zunehmenden Moduln erhält. Auf diese Formel, die Legendre übrigens zur Berechnung von K für alle $k > \sin 45°$ benutzt, gehe ich hier nicht ein, da sie nichts wesentlich Neues bietet.

Die Legendresche Tafel VIII gibt die Werte von K nur für die vollen Grade des Modulwinkels θ; in der Tafel I für $\log K$ schreitet θ von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ Grad fort. Soll das zu einem dazwischen liegenden Modul gehörige K bestimmt werden, so führt eine direkte Berechnung nach den vorher angegebenen Formeln häufig schneller zum Ziele, als eine mühsame Interpolation. Dabei kann man aus der obigen Tabelle ersehen, wieviel Faktoren des unendlichen Produkts zur Erlangung der betreffenden Genauigkeit erforderlich sind.

§ 2. Die Bahnkurve der Kreiselspitze.

Es wurde oben hervorgehoben, daß es naturgemäß erscheint, wenn *Produkte* oder *Quotienten* von Funktionen zu berechnen sind, für die sowohl Reihen- als auch Produktentwicklungen existieren, die letzteren anzuwenden.

Ein hervorragendes Beispiel für das Auftreten eines derartigen zusammengesetzten Ausdrucks findet sich in dem Werke von Klein und Sommerfeld: „Über die Theorie des Kreisels".[1])

Unter „Kreisel" wird ein der Schwere unterworfener starrer Körper verstanden, dessen Masse symmetrisch um eine Achse des Körpers verteilt ist, und bei dem mittels einer geeigneten Vorrichtung ein auf der Symmetrieachse gelegener Punkt im Raume festgehalten wird.[2]) Dieser feste Punkt oder „Unterstützungspunkt" O des Körpers teilt die Symmetrieachse in zwei Halbstrahlen, von denen der eine als „Figurenachse" bezeichnet werden möge. Ein im Abstande 1 von O auf der Figurenachse gelegener Punkt wird „Kreiselspitze" genannt. Bei der Bewegung des Kreisels beschreibt diese Kreiselspitze auf der um O gelegten Einheitskugel eine Kurve, die in dem von Klein und Sommerfeld behandelten Beispiele ausschließlich auf der nördlichen Halbkugel verläuft. Bedeutet λ die komplexe Variable, die im gewöhnlichen Gaußischen Sinne dem Bildpunkte der Kreiselspitze in der Äquatorebene der Einheitskugel bei stereographischer Projektion vom Südpole entspricht, so ergibt sich für das ebene Abbild der Bahnkurve der Kreiselspitze die Darstellung[3]):

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda = K e^{iLt} \dfrac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)}; \\[2ex] K = \dfrac{\vartheta(i\omega' - ia)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega - ib + ia)}, \quad L = l + l' - \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

1) 3 Hefte, Leipzig 1897, 98, 1903. Es kommt hier namentlich Heft II, Kap. VI, § 5 und § 6 in Betracht.

2) A. a. O. I, S. 1. 3) A. a. O. II, S. 433.

Hierin bedeutet $\vartheta(t)$ eine der Jacobischen doppeltperiodischen Thetafunktionen mit den Perioden 2ω, $2i\omega'$, nämlich die, für welche, wenn zur Abkürzung

(2) $$q = e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi}, \qquad s = \frac{t\pi}{2\omega}$$

gesetzt wird, die folgende absolut konvergente Reihen- bzw. Produktentwicklung besteht:

(3) $$\vartheta(t) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin s - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3s + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5s - \cdots$$

(4) $$\vartheta(t) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin s \cdot \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h})(1 - 2q^{2h}\cos 2s + q^{4h})$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}}\sin s \cdot \prod_{h=1}^{\infty}(1 - q^{2h})(1 - q^{2h}e^{2is})(1 - q^{2h}e^{-2is}).$$

Die Jacobische Bezeichnung für diese Funktion würde lauten:

$$\mathrm{H}(t) = \vartheta_1\left(\frac{t\pi}{2\omega}\right).$$ [1]

Der Kreisel, für dessen Spitze die Bahnkurve berechnet werden soll[2]), besteht aus einem Schwungrad, dessen Masse einen Wulst von quadratischem Querschnitt bildet. Die Seitenlänge des Querschnittquadrats beträgt 2 cm, der Abstand seines Mittelpunktes von der Figurenachse 5 cm. Der Unterstützungspunkt O hat vom Schwerpunkt des Rades einen Abstand von 2,5 cm. Bei Beginn der Bewegung ist der Winkel zwischen der Figurenachse und der Vertikalen 60°. Die übrigen Konstanten werden so gewählt, daß der Kreisel 2,4 Umdrehungen in der Sekunde macht. Ferner ist:

$$\omega = 0{,}259\,9585 \qquad \omega' = 0{,}324\,6104$$
$$a = 0{,}231\,7671 \qquad b = 0{,}229\,4180.$$

Klein und Sommerfeld verwenden zur Berechnung der Punkte der Bahnkurve der Kreiselspitze die *Reihe* (3) für die Thetafunktion, wobei sie alle in (1) auftretenden Thetareihen hinter dem zweiten Gliede abbrechen. Auf eine genaue Abschätzung des wahren Fehlers der so berechneten Werte λ verzichten Klein und Sommerfeld. Sie berechnen nur, daß der relative Fehler $< \frac{1}{1000}$ ist.[3])

1) cf. Jacobi, Werke I, S. 231, 501. — Die Angabe von Klein und Sommerfeld (a. a. O. II, S. 418), das $\vartheta(t)$ in der Jacobischen Bezeichnungsweise mit $\mathrm{H}\left(\frac{t\pi}{2\omega}\right)$ identisch wäre, beruht auf einem Irrtum.

2) Klein-Sommerfeld, a. a. O. II, S. 447 ff.

3) A. a. O. S. 444—447.

Ich werde die *Produkt*entwicklung (4) benutzen und die Produkte alle hinter dem ersten Faktor abbrechen. Der Fehler der so berechneten Werte der Bahnkurvenpunkte läßt sich dann unter Anwendung der vorher aufgestellten Regeln viel genauer als bei Verwendung der Reihen abschätzen.

Ich stelle zunächst die bei der Berechnung vorkommenden Größen in der folgenden Tabelle zusammen:

$q = 0{,}019\,783\,45$ | $q^4 = 0{,}000\,000\,153\,182$

$q^2 = 0{,}000\,391\,385$ | $q^8 = 0{,}000\,000\,000\,000\,023\,464\,75$

$e^{\frac{\pi a}{2\omega}} = 4{,}057\,026$ | $e^{-\frac{\pi a}{2\omega}} = 0{,}246\,486$

$e^{\frac{\pi a}{2\omega}} + e^{-\frac{\pi a}{2\omega}} = 4{,}303\,512$ | $e^{\frac{\pi a}{2\omega}} - e^{-\frac{\pi a}{2\omega}} = 3{,}810\,540$

$e^{\frac{\pi b}{2\omega}} = 3{,}999\,846$ | $e^{-\frac{\pi b}{2\omega}} = 0{,}250\,0096$

$e^{\frac{\pi b}{2\omega}} + e^{-\frac{\pi b}{2\omega}} = 4{,}249\,855\,6$ | $e^{\frac{\pi b}{2\omega}} - e^{-\frac{\pi b}{2\omega}} = 3{,}749\,836\,4$

$e^{\frac{\pi}{2\omega}(\omega'-a)} + e^{-\frac{\pi}{2\omega}(\omega'-a)} = 2{,}323\,067\,5$ | $e^{\frac{\pi}{2\omega}(\omega'-a)} - e^{-\frac{\pi}{2\omega}(\omega'-a)} = 1{,}181\,796\,5$

$e^{\frac{\pi}{2\omega}(\omega'-b)} + e^{-\frac{\pi}{2\omega}(\omega'-b)} = 2{,}340\,077$ | $e^{\frac{\pi}{2\omega}(\omega'-b)} - e^{\frac{\pi}{2\omega}(\omega'-b)} = 1{,}214\,891$

$e^{\frac{\pi a}{\omega}} + e^{-\frac{\pi a}{\omega}} = 16{,}520\,205\,37$ | $e^{\frac{\pi a}{\omega}} - e^{-\frac{\pi a}{\omega}} = 16{,}398\,694\,63$

$q^4 e^{\frac{\pi a}{\omega}} = 0{,}000\,002\,521\,293$ | $q^4 e^{-\frac{\pi a}{\omega}} = 0{,}000\,000\,009\,306\,636$

$e^{\frac{\pi b}{\omega}} + e^{-\frac{\pi b}{\omega}} = 16{,}061\,259\,86$ | $e^{\frac{\pi b}{\omega}} - e^{-\frac{\pi b}{\omega}} = 15{,}936\,250\,14$

$q^4 e^{\frac{\pi b}{\omega}} = 0{,}000\,002\,450\,723$ | $q^4 e^{-\frac{\pi b}{\omega}} = 0{,}000\,000\,009\,574\,63$

$e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} = 3{,}071\,018$ | $e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} = 0{,}325\,625\,1$

$q^2 e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} = 0{,}001\,201\,95$ | $q^2 e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} = 0{,}000\,127\,4447$

$q^4 e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} = 0{,}000\,000\,470\,425$ | $q^4 e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} = 0{,}000\,000\,049\,879\,92$

$e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} = 3\,159\,45$ | $e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} = 0{,}316\,5108$

$q^2 e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} = 0{,}001\,236\,561$ | $q^2 e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} = 0{,}000\,123\,877\,5$

$q^4\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} + e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right) = 0{,}000\,000\,532\,455$ | $q^4\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} - e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right) = 0{,}000\,000\,435\,472\,1.$

Für die in (1) auftretende Konstante K erhält man nun, wenn man, wie vorher angegeben, von jedem der auftretenden unendlichen Produkte nur den ersten Faktor in Rechnung zieht:

$$K = \frac{-i\sin\frac{i\pi}{2\omega}(\omega'-a)\cdot\left(1-q^2e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)\left(1-q^2e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)}{\cos\frac{i\pi}{2\omega}(\omega'-b)\cdot\left(1+q^2e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right)\left(1+q^2e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right)}\,e^{\frac{\pi}{2\omega}(a-b)}.$$

Drückt man noch den auftretenden Sinus und Kosinus durch die Exponentialfunktion aus, so ergibt sich unter Benutzung der obigen Wertetabelle:

$$K = 0{,}510\,868.$$

Ferner ist[1])

$$(5) \qquad l = i\frac{\vartheta'(i\omega'-ia)}{\vartheta(i\omega'-ia)}, \qquad l'-\frac{\pi}{\omega} = -i\frac{\vartheta'(\omega+i\omega'-ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)}.$$

Durch logarithmische Differentiation erhält man aus (4)

$$(6) \qquad \frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)} = \frac{\pi}{2\omega}\left\{\frac{\cos\frac{\pi t}{2\omega}}{\sin\frac{\pi t}{2\omega}} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{4q^{2h}\sin\frac{\pi t}{\omega}}{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi t}{\omega}+q^{4h}}\right\}.$$

Beschränkt man sich nur auf das erste Glied der Reihe, so wird demnach:

$$l = i\frac{\pi}{2\omega}\left(\frac{\cos\frac{i\pi}{2\omega}(\omega'-a)}{\sin\frac{i\pi}{2\omega}(\omega'-a)} + \frac{4q^2\sin\frac{i\pi}{\omega}(\omega'-a)}{1-2q^2\cos\frac{i\pi}{\omega}(\omega'-a)+q^4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\omega}\cdot 1{,}963\,557$$

und

$$l'-\frac{\pi}{\omega} = -i\frac{\pi}{2\omega}\left(\frac{-\sin\frac{i\pi}{2\omega}(\omega'-b)}{\cos\frac{i\pi}{2\omega}(\omega'-b)} - \frac{4q^2\sin\frac{i\pi}{\omega}(\omega'-b)}{1+2q^2\cos\frac{i\pi}{\omega}(\omega'-b)+q^4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2\omega}\cdot 0{,}521\,398.$$

Folglich

$$L = \frac{\pi}{2\omega}\cdot 1{,}442\,168.$$

Nach Bestimmung der Konstanten ergibt sich jetzt für λ, wenn ich die Produkte wieder alle nach dem ersten Faktor abbreche, der Näherungswert:

1) Klein-Sommerfeld, a. a. O. S. 451.

(7) $$\lambda = K \cdot e^{iLt} \frac{\cos\frac{\pi}{2\omega}(t+ib)\cdot\left(1+2q^2\cos\frac{\pi}{\omega}(t+ib)+q^4\right)}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(t+ia)\cdot\left(1-2q^2\cos\frac{\pi}{\omega}(t+ia)+q^4\right)}$$

$$= K \cdot e^{iLt} \frac{\left(e^{\frac{\pi b}{2\omega}}+e^{-\frac{\pi b}{2\omega}}\right)\cos s - i\left(e^{\frac{\pi b}{2\omega}}-e^{-\frac{\pi b}{2\omega}}\right)\sin s}{\left(e^{\frac{\pi a}{2\omega}}+e^{-\frac{\pi a}{2\omega}}\right)\sin s + i\left(e^{\frac{\pi a}{2\omega}}-e^{-\frac{\pi a}{2\omega}}\right)\cos s} \times$$

$$\times \frac{1+q^4+q^2\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}}+e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\cos 2s - iq^2\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}}-e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\sin 2s}{1+q^4-q^2\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}}+e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\cos 2s + iq^2\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}}-e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\sin 2s}.$$

Es sollen nun zehn Punkte der Bahnkurve $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_9$ berechnet werden, welche bzw. den äquidistanten Werten $t = 0, \frac{\omega}{9}, \frac{2\omega}{9}, \ldots \frac{9\omega}{9}$ zugehören. Die entsprechenden Werte für s sind $s = 0, \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{18} \ldots \frac{\pi}{2}$ oder $s = 0^0, 10^0, 20^0, \ldots 90^0$. Man berechnet zuerst den absoluten Betrag der Größen λ und findet alsdann auf trigonometrischem Wege den reellen und imaginären Teil. Unter Benutzung der Zahlenwerte von Seite 371 und der soeben berechneten Werte von K und L ergibt sich so folgende Tabelle[1]):

(8)
$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= - 0{,}577\,0784\,i\\
\lambda_1 &= 0{,}163\,4406 - 0{,}548\,5011\,i\\
\lambda_2 &= 0{,}303\,7429 - 0{,}469\,1848\,i\\
\lambda_3 &= 0{,}405\,2705 - 0{,}355\,4404\,i\\
\lambda_4 &= 0{,}463\,1982 - 0{,}226\,7404\,i\\
\lambda_5 &= 0{,}481\,8524 - 0{,}099\,4039\,i\\
\lambda_6 &= 0{,}470\,3593 + 0{,}016\,6193\,i\\
\lambda_7 &= 0{,}438\,3135 + 0{,}117\,7665\,i\\
\lambda_8 &= 0{,}392\,9060 + 0{,}204\,9933\,i\\
\lambda_9 &= 0{,}337\,6858 + 0{,}281\,3005\,i
\end{aligned}$$

1) Die in meiner Dissertation angegebenen Werte sind nicht ganz fehlerfrei, worauf mich Herr Prof. A. Sommerfeld hat aufmerksam machen lassen. Die Fehler sind z. T. durch einen Druckfehler in einer von mir benutzten älteren Auflage der Vegaschen Logarithmentafel veranlaßt worden. In Wirklichkeit liegen daher die Abweichungen der mit Produkten berechneten Werte λ von den in der Dissertation auch noch nach dem Vorbilde von Klein und Sommerfeld mit Reihen berechneten Werten innerhalb der sogleich zu bestimmenden Fehlergrenzen.

Ich werde jetzt die Genauigkeit dieser Werte abschätzen. In dem Ausdruk für λ tritt außer dem Exponentialfaktor e^{iLt} folgende Kombination von unendlichen Produkten auf:

$$\prod_{h=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{2h}e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)\left(1-q^{2h}e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right).\left(1+q^{2h}e^{-\frac{\pi b}{\omega}+2it}\right)\left(1+q^{2h}e^{\frac{\pi b}{\omega}-2it}\right)}{\left(1+q^{2h}e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right)\left(1+q^{2h}e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right).\left(1-q^{2h}e^{-\frac{\pi a}{\omega}+2it}\right)\left(1-q^{2h}e^{\frac{\pi a}{\omega}-2it}\right)}.$$

Alle Produkte wurden hinter dem ersten Faktor abgebrochen. Betrachtet man zunächst das erste im Zähler auftretende Produkt $\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-q^{2h}e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)$, das ebenso wie die sieben andern unbedingt konvergiert, so ergibt sich für den Rest der Reihe $\sum_{h=1}^{\infty}q^{2h}e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}$ beim Abbrechen hinter dem ersten Gliede:

$$\sum_{h=2}^{\infty}q^{2h}e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}=\frac{q^4e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}}{1-q^2}.$$

Ferner sind für $h\geqq 2$ alle $q^{2h}e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\leqq q^4e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}$. Nach der Abschätzungsregel (IIᵃ) von Abschnitt II, § 2 wird daher

$$\left|l\prod_{h=2}^{\infty}\left(1-q^{2h}e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)\right|<\frac{q^4e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}}{\left(1-q^4e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)(1-q^2)}.$$

In ähnlicher Weise bestimmt man die zu den übrigen sieben Restprodukten gehörigen oberen Grenzen, und zwar für das zweite Produkt im Zähler ebenfalls nach Regel (IIᵃ), für die beiden ersten Produkte im Nenner nach Regel (IIᵇ), für die übrigen Produkte nach Regel (V). Alsdann hat man nach Formel (VI) von Abschnitt II, § 4 für das Gesamtrestprodukt der obigen Kombination von unendlichen Produkten die Abschätzung:

$$|R-1|<e^{\gamma}-1,$$

wo

$$\gamma=\frac{q^4}{1-q^2}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}}{1-q^4e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}}+\frac{e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}}{1-q^4e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}}+\frac{e^{-\frac{\pi b}{\omega}}}{1-q^4e^{-\frac{\pi b}{\omega}}}+\frac{e^{\frac{\pi b}{\omega}}}{1-q^4e^{\frac{\pi b}{\omega}}}\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}+e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}+\frac{e^{-\frac{\pi a}{\omega}}}{1-q^4e^{-\frac{\pi a}{\omega}}}+\frac{e^{\frac{\pi a}{\omega}}}{1-q^4e^{\frac{\pi a}{\omega}}}\right\}$$

$$=\frac{q^4}{1-q^2}\cdot 39{,}454\,145\,13$$

$$=0{,}000\,006\,046\,034.$$

Aus $|R-1| < \frac{2\gamma}{2-\gamma}$ ergibt sich daher

$$|R-1| < 0{,}000\,006\,046\ldots \tag{9}$$

folglich

$$0{,}999\,993\,954 < |R| < 1{,}000\,006\,046. \tag{10}$$

Der *relative Fehler* der 10 Werte λ in (8) beträgt demnach weniger als

$$0{,}000\,006\,047\,,$$

ist also erheblich kleiner als der von Klein und Sommerfeld bei Benutzung der Reihen berechnete relative Fehler.

Aus dem Werte für $|R-1|$ und den absoluten Beträgen der in Tabelle (8) angegebenen, mit Produkten berechneten Näherungswerte für die 10 Größen λ findet man durch Multiplikation den *absoluten Fehler* von

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &: < 0{,}000\,0035\\
\lambda_1 &: < 0{,}000\,0035\\
\lambda_2 &: < 0{,}000\,0034\\
\lambda_3 &: < 0{,}000\,0033\\
\lambda_4 &: < 0{,}000\,0031\\
\lambda_5 &: < 0{,}000\,0030\\
\lambda_6 &: < 0{,}000\,0029\\
\lambda_7 &: < 0{,}000\,0027\\
\lambda_8 &: < 0{,}000\,0027\\
\lambda_9 &: < 0{,}000\,0027
\end{aligned} \tag{11}$$

Ich will jetzt noch im Anschluß an Abschnitt II, § 5 die Grenzen für den *wahren Fehler* der Werte (8) bestimmen.

Um den genauen Wert von λ zu erhalten, müßte ich zu dem Näherungswert (7) von S. 373 noch den Faktor R hinzufügen:

$$R' = |R| \cdot e^{i\Sigma}, \quad \text{wo}$$

$$\Sigma = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{4is\cdot q^{2h}\sin\frac{i\pi}{\omega}(\omega'-a)}{1-2q^{2h}\cos\frac{i\pi}{\omega}(\omega'-a)+q^{4h}} - \sum_{h=2}^{\infty} \frac{-4is\cdot q^{2h}\sin\frac{i\pi}{\omega}(\omega'-b)}{1+2q^{2h}\cos\frac{i\pi}{\omega}(\omega'-b)+q^{4h}}$$

$$-\sum_{h=2}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2h}\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}}-e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\sin 2s}{1+q^{4h}+q^{2h}\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}}+e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\cos 2s} + \sum_{h=2}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2h}\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}}-e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\sin 2s}{1+q^{4h}-q^{2h}\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}}+e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\cos 2s}.$$

Für die ersten zwei Summen findet man eine obere und untere Grenze in folgender Weise. Es ist

$$\sigma_1 = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{4 i s \cdot q^{2h} \sin \frac{i\pi}{\omega}(\omega' - a)}{1 - 2 q^{2h} \cos \frac{i\pi}{\omega}(\omega' - a) + q^{4h}}$$

$$= -2s\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} - e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)$$

$$\cdot \left\{ \frac{q^4}{1 + q^8 - q^4\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} + e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)} + \frac{q^6}{1 + q^{12} - q^6\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} + e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)} + \cdots \right\}.$$

Die Reihe in der Klammer { } läßt sich leicht zwischen zwei geometrische Reihen einschließen. Man hat

$$\frac{q^4}{(1+q^8)(1-q^2)} < \{\,\} < \frac{q^4}{\left[1 - q^4\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} + e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)\right](1-q^2)}.$$

Folglich ist

$$-\frac{2s \cdot q^4\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} - e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)}{\left[1 - q^4\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} + e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)\right](1-q^2)} < \sigma_1 < -\frac{2s \cdot q^4\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)} - e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-a)}\right)}{(1+q^8)(1-q^2)}$$

Beim Ausrechnen bekommt man

$$-0{,}000\,000\,841\,42 s < \sigma_1 < -0{,}000\,000\,841\,4196 s.$$

Für die zweite Summe in $\sum$ findet man ähnlich wie soeben:

$$\sigma_2 = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{-4 i s \cdot q^{2h} \sin \frac{i\pi}{\omega}(\omega' - b)}{1 + 2 q^{2h} \cos \frac{i\pi}{\omega}(\omega' - b) + q^{4h}} < 2s\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} - e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right) \cdot \frac{q^4}{1-q^2}$$

und andrerseits

$$\sigma_2 > \frac{2s\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} - e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right)}{1 + q^4\left(e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)} + e^{-\frac{\pi}{\omega}(\omega'-b)}\right) + q^8} \cdot \frac{q^4}{1-q^2},$$

also

$$0{,}000\,000\,871\,2848 s < \sigma_2 < 0{,}000\,000\,871\,2852 s.$$

Folglich ist

$$-0{,}000\,001\,712\,7052 s < \sigma_1 - \sigma_2 < -0{,}000\,001\,712\,7044 s.$$

Für die beiden andern in $\sum$ auftretenden Summen habe ich im Anschluß an Abschnitt II, § 5 (Seite 363) zunächst:

$$\sum_{h=2}^{\infty} \frac{q^{2h}\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} - e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\sin 2s}{1 + q^{4h} + q^{2h}\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} + e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\cos 2s} < \sum_{h=2}^{\infty} \operatorname{arctg} - < \sum_{h=2}^{\infty} \frac{q^{2h}\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} - e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\sin 2s}{1 + q^{4h} + q^{2h}\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} + e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\cos 2s},$$

und eine entsprechende Doppelungleichung für die zweite Summe. Die links und rechts auftretenden Reihen lassen sich dann in derselben Art wie σ_1 und σ_2 zwischen zwei geometrische Reihen einschließen, wobei noch zu unterscheiden ist zwischen Werten von s, die kleiner als $\frac{\pi}{4}$, und solchen, die größer als $\frac{\pi}{4}$ sind, da für letztere $\cos 2s$ negativ ist. Schließlich erhält man:

$$g < \sum < G,$$

wo für $0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{4}$, d. h. für λ_0 **bis** λ_4:

$$g = -0{,}000\,001\,712\,7052 s - \frac{q^4\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} - e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\sin 2s}{1-q^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{q^4\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}} - e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\sin 2s}{(1+q^8)(1-q^2)},$$

$$G = -0{,}000\,001\,712\,7044 s - \frac{2}{3}\frac{q^4\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} - e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\sin 2s}{\left[1+q^8+q^4\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} + e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\cos 2s\right](1-q^2)}$$
$$+ \frac{q^4\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}} - e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\sin 2s}{\left[1-q^4\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}} + e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\cos 2s\right](1-q^2)};$$

für $\frac{\pi}{4} < s \leqq \frac{\pi}{2}$, d. h. für λ_5 **bis** λ_9:

$$g = -0{,}000\,001\,712\,7052 s - \frac{q^4\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} - e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\sin 2s}{\left[1+q^4\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} + e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\cos 2s\right](1-q^2)}$$
$$+ \frac{2}{3}\frac{q^4\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}} - e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\sin 2s}{\left[1+q^8-q^4\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}} + e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\cos 2s\right](1-q^2)}$$

$$G = -0{,}000\,001\,712\,7044 s - \frac{2}{3}\frac{q^4\left(e^{\frac{\pi b}{\omega}} - e^{-\frac{\pi b}{\omega}}\right)\sin 2s}{(1+q^8)(1-q^2)} + \frac{q^4\left(e^{\frac{\pi a}{\omega}} - e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right)\sin 2s}{1-q^2}.$$

Ich habe zunächst g und G für die 10 Werte von s, die den Größen λ_0 bis λ_9 entsprechen, zu berechnen. Diese Werte g, G setze ich sodann in passender Weise in die Doppelungleichung (9) von S. 365 ein. Innerhalb der hier gewählten Genauigkeitsgrenzen kann man dabei die zweiten und dritten Potenzen von $\sum$ vernachlässigen und einfach

$$1 + ig < e^{i\sum} < 1 + iG$$

setzen. Diese Doppelungleichung multipliziere ich mit der Doppelungleichung (10) für $|R|$ und erhalte eine Doppelungleichung für R

und daraus eine für $R - 1$. Wenn ich diese noch mit den in (8) angegebenen Näherungswerten für die 10 Größen λ multipliziere, so ergeben sich für die *wahren Fehler* („*w. F.*") dieser Größen λ die folgenden Doppelungleichungen:

$$-0{,}000\,0035\,i < \text{w. F. v. } \lambda_0 < 0{,}000\,0035\,i$$

$$-0{,}000\,0013 + 0{,}000\,0032\,i < \text{w. F. v. } \lambda_1 < 0{,}000\,0010 - 0{,}000\,0033\,i$$

$$-0{,}000\,0024 + 0{,}000\,0025\,i < \text{w. F. v. } \lambda_2 < 0{,}000\,0018 - 0{,}000\,0029\,i$$

$$-0{,}000\,0030 + 0{,}000\,0015\,i < \text{w. F. v. } \lambda_3 < 0{,}000\,0024 - 0{,}000\,0022\,i$$

$$-0{,}000\,0032 + 0{,}000\,0006\,i < \text{w. F. v. } \lambda_4 < 0{,}000\,0027 - 0{,}000\,0016\,i$$

$$-0{,}000\,0031 - 0{,}000\,0005\,i < \text{w. F. v. } \lambda_5 < 0{,}000\,0029 - 0{,}000\,0009\,i$$

$$-0{,}000\,0028 - 0{,}000\,0013\,i < \text{w. F. v. } \lambda_6 < 0{,}000\,0029 - 0{,}000\,0004\,i$$

$$-0{,}000\,0024 - 0{,}000\,0019\,i < \text{w. F. v. } \lambda_7 < 0{,}000\,0028 - 0{,}000\,0001\,i$$

$$-0{,}000\,0018 - 0{,}000\,0023\,i < \text{w. F. v. } \lambda_8 < 0{,}000\,0028 + 0{,}000\,0004\,i$$

$$-0{,}000\,0013 - 0{,}000\,0026\,i < \text{w. F. v. } \lambda_9 < 0{,}000\,0028 + 0{,}000\,0008\,i.$$

Es ergibt sich hieraus — wie auch schon aus dem relativen Fehler und der Tabelle (11) für den absoluten Fehler zu entnehmen war —, daß bei den in (8) angegebenen, unter Anwendung der *Produkt*entwicklung der Thetafunktion berechneten Näherungswerten für die 10 Größen λ *durchweg mindestens die fünf ersten Dezimalstellen genau richtig* sind. Würde man dagegen nach dem Vorbilde von Klein und Sommerfeld die Theta*reihe* benutzen, so könnte man, da der relative Fehler alsdann, wie oben (Seite 370) angegeben, kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist, nur ungefähr *drei* genaue Stellen erwarten. Bei Anwendung der *Produkt*entwicklung läßt sich nach den im II. Abschnitt aufgestellten Fehlerabschätzungsregeln die erlangte Genauigkeit *bedeutend schärfer* abschätzen. Dies spricht dafür, daß, wenn *Produkte oder Quotienten von Funktionen zu berechnen sind, die Anwendung der Produktentwicklungen geboten sein dürfte.*

Die dynamischen Vorgänge in zylindrischen Schraubenfedern mit besonderer Berücksichtigung der Massendruck-Kompensatoren.

Von P. Fröhlich in Dresden.

Mit 6 Figuren und 2 Tafeln.

Einleitung.

Im folgenden behandle ich die Aufgabe, die Bewegungen zylindrischer Schraubenfedern mit gleichmäßiger Massenverteilung unter verschiedenen Bedingungen mathematisch zu untersuchen. Ehe ich näher auf die Theorie der longitudinal schwingenden Feder eingehe, möchte ich mit einigen Worten auf die praktische Bedeutung dieses Problems hinweisen.

Als vor eineinhalb Jahrzehnten die Elektrotechnik ihre Siegeslaufbahn begann, machte sich das Bedürfnis geltend, Dampfmaschinen mit sehr hoher Umlaufzahl zu schaffen, um die Dynamomaschinen ohne Vermittlung der lästigen Riemen-Übertragung direkt antreiben zu können. Wegen der Massenwirkungen in dem Steuerungsgetriebe mußten die Ventilmaschinen aus dem Wettbewerb ausscheiden und den Schiebermaschinen das Feld räumen. In den schwingenden Teilen der Schubkurbelgetriebe treten Massendrucke auf, welche mit dem Quadrate der Umlaufzahl anwachsen und im Gestänge Stöße verursachen, wenn nicht durch vorzeitiges Schließen des Auspuffkanals, durch die Kompression des Abdampfes, ein elastisches Polster zur Aufnahme der Stöße gebildet wird. Für Typen von 400—1000 Touren machten sich so hohe Kompressionsdrucke erforderlich, daß man die längst verbannten Einschiebersteuerungen wieder aufnahm; wirtschaftliche Ausnützung des Dampfes ist bei diesen Steuerungen durch das Auftreten hoher Kompressionsdrucke bedingt, zum Mißvergnügen der älteren Konstrukteure, denen diese Begleiterscheinung für die normalen Tourenzahlen lästig war. Die Dampfzufuhr wird zweckmäßig von einem Achsenregulator abhängig gemacht, dessen Prinzip aus Abb. 1 hervorgeht.

In S erkennen wir den entlasteten Kolbenschieber im Augenblicke der Eröffnung; bei EE wird der Dampf dem Schieberkasten zugeführt, durch die Kanäle $k_1 k_2$ gelangt er auf die hintere bzw. vordere Zylinderseite, um nach verrichteter Arbeit durch das Auspuffrohr A entlassen zu werden. Die Dauer der Volldruckperiode wird durch die Stellung

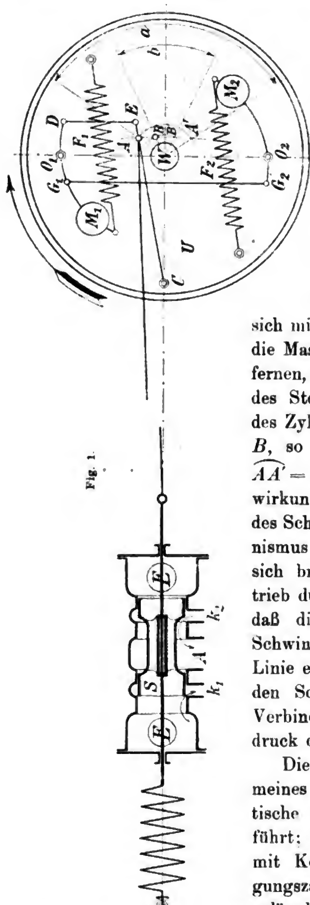


Fig. 1.

des Hebels CA bestimmt, welcher — in dem Punkte C der rotierenden Regulatorurne U gelagert — mit dem Tachometer durch die Stange DE zwangläufig verbunden ist. Der eigentliche tachometrische Teil wird durch das Hebelparallelogramm $O_1 G_1 G_2 O_2$ gebildet, dessen Gleichgewichtslage durch das Moment der Federn F_1 und F_2 sowie die von der Tourenzahl abhängigen Zentrifugalmomente der Schwungmassen $M_1 M_2$ bedingt wird. Indem sich mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit die Massen $M_1 M_2$ vom Wellenmittel W entfernen, verkleinern sie die Exzentrizität WA des Steuergetriebes und damit die Füllung des Zylinders: gelangt beispielsweise A nach B, so tritt an Stelle des Füllungsbogens $\widehat{AA'} = a$ der kleinere $\widehat{BB'} = b$. Die Rückwirkungen, welche die Massenbeschleunigung des Schiebergestänges auf den Reguliermechanismus bei derartig hohen Umlaufszahlen mit sich bringt, sind für einen elektrischen Betrieb durchaus ungeeignet. In der Erwägung, daß die Beschleunigung der harmonischen Schwingung im Weg-Diagramm als gerade Linie erscheint, hat man in sinnreicher Weise den Schieber mit einer Schraubenfeder in Verbindung gebracht, welche den Massendruck des Steuergestänges kompensieren soll.

Die Berechnung der Ausgleichsfedern ist meines Wissens bisher nur mit den für statische Federn geltenden Formeln durchgeführt; die Erfahrungen jedoch, welche man mit Kompensatoren bei so hohen Schwingungszahlen ernten mußte, ergaben die Unzulänglichkeit der Rechnung, indem der Ausgleich durch die inneren Schwingungen der Feder gestört wurde. Es werden zurzeit Maschinen gebaut, bei denen das Gewicht der Feder dem des Steuergestänges nahezu gleich ist, so daß die Eigenmasse des

Kompensators nicht vernachlässigt werden darf. Dieses Problem veranlaßte mich, angeregt durch Herrn Dipl.-Ingenieur Watzinger, Darmstadt, zur mathematischen Untersuchung der dynamischen Vorgänge in der zwangläufig bewegten Feder; jedoch auch in anderen Fällen wird die Berücksichtigung der inneren Massenbewegungen nutzbringend sein. Meine Untersuchungen über die Eigenschwingungen der Schraubenfedern werden — so hoffe ich — dem Theoretiker einiges Interessante bieten.

1. Ableitung der Differentialgleichung für schwingende Schraubenfedern.

Die kinetische Energie einer longitudinal schwingenden Schraubenfeder setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

1. Translationsenergie, bedingt
   a) durch die Bewegungen in der Achsrichtung der Feder,
   b) durch die Ausweichung der Materialteilchen normal zu derselben;
2. Rotationsenergie der normal zur Schraubenlinie stehenden Elementarscheibchen infolge von Schwingungen um die äquatoriale Scheibenachse in der Schmiegungsebene der Schraubenlinie.

Die Deviationen in der Radialrichtung verschwinden gegen die Axialbewegung und sollen vernachlässigt werden. Die Massenteilchen seien in der Schraubenlinie konzentriert gedacht; dann verschwindet auch die Rotationsenergie, so daß nur die Translationsbewegung in der Achsenrichtung zu berücksichtigen ist.

Um Irrtümern vorzubeugen, müssen zunächst einheitliche Bezeichnungen eingeführt werden. Im allgemeinsten Falle werden Anfangs- und Endpunkt einer longitudinal schwingenden Feder ihre Lage mit der Zeit ändern. Es werde zur Zeit $t = 0$ die Stellung der Endpunkte fixiert; wenn dann nicht ausdrücklich andere Vereinbarungen getroffen werden, so soll als „Ruhelage der Feder" (oder kurz „ruhende Feder") diejenige Stellung bezeichnet werden, welche bei festgehaltenen Endpunkten von der vollständig zur Ruhe gekommenen Feder behauptet wird. In der Ruhelage kann demnach nur eine durchweg konstante Axialkraft (S_0) in der Feder geborgen sein, wenn vom Eigengewichte der Feder abgesehen wird. Nach dieser Übereinkunft möchte ich die folgenden Bezeichnungen einführen:

l Länge der in „Ruhelage" befindlichen Feder in m
r Radius der Schraubenlinie in cm
d Drahtdurchmesser in cm
n Zahl der Windungen

δ	Luftspalt zwischen zwei Windungen gemessen in cm bei „ruhender Feder“
δ_0	zulässiger Mindestwert des Luftspaltes bei bewegter Feder
μ	Masse der Feder pro Längeneinheit (im „Ruhezustande“)
γ	spezifisches Gewicht des Federmaterials bezogen auf Wasser
G	Schubmodul des Federmaterials in kg/cm²
g	Beschleunigung der Schwere in $\frac{m}{\sec^2} = 9{,}81$.
$\varkappa_1$	Konstante $= 18 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{G}}$
$\varkappa_2$	Konstante $= 28 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\gamma \cdot G}$
c	Konstante $= 100 \cdot l \cdot d^4 \cdot G : 64 \cdot n \cdot r^2$
α	Konstante $= l \cdot d : \varkappa_1 \cdot n \cdot r^2$
x	die nach rechts positiv gerechnete Abszisse eines Massenpunktes, d. i. der bei „ruhender Feder“ in m zu messende axiale Abstand des Elementes von irgendeinem im Raume festliegenden Nullpunkte; ist ein oder sind beide Endpunkte der Feder festgehalten, so ist der Ursprung im linksgelegenen Fixpunkte der Feder zu denken
l_1, l_2	die Abszisse des Anfangs- bzw. Endpunktes der Feder (Ruhezustand)
y	die Ausweichung eines Elementes aus der Ruhelage in m
t	die Zeit in Sekunden
T	die Schwingungsdauer bei periodischer Bewegung
S	die axiale Schubkraft, welche auf den rechts vom Federelemente x gelegenen Federteil im positiven Sinne der x-Achse wirkt, das Element also nach links zu schieben bestrebt ist (zu messen in kg)
S_0	die Vorspannung der „ruhenden Feder“
Q	das Gewicht der schwingenden (festen) Masse in kg
h	Abkürzung für $\frac{L}{\alpha} = \frac{2 \cdot l}{\alpha}$
$\varphi(t)$	das allgemeine Gesetz des geführten Endpunktes
$\psi(t)$	die „Kräftefunktion“ des geführten Endpunktes, d. i. der Zwang, welcher neben S_0 in der $+x$-Richtung auf die Führung ausgeübt wird
$\overline{B}$	der in kg zu messende Maximalwert des Beschleunigungsdruckes bei harmonischer Bewegung
a	die Amplitude des harmonisch bewegten Endpunktes in m
ω	die Winkelgeschwindigkeit in $\sec^{-1}$
k_d	die zulässige Torsionsspannung in kg/cm²

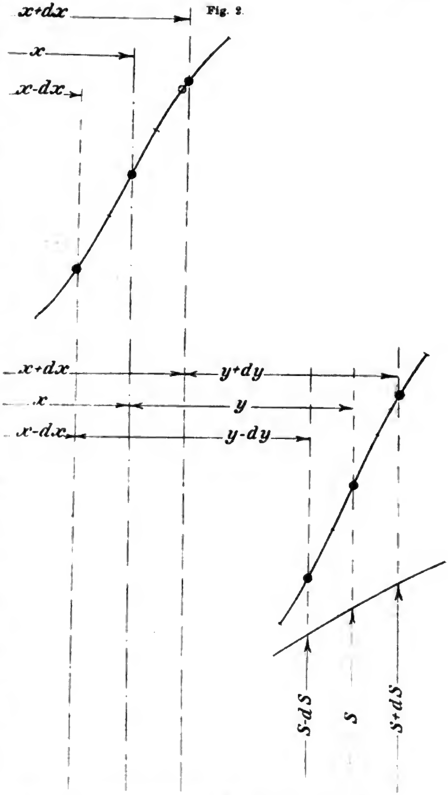
k_0 die spezifische Vorspannung in kg/cm²

$k = k_d - k_0$ die zusätzliche Spannung

$\chi = \omega \cdot \frac{l}{\alpha}$ die „dynamische Charakteristik".

Wenn zur Zeit t ein beliebiger durch x gekennzeichneter Massenpunkt der Feder um y aus seiner Ruhelage herausgetreten ist (Figur 2), so hat das der Stelle $(x - dx)$ zugehörige Element eine Verschiebung $(y - dy)$ erfahren; weiter entsprechen sich die Koordinaten $(x + dx)$ und $(y + dy)$.

Fig. 2.



Stellt c die Kraft dar, welche die ruhende, spannungslos gedachte Feder um ihre eigene Länge zu strecken vermag, so wird die Vorspannung S_0, welche in der ruhenden Feder schlummerte, im Elemente (x) erhöht werden auf

$$S = S_0 - c\,\frac{(x + dx + y + dy) - (x - dx + y - dy) - 2 \cdot dx}{2 \cdot dx} = S_0 - c \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Da wir zwei Unabhängige haben, so müssen wir die runden ∂ schreiben:

(1) $$S = S_0 - c \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Die resultierende, auf das Element dx nach links wirkende Kraft ist gleich

$$\tfrac{1}{2}[S + dS - (S - dS)] = dS = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot dx$$

und beschleunigt das mit der Masse $dm = \mu \cdot dx$ beschickte Element nach dem Gesetze

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial S}{\partial x} \cdot dx,$$

oder, nach Gl. (1):

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

und hieraus

(2) $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

worin

(3) $$\alpha = \sqrt{\frac{c}{\mu}}.$$

Zwischen der Federung f und der Axialkraft P einer zylindrischen Schraubenfeder mit Kreisquerschnitt besteht die Beziehung

$$f = \frac{64 \cdot n \cdot r^3}{d^4} \cdot \frac{P}{G}\text{[1]},$$

wenn alle Größen in kg und cm ausgedrückt sind; somit bekommen wir für c die Bestimmungsgleichung:

(4) $$100 \cdot l = \frac{64 \cdot n \cdot r^3}{d^4 \cdot G} c, \quad \text{also:} \quad c = \frac{100 \cdot l \cdot d^4 \cdot G}{64 \cdot n \cdot r^3}.$$

Auf die Längeneinheit der Feder entfällt eine Masse

(5) $$\mu = 0{,}1^3 \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{n \cdot r \cdot d^2}{l}.$$

Bei dieser Gelegenheit seien des späteren Gebrauchs wegen noch einige Beziehungen zwischen den Konstanten der Feder abgeleitet. Aus (4) und (5):

(6) $$\alpha = \sqrt{\frac{c}{\mu}} = \frac{l \cdot d}{\pi \cdot n \cdot r^2} \cdot \sqrt{\frac{10^5 \cdot G \cdot g}{32 \cdot \gamma}} = \frac{1}{\varkappa_1} \cdot \frac{l \cdot d}{n \cdot r^2},$$

wenn zur Abkürzung

(7) $$\varkappa_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{32 \cdot \gamma}{10^5 \cdot G \cdot g}} = 18 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{G}}$$

gesetzt wird. Aus (4) und (6) folgt:

(8) $$\frac{\alpha}{c} = \frac{64}{\pi} \sqrt{\frac{10 g}{32 \cdot \gamma \cdot G}} \cdot \frac{r}{d^3} = \frac{1}{\varkappa_2} \cdot \frac{r}{d^3}$$

mit Einführung von

(9) $$\varkappa_2 = \frac{\pi}{64} \cdot \sqrt{\frac{32}{10 \cdot g}} \cdot \sqrt{G \cdot \gamma} = 28 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{G \cdot \gamma}.$$

---

1) Streng genommen gilt diese Formel nur dann, wenn die axial gerichtete Kraft auch wirklich in die Achse fällt; nur bei schwingenden Federn mit sehr wenigen Windungen könnte diese Voraussetzung bedenklich werden.

Die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2) wurde zuerst von d'Alembert angegeben in der Form

(10) $$y = f_1(x + \alpha t) + f_2(x - \alpha t),$$

worin f_1 und f_2 willkürliche Funktionen bedeuten; diese sind auf Grund der besonderen Bedingungen zu bestimmen, welchen die Endpunkte der Feder unterliegen. Außerdem ist noch der anfängliche Bewegungszustand der Feder von Einfluß auf die Gestalt dieser Funktionen.

2. Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 für vorgeschriebene Bewegung und Kraftübertragung eines Federendpunktes. Praktische Brauchbarkeit der Lösung.

Es sei ganz allgemein für den geführten Endpunkt der Feder ($x = l_2$) ein Bewegungsgesetz vorgeschrieben:

$$y = \varphi(t),$$

und eine Kraftäußerung gewünscht:

(11) $$S = S_0 + \psi(t).$$

Untersuchen wir, unter welchen Bedingungen eine Feder diesen Wünschen gerecht werden kann! Am Endpunkte $x = l_2$ zunächst sollte sich Gleichung (10) zu der folgenden spezialisieren:

(12) $$y = f_1[l_2 + \alpha t] + f_2[l_2 - \alpha t] = \varphi(t);$$

aus (10) folgt weiter ganz allgemein:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f_1(x + \alpha t)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x - \alpha t)}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial f_1(x + \alpha t)}{\partial t} - \frac{\partial f_2(x - \alpha t)}{\partial t}\right],$$

und für $x = l_2$ sollte werden [siehe Formel (1)]:

(13) $$\psi(t) = S - S_0 = -c \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{c}{\alpha}\left[\frac{\partial f_1(l_2 + \alpha t)}{\partial t} - \frac{\partial f_2(l_2 - \alpha t)}{\partial t}\right].$$

Da nun in den Gleichungen (12) und (13) nur noch t als einzige Variable vorkommt, so können wir die geraden d setzen und erhalten:

(14a) $$f_1(l_2 + \alpha t) - f_2(l_2 - \alpha t) = \varphi(t)$$

(14b) $$\frac{d f_1(l_2 + \alpha t)}{dt} - \frac{d f_2(l_2 - \alpha t)}{dt} = -\frac{\alpha}{c} \cdot \psi(t).$$

Aus (14a) folgt durch Differentiation:

$$\frac{d f_2(l_2 - \alpha t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} - \frac{d f_1(l_2 + \alpha t)}{dt},$$

und mit Einsetzen dieses Wertes geht (14b) über in:

$$2 \cdot \frac{d f_1(l_2 + \alpha t)}{dt} - \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{c} \cdot \psi(t),$$

oder

$$(15)\qquad f_1(l_2 + \alpha t) = \tfrac{1}{2}\varphi(t) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha}{c}\int \psi(t)\cdot dt + C_0.$$

Aus (12) ergibt sich:

$$f_2(l_2 - \alpha t) = \varphi(t) - f_1(l_2 + \alpha t),$$

also nach (15):

$$(16)\qquad f_2(l_2 - \alpha t) = \tfrac{1}{2}\varphi(t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha}{c}\int \psi(t)\cdot dt - C_0.$$

Da sich nun y aus (15) und (16) durch Addition zusammensetzt, so fällt die Konstante C_0 heraus, und wir können für C_0 den Wert des Integrals für die untere Integrationsgrenze 0 einsetzen, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun; wir bekommen dann das Gleichungen-System:

$$(17)\qquad \begin{cases} f_1(l_2 + \alpha t) = \tfrac{1}{2}\varphi(t) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha}{c}\cdot\int_0^t \psi(t)\cdot dt \\ f_2(l_2 - \alpha t) = \tfrac{1}{2}\varphi(t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha}{c}\cdot\int_0^t \psi(t)\cdot dt, \end{cases}$$

oder, mit Einführung des Argumentes t auf der linken Seite:

$$(18)\qquad \begin{cases} f_1(t) = \tfrac{1}{2}\varphi\left[\frac{t - l_2}{\alpha}\right] - \tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha}{c}\cdot\int_0^{\frac{1}{\alpha}(t - l_2)} \psi(t)\cdot dt \\ f_2(-t) = \tfrac{1}{2}\varphi\left[\frac{t + l_2}{\alpha}\right] + \tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha}{c}\cdot\int_0^{\frac{1}{\alpha}(t + l_2)} \psi(t)\cdot dt. \end{cases}$$

Sind also die Funktionen φ und ψ vorgelegt, so liefert das System (18) immer eine Lösung; die praktische Brauchbarkeit derselben bedingt aber die Existenz eines festen Punktes in der Feder. Vorläufig ist l_2 noch veränderlich, denn wir sind an keinen Nullpunkt gebunden. Soll nun der Anfangspunkt der Feder festliegen, so wird $l_1 = 0$, wenn wir den Ursprung des Systems in den Fixpunkt verlegen; l_2 vertritt dann die Federlänge l, welche als variabler Parameter aufzufassen ist. Die Funktion

$$y = f_1(x + \alpha t) + f_2(x - \alpha t)$$

wird im Koordinatenanfang jederzeit verschwinden, sobald

$$f_1(\alpha t) + f_2(-\alpha t) = 0$$

ist; aus (17) würde dann:

$$f_1(\alpha t) = \tfrac{1}{2}\varphi\left(t - \frac{l}{\alpha}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha}{c}\cdot\int\limits_0^{t-\frac{l}{\alpha}}\psi(t)\cdot dt$$

$$f_2(-\alpha t) = \tfrac{1}{2}\varphi\left(t + \frac{l}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{c}\cdot\int\limits_0^{t+\frac{l}{\alpha}}\psi(t)\cdot dt$$

(19) $$\varphi\left(t - \frac{l}{\alpha}\right) + \varphi\left(t + \frac{l}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{c}\int\limits_{t-\frac{l}{\alpha}}^{t+\frac{l}{\alpha}}\psi(t)\cdot dt = 0.$$

Diese Gleichung spricht die Bedingung für die Existenz eines Knotenpunktes aus, während die einfache Vorschrift $f_1(t) = -f_2(-t)$ für den vorliegenden Fall nicht zweckdienlich ist; wir benötigen eine Bedingungsgleichung zwischen den Funktionen φ und ψ.

3. Partikuläre Lösung der Funktionalgleichung (10) für die harmonische Bewegung des Federendpunktes.

Wenn ein Körper vom Gewichte Q in harmonische geradlinige Schwingungen $y = a\cdot\sin(\omega t)$ versetzt wird, so erfordert er zu seiner Bewegung einen Beschleunigungsdruck, welcher im Betrage

(20) $$B = \frac{Q}{g}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Q}{g}\cdot\omega^2\cdot a\cdot\sin(\omega t) = -\overline{B}\cdot\sin(\omega t)$$

von dem Antriebmechanismus ausgeübt werden muß. Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist es nun, zu prüfen, unter welchen Bedingungen eine mit dem Körper gekuppelte Feder imstande ist, den Ausgleich der Massendrucke zu übernehmen und den Antriebmechanismus (sowie den empfindlichen Tachometer bei Achsenregulatoren) des Zwanges zu entledigen.

Diejenige Funktion $y = f_1(x + \alpha t) + f_2(x - \alpha t)$, welche die Bewegung der idealen Feder zum Ausdrucke bringt, würde folgende Eigenschaften haben:

1. Für $x = 0$ müßte y jederzeit verschwinden;
2. Für $x = l$ müßte y das Gesetz $\varphi(t) = a\cdot\sin(\omega t)$ befolgen;
3. Für $x = l$ müßte die veränderliche Kraftäußerung $S = S_0 + \psi(t)$ des Endpunktes, abgesehen von der konstanten Vorspannung, jederzeit den Betrag $B = -\overline{B}\cdot\sin(\omega t)$ decken, dessen der schwingende Körper zu seiner Bewegung bedarf; die dritte Forderung lautet demnach:

(21) $$\psi(t) = -c\cdot\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=l} = -\overline{B}\cdot\sin(\omega t).$$

4. Die Torsionsbeanspruchung der Feder dürfte einen vorgeschriebenen Maximalwert τ_a nicht überschreiten;

5. Der Ausgleich müßte unabhängig von der veränderlichen Amplitude a der harmonischen Schwingung erfolgen;

6. Variationen der Periodenzahl dürften die Kompensation nicht stören.

Die Vorbedingung zur Erfüllung der Wünsche 1—3 ist in der Gleichung (19) enthalten; wir substituieren

$$\varphi\left(t - \frac{l}{\alpha}\right) = a \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{l}{\alpha}\right)\right], \quad \varphi\left(t + \frac{l}{\alpha}\right) = a \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{l}{\alpha}\right)\right];$$

dann schreibt (19) vor, daß der Ausdruck

$$a \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{l}{\alpha}\right)\right] - a \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{l}{\alpha}\right)\right] - \frac{\alpha}{c} \cdot \int_{t - \frac{l}{\alpha}}^{t + \frac{l}{\alpha}} \bar{B} \cdot \sin(\omega t) \cdot dt$$

verschwinden muß, oder:

$$2 a \sin \omega t \cdot \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}\, l\right) - \frac{\bar{B} \cdot \alpha}{\omega \cdot c} \cdot \left[\cos\left\{\omega\left(t + \frac{l}{\alpha}\right)\right\} - \cos\left\{\omega\left(t - \frac{l}{\alpha}\right)\right\}\right] = 0.$$

Nach einigen goniometrischen Transformationen erscheint diese Bedingung in der Form:

$$(22) \qquad \mathrm{tg}\left(\frac{\omega \cdot l}{\alpha}\right) = \frac{a \cdot \omega \cdot c}{\bar{B} \cdot \alpha}.$$

Für eine zu entwerfende Feder sind a, ω und $\bar{B}$ gegeben; mithin ist die Feder so zu dimensionieren, daß der Forderung (22) genügt wird. Mit Berücksichtigung der Gleichungen (6) und (8) lautet die Bedingung:

$$\mathrm{tg}\left[\omega \cdot \frac{\varkappa_1 \cdot n \cdot r^2}{d}\right] = \frac{a \cdot \omega \cdot \varkappa_2 \cdot d^3}{\bar{B} \cdot r}$$

und schreibt für die Windungszahl vor:

$$n = \frac{d}{\varkappa_1 \cdot \omega \cdot r^2} \cdot \mathrm{artg}\, \frac{a \cdot \omega \cdot \varkappa_2 \cdot d^3}{\bar{B} \cdot r}.$$

[illegible] angenommen sind oder anderweitigen Forderungen zu [illegible] haben. Von den unendlich vielen Lösungen, welche die [illegible] liefert, wähle man diejenige mit dem kleinsten Absolut[illegible] Vergrößerung für größere Federlängen würde das Auftreten [illegible] in der Feder zur Folge haben, wie in Abschnitt (5) [illegible] Wenn die Feder für eine bestimmte (normale) Perioden[illegible] entspricht, so wird bei Abweichungen von ω

der Kompensationsdruck $\overline{B}$ solche Variationen erfahren, daß (22) immer befriedigt wird; es wird ein Ausgleich

$$(24) \qquad B = \frac{a \cdot c}{\alpha} \cdot \omega \cdot \operatorname{cotg} \frac{\omega \cdot l}{\alpha}$$

zu erwarten sein.

Ehe wir zur Auswertung der Festigkeitsbedingung schreiten, wollen wir für die eben besprochenen Fälle zunächst die Bewegungsgleichung ableiten; zu diesem Zwecke setzen wir in die Bestimmungsgleichungen (18) ein:

$$\varphi(t) = a \cdot \sin(\omega t), \quad \psi(t) = -\overline{B} \cdot \sin(\omega t) = -\frac{a \cdot c}{\alpha} \cdot \omega \cdot \cot\left(\frac{\omega \cdot l}{\alpha}\right) \cdot \sin(\omega t);$$

dann ist

$$\tfrac{1}{2} \cdot \varphi\left[\frac{t-l}{\alpha}\right] = \frac{a}{2} \cdot \sin\left\{\frac{\omega}{\alpha}(t-l)\right\},$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{c} \cdot \int^{\frac{1}{\alpha}(t-l)} \psi(t) \cdot dt = \tfrac{1}{2}\, a \cdot \cot\left(\frac{\omega \cdot l}{\alpha}\right) \cdot \cos\left\{\frac{\omega}{\alpha}(t-l)\right\};$$

durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten ergibt sich nach gehöriger Reduktion:

$$f_1(t) = -\frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot t\right),$$

während die Addition der Gleichungen nach Vertauschung von $-l$ gegen $+l$ liefert:

$$f_2(-t) = +\frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot t\right).$$

Substituieren wir nun noch für die Argumente der Funktionen f_1 und f_2 die Variablen $(x + \alpha t)$ bzw. $(x - \alpha t)$, so bekommen wir nach leichter Reduktion die allgemeine Bewegungsgleichung der Feder:

$$(25) \qquad y = f_1(x + \alpha t) + f_2(x - \alpha t) = a \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot x\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \cdot \sin(\omega t).$$

4. Dimensionierung der zu entwerfenden Feder.

Nachdem wir die dynamische Bedingung in der Gestalt der Gleichung (23) gefunden haben, werden wir jetzt noch die zulässige Torsionsbeanspruchung k_d in die Rechnung einzuflechten haben. Zwischen der Axialkraft P und der Torsionsspannung k_d besteht die Relation:

$$P = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d^3}{r} \cdot k_d.$$

Gleichung (1) auf die durch (25) ausgesprochene Bewegung angewendet, ergibt:

$$S = S_0 - c \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - c \cdot a \cdot \frac{\omega}{\alpha} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot x\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \cdot \sin(\omega t),$$

und diese Beziehung sagt aus, daß die zusätzliche Kraft $-c \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$ zwischen einem positiven und negativen Maximum

$$c \cdot a \cdot \frac{\omega}{\alpha} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot x\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \tag{26}$$

periodisch verläuft; diese Amplitude wiederum weist ihren Größtwert dort auf, wo $\cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot x\right) = 1$ ist, also an der Einspannungsstelle $(x = 0)$ der Feder. Setzen wir die durch die Vorspannung S_0 geweckte Spannung gleich k_0, so wird

$$S_{max} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d^3}{r} \cdot k_0 + c \cdot a \cdot \frac{\omega}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d^3}{r} \cdot k_d;$$

mit Berücksichtigung von Gleichung (8) bekommen wir daraus die Festigkeitsgleichung:

$$\frac{\pi}{16}(k_d - k_0) = \frac{\varkappa_2 \cdot a \cdot \omega}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)},$$

oder

$$\frac{\omega \cdot l}{\alpha} = \arcsin \frac{16 \cdot \varkappa_2 \cdot a \cdot \pi}{\pi (k_d - k_0)}. \tag{27}$$

Nach Gl. (13) wurde die dynamische Bedingung erfüllt durch

$$\frac{\omega . l}{\alpha} = \operatorname{arctg} \frac{a \cdot \omega \cdot c}{B \cdot \alpha}.$$

Um beiden Anforderungen gerecht zu werden, vereinigen wir ihre Bedingungsgleichungen und bekommen daher mit Rücksicht auf die Relation (8):

$$\frac{a \cdot \omega \cdot \varkappa_2}{B} \cdot \frac{d^3}{r} = \operatorname{tg} \arcsin \frac{16 \cdot \varkappa_2 \cdot a \cdot \omega}{\pi \cdot (k_d - k_0)},$$

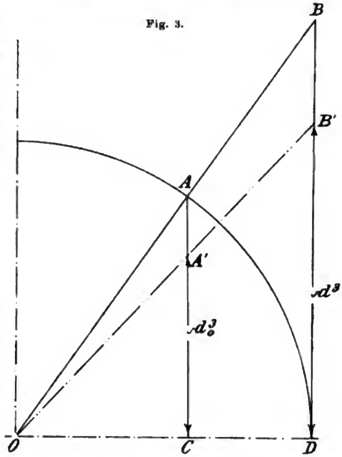
also

$$d = \sqrt{r} \cdot \sqrt[3]{\frac{B}{a \cdot \omega \cdot \varkappa_2} \cdot \operatorname{tg} \arcsin \frac{16 \cdot \varkappa_2}{\pi} \cdot \frac{a \cdot \omega}{k_d - k_0}}. \tag{28}$$

Wenn die Feder ohne Vorspannung eingesetzt wird, wenn also k_0 verschwindet, so sind alle Größen unter dem Wurzelzeichen bekannt bis

auf den Radius r der Schraubenlinie, über den wir noch freie Verfügung haben; im Interesse der Materialersparnis wähle man r so klein, als es konstruktive Rücksichten zulassen. Nachdem man sich über die Wahl von r einig geworden ist, berechne man d aus Formel (28) und n aus (23). Bei vorgespannten Federn setze man für k_0 einen Schätzungswert ein, berechne provisorisch die Drahtstärke aus (28), bestimme die entsprechende Beanspruchung k_0 und verfahre nötigenfalls nochmals in gleicher Weise unter Verwendung des korrigierten Wertes für k_0 in (28). Die trigonometrische Funktion unter dem Wurzelzeichen belasse man aus später zu ersehenden Gründen.

Fig. 3.



Auch eine graphische Lösung läßt das Problem zu. Man beschreibe einen Kreis vom Radius OD (Fig. 3) gleich $5000 \cdot \frac{\pi}{16\varkappa_2}$ (cm), trage die Ordinate

$$CA = 5000 \cdot \frac{a \cdot \omega}{k} \text{ (cm)}$$

ein und ziehe den Strahl OA. Trägt man dann in beliebigem Maße auf CA die dritte Potenz des Durchmessers d_0 auf, den eine statische Feder zur Erzeugung von $\overline{B}$ bei der Spannung k benötigen würde, so schneidet der Strahl OA' auf der im Punkte D gezogenen Kreistangente den Kubus des dynamischen Federdrahtdurchmessers in gleichem Maße ab. Die Windungszahl ist aber nach (23) zu berechnen. In AOD erscheint der Winkel $\chi = \operatorname{arctg} \frac{a \cdot \omega \cdot c}{B \cdot \alpha}$, welcher charakteristisch für das Verhalten der Feder ist. Formel (28) besagt, daß eine Lösung nur dann realisiert werden kann, wenn

$$(30) \qquad k = k_d - k_0 > \frac{16}{\pi} \cdot \varkappa_2 \cdot a \cdot \omega$$

ist. Für Stahlfedern lautet diese Vorschrift;

$$k > 360 \cdot a \cdot \omega .$$

Bei der Wahl der Federlänge l, welche in den Endresultaten nicht vorkam, hat man der Gefahr Rechnung zu tragen, daß die Windungen

infolge der inneren Bewegung der Feder zusammenschlagen. Diese Befürchtungen werden am ehesten dort gerechtfertigt sein, wo der veränderliche Neigungswinkel der Schraubenfeder gegen die Zylinderachse den Größtwert erreicht; Ort und Zeit für das Eintreffen dieser Krise sind durch das Maximum von

$$-\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a \cdot \omega}{\alpha \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot x\right) \cdot \sin(\omega t)$$

gekennzeichnet, und dieses Glied gipfelt mit $(\omega t) = -\frac{3}{2}\pi$ und $x = 0$ in dem Werte:

$$\frac{a \cdot \omega}{\alpha \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)}.$$

Betrachtet man die Steigung der Schraube in der nächsten Umgebung des gefährdeten Punktes als konstant, so nähern sich zwei benachbarte Windungen um den Betrag

$$\frac{a \cdot \frac{\omega}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \cdot \frac{l}{n}.$$

Soll dann der Sicherheit wegen immer noch ein Spalt δ_0 cm bleiben, so ist der in Mittelstellung befindlichen Feder eine Länge einzuräumen:

$$(31) \qquad l = n \cdot \left[\frac{\delta_0 + d}{100} + \frac{a \cdot \frac{\omega}{\alpha} \cdot l}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \cdot \frac{1}{n}\right] = n \cdot \frac{\delta_0 + d}{100} + \frac{a \cdot \chi}{\sin \chi}.$$

5. Variation des Federhubes und der Periodenzahl.

Im folgenden sollen die Abmessungen der Feder als unveränderlich gegeben angesehen werden; ein Endpunkt sei wiederum an der Bewegung verhindert, während der andere dem Sinusgesetze gehorcht.

Wächst bei konstanter Winkelgeschwindigkeit der Federhub $2a$, so nimmt proportional hiermit auch der Kompensationsdruck zu nach Formel (24); da nun der zu vernichtende Beschleunigungsdruck $\frac{Q}{g} \cdot \omega^2 \cdot a$ gleichfalls mit a in linearem Verhältnis steht, so ist die Kompensation für jeden Federhub eine totale, sobald nur das System für die betreffende Winkelgeschwindigkeit „abgestimmt" ist.

Anders sind die Verhältnisse bei Variation der Tourenzahl. Die Funktion

$$\varkappa = \frac{a \cdot c}{l} \cdot \frac{\left(\omega \cdot \frac{l}{\alpha}\right)}{\operatorname{tg}\left(\omega \cdot \frac{l}{\alpha}\right)}$$

(Gl. 24) läßt leicht die Abhängigkeit des Kompensationsdruckes von der Periodenzahl erkennen; sie besagt, daß derselbe mit wachsender Tourenzahl abnimmt, während die Massendrucke mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit ansteigen. Der Forderung (6) in Abschnitt (3) kann also keinesfalls genügt werden. Der Ausdruck für $\varkappa$ ist um so beständiger, je kleiner

$$\frac{\omega \cdot l}{\alpha} = \chi = \arcsin \frac{16 \cdot \varkappa_2 \cdot a \cdot \omega}{\pi \cdot (k_d - k_0)},$$

die „dynamische Charakteristik“ der Feder, ist. Das einzige Mittel, sich gegen die störenden Einflüsse veränderlicher Tourenzahl zu schützen, besteht demnach in der Wahl eines großen Wertes für k_d.

Die Diskussion der Gleichung für $\varkappa$ liefert, wenn wir, vom Ruhezustande beginnend, ω einen größeren Bereich durchlaufen lassen, folgendes Ergebnis. Für $\omega = 0$ nimmt $\varkappa$ den einer statischen Feder entsprechenden Betrag an. Mit wachsendem ω erfährt $\varkappa$ eine Abnahme, um für $\omega = \frac{\pi \cdot \alpha}{2 \cdot l}$ zu verschwinden; Fall der Resonanz. Nach Überschreitung der Resonanz wird $\varkappa$ negativ, um mit $\omega = \frac{\pi \cdot \alpha}{l}$ über alle Grenzen zu wachsen; auch für die Elongationen sämtlicher Federelemente mit Ausnahme des Anfangs- und Endpunktes ergeben sich unendliche Werte, weshalb wir hier von einer „kritischen Tourenzahl“ sprechen können. Geht man über die kritische Tourenzahl hinaus, so wird $\varkappa$ wieder positiv; an der Stelle $x = \frac{\pi \cdot \alpha}{\omega}$ tritt jetzt ein Knotenpunkt in der Feder auf, welcher bei weiterer Steigerung der Winkelgeschwindigkeit in der Richtung nach dem Einspannungspunkte zu wandert. Mit $\omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{l}$ ist $\varkappa$ wieder verschwunden, ein neuer Fall der Resonanz eingetreten. Ein weiteres Anwachsen von ω führt bei $\frac{2\pi \cdot \alpha}{l}$ eine zweite kritische Tourenzahl herbei, und so wiederholt sich das Spiel immer wieder von neuem; die Resonanzerscheinung wechselt immer mit einer Krise, die jedesmal einen neuen Knotenpunkt mit sich bringt. Es ist nicht uninteressant, sich den Verlauf des $\varkappa$ in Funktion von ω zu veranschaulichen.

6. Allgemeine Bewegungsgleichung der Feder, deren Endpunkt zwangsläufig nach dem Sinusgesetze bewegt wird.

Wir hatten gefunden, daß sich die Funktionen f_1 und f_2 der allgemeinen Gleichung

$$y = f_1(x + \alpha t) + f_2(x - \alpha t)$$

aus dem Bewegungsgesetze $\varphi(t)$ und der Kräftefunktion $\psi(t)$ des zwangläufig geführten Endpunktes mit Hilfe der Relationen (18) in Erfahrung bringen lassen. Die Bedingung für einen festen Anfangspunkt lautete jedoch

$$(19) \qquad \varphi\left(t - \frac{l}{\alpha}\right) + \varphi\left(t + \frac{l}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{c} \cdot \int\limits_{t-\frac{l}{\alpha}}^{t+\frac{l}{\alpha}} \psi(t) \cdot dt = 0;$$

der Bewegungsgsgleichung

$$\varphi(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

war das Gesetz

$$\psi(t) = -\frac{a \cdot c}{\alpha} \cdot \omega \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega \cdot l}{\alpha}\right) \cdot \sin(\omega t)$$

zugeordnet. Nach (18) konnten dann aus diesen beiden Gesetzen die Funktionen f_1 und f_2 bestimmt und zu der partikulären Lösung vereint werden.

Es drängt sich nun die Frage auf, ob denn mit dieser Funktion $\psi(t)$, welche für unseren praktischen Fall erwünscht war, die Möglichkeit zur Befriedigung der Gleichung (19) erschöpft ist. Wie eine nähere Betrachtung ergibt, bedeutet es keinen Verstoß gegen die Vorschrift (19), wenn $\psi(t)$ um die Ableitung irgend einer Funktion mit dem Periodizitätsmodul $\frac{2 \cdot l}{\alpha}$ vermehrt wird; wir schreiben also symbolisch:

$$(32) \qquad \psi(t) = -\frac{a \cdot c}{\alpha} \cdot \omega \cdot \operatorname{cotg}\frac{\omega \cdot l}{\alpha} \sin(\omega t) + \mathfrak{f}'_{\left(\frac{2l}{\alpha}\right)}(t).$$

Später werde ich darlegen, daß in der Gleichung (32) tatsächlich die allgemeine Lösung zum Ausdrucke gebracht wird; zunächst wollen wir uns aber gleich unsere neue Entdeckung zunutze machen, indem wir die allgemeine Funktion ψ in die Bestimmungsgleichungen (18) einsetzen, welche ergeben

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{t-l}{\alpha}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{c} \int\limits_0^{\frac{1}{\alpha}(t-l)} \left[\frac{a \cdot c}{\alpha} \cdot \omega \cdot \operatorname{cot}\frac{\omega l}{\alpha} \cdot \sin(\omega t) - \mathfrak{f}'_{\left(\frac{2l}{\alpha}\right)}(t)\right] \cdot dt.$$

$$f_1(t) = -\frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)}\left[\cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)\right]$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} \cdot \left[\mathfrak{f}_{\left(\frac{2l}{\alpha}\right)} \frac{1}{\alpha}(+t-l) - \mathfrak{f}_{\left(\frac{2l}{\alpha}\right)}(0)\right],$$

$$f_2(t) = + \frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)}\left[\cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{c}\left[\mathfrak{f}_{\left(\frac{2l}{\alpha}\right)}\frac{1}{\alpha}(-t-l) - \mathfrak{f}_{\left(\frac{2l}{\alpha}\right)}(0)\right]$$

und daraus durch Addition

$$f_1(x+\alpha t) + f_2(x-\alpha t) = y = a \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot x\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \sin(\omega t)$$

$$- \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{c}\left[\mathfrak{f}_{\left(\frac{2l}{\alpha}\right)}\frac{1}{\alpha}(\alpha t + x - l) - \mathfrak{f}_{\left(\frac{2l}{\alpha}\right)}\frac{1}{\alpha}(\alpha t - x - l)\right].$$

Zweckmäßig führen wir eine neue Funktion F ein, durch die Definitionsgleichung:

$$F(z) = -\frac{\alpha}{2c} \cdot f\left(\frac{z}{\alpha}\right),$$

wonach F die Eigenschaft hat

$$F(z) = -\frac{\alpha}{2c} \cdot f\left[\frac{z}{\alpha} + \frac{2l}{\alpha}\right] = -\frac{\alpha}{2c} \cdot f\left(\frac{z+2l}{\alpha}\right) = +F(z+2l),$$

also den Periodizitätsmodul $(2l)$ besitzt. Um nun in der so entstandenen Gleichung

$$(33)\quad y = a \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot x\right) \cdot \sin(\omega t)}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} + F_{(2l)}(\alpha t + x - l) - F_{(2l)}(\alpha t - x - l),$$

die allgemeine Lösung des Problems zu erkennen und gleichzeitig neue wichtige Relationen zu gewinnnen, wollen wir y zerfällen in:

$$\left.\begin{aligned} &(34\text{a}) \qquad y_1 = a \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot x\right) \cdot \sin(\omega t)}{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha} \cdot l\right)} \\ &(34\text{b}) \qquad y_2 = F_{(2l)}(\alpha t + x - l) - F_{(2l)}(\alpha t - x - l) \end{aligned}\right\}.$$

Zur Zeit $t = 0$ liege der Endpunkt der Feder in der Mittellage; im allgemeinen Falle ist der augenblickliche Bewegungszustand durch die Lage y_0 und die Momentangeschwindigkeit $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0$ sämtlicher Federelemente bestimmt. Wenn nun die partikuläre Bewegung $\left[(y_1)_0, \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)_0\right]$ abtrahiert wird, so möge noch bleiben

$$(y_2)_0 = \Phi(x), \quad \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_0 = \Psi(x).$$

Aus Rücksichten des stetigen Zusammenhangs der Feder werden dann $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ für $x = 0$ und $x = l$ verschwinden, können also in eine Fouriersche Reihe verwandelt werden, welche im Intervall $b < x < l$ und an dessen Grenzen Gültigkeit hat; das Ergebnis der Transformation laute

$$(35) \qquad \left.\begin{aligned} (y_2)_0 &= \Phi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{l}\right) \\ \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_0 &= \Psi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \beta_n \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{l}\right) \end{aligned}\right|$$

Wir versuchen nun, aus der Lösung (34b) auf die allgemeine Kategorie (35) zu kommen, welche jeden denkbaren Anfangszustand auszusprechen vermag. Der Periodizitätszeiger $(2l)$ werde fortgelassen und den endgültigen Formeln wieder beigefügt. Aus (34b) folgt

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = \alpha \cdot \left[\frac{\partial F(\alpha t + x - l)}{\partial t} + \frac{\partial F(\alpha t - x - l)}{\partial t}\right]$$

und daraus für $t = 0$:

$$(36) \qquad \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_0 = \alpha \left[\frac{d F_{2l}(x - l)}{dx} + \frac{d F_{2l}(-x - l)}{dx}\right],$$

$$(37) \qquad (y_2)_0 = F_{(2l)}(x - l) - F_{(2l)}(-x - l);$$

da nämlich die Zeit konstant ist, wurden in (36) die geraden d gesetzt. Aus (37) ergibt sich durch Differentiation und Einsetzen in (36):

$$\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_0 = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{d F(x - l)}{dx} - \alpha \frac{d(y_2)_0}{dx}, \qquad \text{also}$$

$$\left.\begin{aligned} (38\text{a}) \qquad F_{(2l)}(x - l) &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \int^{x} \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_0 \cdot dx + \tfrac{1}{2} \cdot (y_2)_0 \\ (38\text{b}) \qquad F_{(2l)}(-x - l) &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \int^{x} \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_0 \cdot dx - \tfrac{1}{2} (y_2)_0 \end{aligned}\right\}.$$

Diese Beziehungen lehren, F zu finden aus dem anfänglichen Bewegungszustande $\left[(y_2)_0, \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_0\right]$; Bedingung ist aber, daß derselbe beide Gleichungen (38) erfüllt, und, daß nach Ausführung der Integration wirklich eine Funktion mit dem Periodizitätsmodul $(2l)$ erscheint. Diesen Forderungen entsprechen nun die ganz allgemeinen Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ in (35); wir bekommen nämlich aus (38):

$$F(x - l) = \frac{1}{2\alpha} \cdot \int^{x} \sum_{n=1}^{n=\infty} \beta_n \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{l}\right) \cdot dx + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cdot \sin\left(n \pi \cdot \frac{x}{l}\right),$$

$$F(x - l) = -\frac{l}{2 \alpha n \pi} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \beta_n \cdot \cos\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{l}\right) + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{l}\right).$$

Vertauschen wir x mit $(-x)$, so ändert sich das Integral nicht; der rechte Summand ändert sein Vorzeichen, genau so wie es Gleichung (38b) verlangt. Zugleich erkennen wir die Periode $(2l)$ in der rechten Seite, und damit ist erwiesen, daß in Gleichung (33) tatsächlich die allgemeine Lösung enthalten ist.

Unter Vernachlässigung der Dämpfung würde nun die Bewegung und Kraftäußerung der Feder abhängen von den Bedingungen, unter welchen die Feder in Bewegung gesetzt wurde. Mag aber die Dämpfung noch so klein sein, so läßt sie doch alle Bewegungen abklingen, die nicht immer von neuem eingeleitet werden. Gleichung (25) besagt, daß bei der harmonischen Bewegung irgend ein Massenpunkt die Bewegung mit derselben Periodenzahl ausführt wie der angetriebene Endpunkt; diese Schwingungen werden also, wenn auch etwas verwischt durch die unvermeidliche Dämpfung, stets aufrecht erhalten werden. Die Zeitdauer T, während deren die Funktion

$$y_2 = F_{(2l)}(\alpha t + x - l) - F_{(2l)}(\alpha t - x - l)$$

alle Bewegungsphasen durchläuft, bestimmt sich aus

$$\alpha(t + T) + x - l = \alpha t + x - l + 2l \quad \text{zu} \quad T = \frac{2 \cdot l}{\alpha}.$$

Die Periodenzahl $\frac{\alpha}{2l}$, mit der die Phasen der Zusatzfunktion y_2 durchlaufen werden, ist in der Regel von der des zwangläufig bewegten Punktes $\frac{\omega}{2\pi}$ verschieden. Haben die Periodenzahlen $\frac{\alpha}{2l}$ und $\frac{\omega}{2\pi}$ keinen gemeinsamen Teiler, so werden sich die Bewegungen niemals wiederholen; ist Dämpfung vorhanden, so erlischt die Zusatzbewegung, und es bleibt die partikuläre Lösung (25).

Auch für beliebige periodische Zwangsbewegung des einen Federendpunktes läßt sich die Lösung des Problems angeben; man führt an der periodischen Bewegungsfunktion des Endpunktes die harmonische Analyse aus und leitet so die Aufgabe auf die Sinusbewegung zurück. Die Addition der Grundfunktionen ergibt die resultierende Bewegung und Kraftäußerung. Für die Berechnung von Federn, welche den Kraftschluß von schnell bewegten, gesteuerten Ventilen vermitteln, könnte dieses Verfahren gelegentlich Verwendung finden.

7. Experimentelle Prüfung der Ergebnisse für die harmonische Bewegung.

Wenn bei einer Kompensationsfeder der Ausgleich ein vollkommener ist, so werden von dem Antriebsmechanismus auf die bewegte Masse keine Kräfte mehr übertragen; diese wird also, einmal in har-

monische Schwingungen vorsetzt, in der eingeleiteten Bewegung verharren, wenn von der verhältnismäßig geringen Dämpfung abgesehen wird. Hierin bietet sich eine Gelegenheit zur Prüfung der voraufgegangenen Theorien. Beobachtet man die Schwingungszahl ν der Feder, an welcher der Reihe nach verschieden schwere Körper Q aufgehängt sind, so kann man die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2 \cdot \nu \cdot \pi$ sowie den Massendruck $\overline{B} = \frac{Q}{g} \cdot \omega^2 \cdot a$ berechnen und mit dem durch Formel (24) angegebenen Kompensationsdrucke vergleichen.

Als Versuchsobjekt diente eine Feder mit den Daten $r = 4{,}5$ cm, $d = 0{,}3$ cm, $n = 17\frac{5}{6} \sim 18$. Die mit 0.7 kg belastete Feder erfuhr eine Verlängerung von 102 mm, sodaß $\frac{c}{l} = 0{,}7 : 0{,}102 = 6{,}85$ folgt. Auf die Längeneinheit der Feder entfällt (in Achsrichtung gemessen) eine Masse

$$\mu = 0{,}1^3 \cdot \frac{3{,}14^2}{2} \cdot \frac{7{,}86}{9{,}81} \cdot \frac{17{,}83 \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}3^2}{l} = \frac{0{,}0284}{l};$$

mithin wird:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{c}{\mu}} = 15{,}5, \quad \frac{\alpha}{c} = 2{,}26.$$

Aus diesen Daten errechnet sich

die Charakteristik zu $\chi = 360 \cdot \omega : \left(\frac{\alpha}{l}\right) \cdot 2\pi = 3{,}71 \cdot \omega$ (Gradmaß),

der Kompensationsdruck $K = \frac{\omega}{\left(\frac{\alpha}{l}\right)} \cot \chi = \frac{\omega}{2{,}26} \cot \chi$.

In der folgenden Tabelle sind die Versuchsergebnisse enthalten und der Beschleunigungsdruck dem berechneten Kompensationsdrucke gegenübergestellt.

Versuch Nr.	Gewicht Q kg	Schwingungszahl pro Min.	Winkelgeschwind. $\omega = 2 \cdot \nu \cdot \pi : 60$	Massendruck aus der beobachteten Schwingungszahl bestimmt	Charakteristik im Gradmaß	cotg χ	Ber. Kompensationsdruck	Abweich. von Massendruck in %
1, 2	0,5 kg	101 100	10,5	5,6 kg	39°	1,235	5,75	2,7 %
3, 4	0,2 „	140 141	14,7	4,4 „	54° 30′	0,713	4.63	5,2 %
5, 6	0 „	232 232	24,2	0 „	90°	0	0	—

Mit Rücksicht auf die verhältnismäßig ungünstigen Versuchsbedingungen ist das Ergebnis durchaus befriedigend. Außerdem mag hier die Bemerkung Platz finden, daß eine geringe Abweichung in der (beobachteten) Winkelgeschwindigkeit ω große Differenzen zwischen dem beobachteten und berechneten Massendrucke mit sich bringt; eine geringe Korrektion von ω würde beide Ergebnisse zur Deckung bringen.

8. Eigenbewegungen der Feder unter verschiedenen Bedingungen.

Wir hatten in Abschnitt 5 erkannt, daß bei gesteigerter Periodenzahl der nach dem Sinusgesetze zwangläufig bewegten Feder die Kraftäußerung am geführten Endpunkte nachläßt, um mit $\omega = \frac{\pi \cdot a}{2l}$ vollständig zu verlöschen; demnach spricht das Gesetz

$$y = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2l} \cdot x\right) \cdot \sin(wt)$$

eine Möglichkeit für die Eigenbewegungen der Feder aus; die Zeitdauer eines Doppelschwunges berechnet sich zu

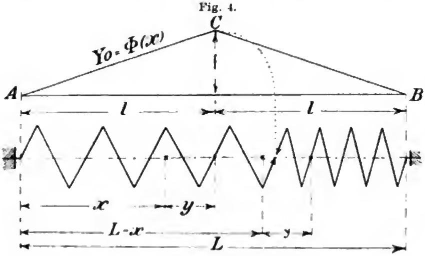
$$T = \frac{4 \cdot l}{a}. \tag{41}$$

Die Bewegung ist tautochron.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß sich je nach den Anfangsbedingungen die Eigenbewegung der Feder in der mannigfaltigsten Art abspielen kann. Mit der Beweisführung, daß das Integral (33) tatsächlich die allgemeine Lösung der harmonischen Zwangsbewegung darstellt, hatten wir gleichzeitig in den Beziehungen (38) Mittel und Wege gefunden, das Verhalten der Feder bei willkürlich gegebenen Anfangsbedingungen einer weiteren Betrachtung zu unterziehen. Es steht nun frei, das Integral y_1 in Gleichung (34) unberücksichtigt zu lassen, d. h. von der Zwangsbewegung abzusehen, und die unter verschiedenen Umständen eingeleitete Bewegung der sich selbst überlassenen Feder zu betrachten. Bedingung für die Benutzung der Relationen (38) waren aber Stetigkeit uud Verschwinden der Funktionen Φ und Ψ an beiden Endpunkten. Um diesen Forderungen gerecht zu werden, denken wir unsere Feder durch Ansetzen eines „Äquivalentes" von der Länge l auf $2 \cdot l$ gleich L gebracht und wenden auf diese Ersatzfeder die Relationen (38) an, in denen wir l durch L ersetzen. Die Anfangsbedingungen der parasitischen Hälfte sind denen des reellen Teiles so anzupassen, daß die freien Endpunkte beider gleiche Schwingungsbewegungen ausführen ohne mechanisch gekuppelt zu sein. Wenn nun zur Zeit $t = 0$ die spezifische Dehnung irgend eines Elementes x

gleich der spezifischen Zusammendrückung des „spiegelbildlichen“ Elementes $(L-x)$ ist (Fig. 4), wenn ferner zu Anfang die Geschwindigkeiten entsprechender Elemente gleiche Größe und Richtung haben, so müssen aus Symmetriegründen spiegelbildliche Punkte [spiegelbildlich auf die spannungslose Mittellage bezogen] gleiche Bewegungsgesetze befolgen, sodaß die beiden freien Enden stets einspielen, ohne einen Zwang aufeinander auszuüben.

Fig. 4.



Nach diesen Vorbereitungen können wir die Eigenbewegungen einer Feder ergründen, welche, am einen Ende fest eingespannt, aus dem Zwange einer statischen Federung plötzlich befreit wird. Die momentane Entlastung werde zur Zeit $t = 0$ vorgenommen; als Ruhelage werde aber diejenige bezeichnet, welche von der spannungslosen Feder eingenommen wird. Für den Zeitanfang ist $(y_2)_0 = \Phi(x) = f \cdot \frac{x}{l}$ die Gleichung für die Ausweichungen der Federelemente; mit Einführung der ideellen Länge L wird daraus

$$\Phi(x) = 2 \cdot f \cdot \frac{x}{L}$$

[gültig von A bis C Fig. 4], und der Verlauf der Funktion Φ wird durch einen gebrochenen Linienzug ACB repräsentiert. Die Funktion $\Psi(x)$, welche die Geschwindigkeit zum Ausdrucke bringt, ist null zu setzen. Der erste Schritt, welcher zur Ausbeute der Gleichungen (38) führt, besteht in der Entwicklung der Funktion Φ in eine Fouriersche Reihe:

$$\Phi(x) = \sum A_n \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right);$$

nach dem bekannten Verfahren findet man

$$A_n = \frac{8 \cdot f}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{also}$$

(42) $$\Phi(x) = \frac{8 \cdot f}{\pi^2} \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{L} - \frac{8 \cdot f}{9\pi^2} \cdot \sin\frac{3\pi \cdot x}{L} + \frac{8f}{25\pi^2} \cdot \sin\frac{5 \cdot \pi \cdot x}{L}$$

Da $\Psi(x)$ verschwindet, so haben wir nach Gleichung (38):

$$F(x-l) = \tfrac{1}{2} \cdot \Phi(x), \quad F(-x-l) = -\tfrac{1}{2}\,\Phi(x),$$

also:

$$y = F(\alpha t + x - L) - F(\alpha t - x - L)$$
$$= \frac{4\cdot f}{\pi^2}\Big[\Big\{\sin\frac{\pi}{L}(x+\alpha t) + \sin\frac{\pi}{L}(x-\alpha t)\Big\} - \tfrac{1}{9}\Big\{\sin\frac{3\cdot\pi}{L}(x+\alpha t)$$
$$+ \sin\frac{3\pi}{L}(x-\alpha t)\Big\} + \tfrac{1}{25}\Big\{\sin\frac{5\pi}{L}(x+\alpha t) + \sin\frac{5\pi}{L}(x-\alpha t)\Big\}\cdots\cdot\Big]$$

$$(43)\qquad y = \frac{8\cdot f}{\pi^2}\cdot\Big[\sin\pi\cdot\frac{x}{L}\cdot\cos\frac{\pi}{L}\alpha t - \tfrac{1}{9}\sin 3\pi\cdot\frac{x}{L}\cdot\cos\frac{3\pi}{L}\alpha t$$
$$+ \tfrac{1}{25}\sin 5\pi\cdot\frac{x}{L}\cdot\cos\frac{5\pi}{L}\alpha t\cdots$$

Hierin ist bereits das allgemeine Gesetz der Eigenbewegung ausgesprochen; die Schwingungsdauer ist $T = \frac{2\cdot L}{\alpha} = \frac{4\cdot l}{\alpha}$, also die nämliche wie bei der Sinusbewegung. Setzen wir zur Abkürzung $\frac{L}{\alpha} = h$, so bekommen wir die Beschleunigungsfunktion durch zweimalige partielle Differentiation der Gleichung (43) zu:

$$p = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{8\cdot f}{h^2}\Big[\sin\pi\cdot\frac{x}{L}\cdot\cos\frac{\pi}{h}\cdot t - \sin 3\pi\cdot\frac{x}{L}\cdot\cos\frac{3\pi}{h}t$$
$$+ \sin 5\pi\cdot\frac{x}{L}\cdot\cos\frac{5\pi}{h}\cdot t\cdots\Big],$$

eine Reihe, die für den Endpunkt $x = l = \frac{L}{2}$ besonders einfach wird, nämlich:

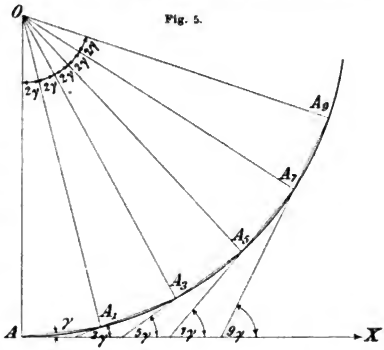


Fig. 5.

$$p_l = -\frac{8\cdot f}{h^2}\Big[\cos\frac{\pi}{h}\cdot t$$
$$+ \cos\frac{3\pi}{h}\cdot t$$
$$+ \cos\frac{5\pi}{h}\cdot t + \cdots i\cdot i\Big].$$

Für $t = 0$ und $t = \frac{1}{2}T = \frac{L}{\alpha} = h$ ergibt sich hieraus $p_l = -\infty$ bzw. $+\infty$; wenn das Argument t von 0 oder h verschieden ist, nimmt die Reihe für p unbestimmte Form an. Um zunächst die Progression zu untersuchen, welche mit dem m-ten Gliede an endlicher Stelle abbricht, tragen wir (Fig. 5) in einen mit dem Radius

$$O\,A = \frac{8\cdot f}{h^2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{h}\cdot t\right)}$$

beschriebenen Kreis die Sehnen

$$A A_1 = A_1 A_3 = A_3 A_5 \cdots = \frac{8 \cdot f}{h^2}$$

ein, welche den Zentriwinkel $2\gamma = \frac{2\pi}{h} \cdot t$ einschließen; die Reihe

$$S_m = \frac{8 \cdot f}{h^2} [\cos\gamma + \cos 3\gamma + \cos 5\gamma \cdots + \cos(2m-1)\gamma]$$

kann alsdann dargestellt werden durch die Projektion des Vektors AA_m auf die Kreistangente AX, also:

$$S_m = OA \cdot \sin(2m \cdot \gamma) = \frac{8 \cdot f}{h^2} \cdot \frac{\sin(2m\gamma)}{2 \cdot \sin\gamma}.$$

Die Beschleunigung des bewußten Federendpunktes befolgt also das Gesetz

$$p_t = -\lim_{m=\infty} \frac{4 \cdot f}{h^2} \cdot \frac{\sin\left(2m \cdot \frac{\pi}{h} \cdot t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}. \tag{44}$$

Diese Gleichung besagt, daß der Federendpunkt sich so verhält, als wenn er einer wechselnden Beschleunigung unterläge, welche in unendlich kleiner Zeit sämtliche Phasen einer Sinusfunktion mit der endlichen Amplitude $\frac{4 \cdot f}{h^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}$ durchläuft. Um die Frage nach der Bewegung des Endpunktes zu erledigen, müssen wir eine ganze Periode des Beschleunigungsvorganges in ihrer Wirkung auf den Endpunkt untersuchen. Der Zähler in (44) benötigt zum Durcheilen einer Periode die Zeitdauer $\delta = \frac{h}{m}$. Zu irgendeiner Zeit t, welche nicht in unmittelbarer Nähe der Umkehr-Zeitpunkte liegt, habe das Argument $2 \cdot m \cdot \frac{\pi}{h} \cdot t$ ein Vielfaches von 2π erreicht. Die jetzt einsetzende Beschleunigungsperiode von der Zeitdauer δ werde in zwei gleiche Zeitintervalle I und II (Fig. 6b) zerlegt, welche sich über den positiven und negativen Impuls erstrecken; in Fig. 6 sei der Verlauf der Zähler- und Nennerfunktion graphisch veranschaulicht. Über die Geschwindigkeitszunahme dv_1 durch den positiven Impuls wissen wir

$$dv_1 < \frac{4 \cdot f}{h^2} \frac{\int_0^{\frac{1}{2}\frac{h}{m}} \sin\left(2 \cdot m \cdot \frac{\pi}{h} \cdot t\right) \cdot dt}{\sin\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}, \text{ d. i. } dv_1 < \frac{4 \cdot f}{h \cdot m \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}$$

zu sagen. Die Abnahme $(-dv_2)$ der Geschwindigkeit durch den zweiten Impuls wird sein

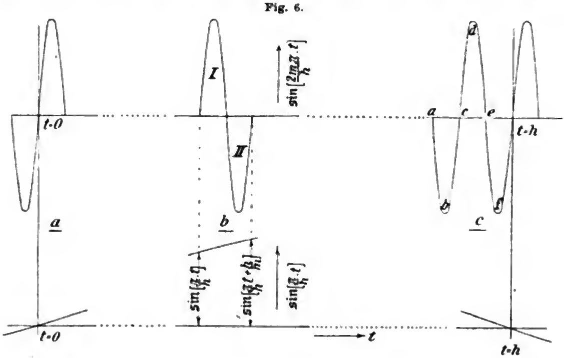
$$(-dv_2) > \frac{4 \cdot f}{h \cdot m \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{h}\left(t + \frac{h}{m}\right)}.$$

Die resultierende Geschwindigkeitszunahme wird also im Höchstfalle den Betrag

$$dv = \frac{4 \cdot f}{h \cdot m \cdot \pi}\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{h}\left(t + \frac{h}{m}\right)}\right] = \frac{4 \cdot f}{h^3} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)} \cdot \delta^2$$

erreichen; die „durchschnittliche" oder „wirksame" Beschleunigung in bewußtem Intervall würde sich durch Division mit der Zeit δ ergeben,

Fig. 6.



in welcher der Geschwindigkeitszuwachs erfolgt ist. Da nun δ eine verschwindende Größe ist, so verschwindet auch die „wirksame" Beschleunigung

$$\frac{4 \cdot f}{h^3} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)} \cdot \delta \cdot$$

Dort, wo $\sin\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)$ von Null verschieden ist, kann also keine Geschwindigkeitsänderung stattfinden; jeder Geschwindigkeitsimpuls [im Sinne der Fourierschen Reihentheorie] wird durch den nächstfolgenden wieder vernichtet.

Diese Schlüsse verlieren ihre Kraft, sobald der Nenner gegen die Null konvergiert, also in der Nähe der Zeitpunkte $t = 0$ und $t = h$ $[+ 2 \cdot k \cdot \pi]$. Die Gleichung (44)

$$p_t = -\lim_{m=\infty} \frac{4 \cdot f}{h^2} \cdot \frac{\sin\left(2 \cdot m \cdot \frac{\pi}{h} \cdot t\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}$$

wird die Vorgänge an den Umkehrpunkten beleuchten. In Fig. 6a und c ist zu erkennen, daß zu den kritischen Zeitpunkten Zähler und Nenner gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln und dadurch zwei Impulse in additivem Sinne aufeinanderfolgen lassen, welche sich in anderen Fällen vernichtet haben würden. Um diese qualitativen Ergebnisse auch rechnerisch ausbeuten zu können, müssen wir wissen, wie weit sich denn das Gebiet τ derjenigen Wellen erstreckt, deren Periode von Einfluß auf die Geschwindigkeit ist. Der Schluß, daß sich die Impulse der benachbarten Züge (abc) und (cde) verzehren müßten, ist wegen der Unbestimmtheit des Symbols $\infty - \infty$ unzulässig. Anderseits wissen wir aber, daß τ sich nicht über ein endliches Gebiet erstrecken kann, denn an den Grenzen eines solchen würde die Nennerfunktion nicht verschwinden. Um hierüber Aufklärung zu bekommen, erinnern wir uns, daß beim Durchlaufen einer vollständigen Periode dem Endpunkte ein Geschwindigkeitszuwachs

$$dv = -\frac{4 \cdot f}{h^3} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)} \cdot \delta^2$$

zuteil wurde. Der Zeitpunkt, welcher den Geschwindigkeitszuwachs einer vollen Periode unendlich klein von zweiter Ordnung werden läßt, sei um $\pm \tau$ gegen die Umkehrzeitpunkte $(t = 0)$ bzw. $(t = h)$ verschoben; da τ auf alle Fälle unendlich klein ist, so können wir schreiben

$$\cos\left(\frac{\pi}{h} \cdot \tau\right) = 1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{h} \cdot \tau\right) = \frac{\pi}{h} \cdot \tau,$$

und finden aus der Beziehung

$$\frac{dv}{\delta} = -\frac{4 \cdot f}{h} \cdot \frac{1}{\pi^2 \cdot \tau^2}\, \delta = 0$$

die Bedingung $\delta \cdot \left(\frac{\tau}{\delta}\right)^2 = \infty$. Da nun δ unendlich klein ist, so muß τ unendlich groß sein, woraus wiederum folgt, daß δ gegen τ verschwinden, also unendlich klein von zweiter Ordnung sein muß. In jedem Zeitelemente durchläuft demnach die Zählerfunktion unendlich viele Perioden.

Nunmehr können wir den Geschwindigkeitszuwachs für die Zeitpunkte $0,\ T,\ 2T \ldots$ berechnen und finden:

$$dv = \int\limits_{-\tau}^{+\tau} p \cdot dt = -\lim_{m=\infty} \frac{4 \cdot f}{h^2} \cdot \int\limits_{-\tau}^{+\tau} \frac{\sin\left(2m\,\frac{\pi}{h} \cdot t\right)}{\frac{\pi}{h} \cdot t} \cdot dt.$$

Die Substitution $2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{h} \cdot t = \vartheta$ führt uns auf

$$dv = -\lim_{\vartheta=\infty} \frac{4 \cdot f}{h \cdot \pi} \cdot \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \cdot d\vartheta,$$

denn es ist: $\frac{m}{h} \cdot \tau = \frac{\tau}{\delta} = \infty$; also bekommen wir:

$$dv = -\frac{4 \cdot f}{h \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \delta}{\vartheta} \cdot d\vartheta = -\frac{4 \cdot f}{h}.$$

Da die auf den Zeitpunkt $\frac{T}{2}$ angewendete Integration den entgegengesetzten Wert liefert, so wird die Geschwindigkeit selber die Hälfte des Geschwindigkeitszuwachses ausmachen, d. i. mit Einsetzung von $h = \frac{2 \cdot l}{\alpha}$:

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot f}{h} = \frac{\alpha \cdot f}{l}.$$

Wir sind damit zu dem interessanten Ergebnis gekommen, daß sich der Federendpunkt mit konstanter Geschwindigkeit auf- und abbewegt.

Nach dem nämlichen Verfahren wollen wir die Bewegungen erforschen, die der in $\frac{l}{2}$ befindliche Punkt ausführt. Aus der allgemeinen Bewegungsgleichung folgt für $x = \frac{L}{4}$:

$$v = \frac{8 \cdot f}{\pi \cdot h \sqrt{2}} \left[-\sin\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{h} \cdot t\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{h} \cdot t\right) - \cdots \right].$$

Durch Zerlegung in 4 Unterreihen und Differentiation ergibt sich daraus:

$$p = \frac{8 \cdot f}{\pi \cdot h \cdot \sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} -\cos\frac{\pi}{h} \cdot t \quad -\cos 9\frac{\pi}{h} \cdot t - \cos 17\frac{\pi}{h} \cdot t \cdots i \cdot i \\ +\cos 3\frac{\pi}{h} \cdot t + \cos 11\frac{\pi}{h} \cdot t + \cos 19\frac{\pi}{h} \cdot t \cdots i \cdot i \\ +\cos 5\frac{\pi}{h} \cdot t + \cos 13\frac{\pi}{h} \cdot t + \cos 21\frac{\pi}{h} \cdot t \cdots i \cdot i \\ -\cos 7\frac{\pi}{h} \cdot t - \cos 15\frac{\pi}{h} \cdot t - \cos 23\frac{\pi}{h} \cdot t \cdots i \cdot i. \end{array} \right.$$

Jede der 4 Unterreihen hat die Form $\left[\gamma = \frac{\pi}{h} t \text{ gesetzt}\right]$:

$$S = \pm \sum_{m=0}^{m=\infty} \cos(\gamma_0 + 8m \cdot \gamma) = \pm \lim_{m=8} \frac{\sin[4(m+1) \cdot \gamma]}{\sin 4\gamma} \cdot \cos(4m\gamma + \gamma_0).$$

Setzt man der Reihe nach $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_0 = 3\gamma$, $\gamma_0 = 5\gamma$, $\gamma_0 = 7\gamma$ ein und addiert, so ergibt sich nach gehöriger Vereinfachung

$$p = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \cdot f}{h^2} \cdot \frac{\sin[8(m+1)\gamma]}{\sin 4\gamma} \cdot \sin(2\gamma) \cdot \sin\gamma.$$

Da sich m als unendlich von zweiter Ordnung offenbarte, so besagt der gefundene Ausdruck, daß eine Integration über einen Geschwindigkeitsimpuls nur dann ergiebig sein kann, wenn der Nenner die Null durchschreitet, also in der Nähe der Stationen $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{3}{4}\pi$ usw., welche der Reihe nach zu untersuchen sind.

1. $\gamma = 0$. In unmittelbarster Nähe von $(\gamma = 0)$ kann $\sin\gamma$ durch γ ersetzt werden, so daß sich ergibt;

$$p = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \cdot f}{h^2} \cdot \frac{\gamma}{2} \cdot \sin[8(m+1)\gamma];$$

wenn aber der Momentanwert von p schon verschwindet, so wird das vom Integralwerte um so mehr gelten, so daß zurzeit $(t = 0)$ eine Geschwindigkeitsänderung nicht stattfindet; der Federendpunkt verharrt in Ruhe.

2. $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{h}{4}$. Die Funktionen $\sin(2\gamma) = 1$ und $\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sind im Integrationsgebiete als konstant zu betrachten, während $\sin(4\gamma)$ maßgebende Variationen erfährt. Ersetzen wir t durch $\frac{h}{4} + t$, so geht die Formel für den Momentanwert der Beschleunigung über in

$$p = -\frac{8 \cdot f}{h^3} \cdot \frac{\sin\left[8\frac{\pi}{h}(m+1) \cdot t\right]}{4 \cdot \frac{\pi}{h} \cdot t}.$$

Die Geschwindigkeitsänderung ergibt sich durch Integration über das maßgebende Gebiet von $-\tau$ bis $+\tau$, also:

$$dv = -\frac{2 \cdot f}{\pi \cdot h} \cdot \int_{-\tau}^{+\tau} \sin\left[8 \cdot \frac{\pi}{h}(m+1) \cdot t\right] \cdot dt,$$

oder, mit Einführung von $\vartheta = \frac{8\pi}{h}(m+1) \cdot t$:

$$dv = -\frac{2 \cdot f}{\pi h} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} \cdot d\vartheta = -\frac{2 \cdot f}{h}.$$

3. $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{h}{2}$. Eine Änderung findet hier nicht statt.

4. $\gamma = \frac{3}{4}\pi$, $t = \frac{3}{4} \cdot h$. Ersetzen wir γ durch $\frac{\pi}{h}\left[\frac{3}{4}h + t\right]$, so wird:

$$p = +\frac{8 \cdot f}{h^2} \cdot \frac{\sin\left[8(m+1) \cdot \frac{\pi}{h} \cdot t\right]}{4 \cdot \frac{\pi}{h} \cdot t}.$$

Diesem Werte waren wir schon unter (2) mit entgegengesetztem Vorzeichen begegnet; die Geschwindigkeitsänderung beträgt demnach $+\frac{2f}{h}$, es tritt wieder eine Ruhepause ein.

Hiermit ist nun auch der Charakter der Bewegung ergründet: der mittlere Federpunkt schwingt mit der nämlichen Geschwindigkeit auf und nieder wie der freie Endpunkt; in der höchsten oder tiefsten Lage angelangt macht er aber auf die Dauer $\frac{h}{2} = \frac{T}{4}$ Station.

Um endlich auch die Bewegung des beliebigen in $\frac{l}{n}$ befindlichen Federpunktes zu erkennen, erinnern wir uns aus der Theorie der schwingenden gespannten Seile, daß der Parameter α in der Differentialgleichung (2) die räumliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Bewegungszustandes bezeichnet. Übertragen wir auch die Reflexion der Wellen auf die Feder, so können wir die Bewegungen auf zwei Stoßimpulse zurückführen, welche in der auf $L = 2 \cdot l$ ergänzten Feder hin- und herlaufen, und zwar stets mit gleicher Absolutgeschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung. Der eine Impuls hat die Eigentümlichkeit, dem jeweils erhaschten Elemente einen Geschwindigkeitszuschlag in seiner Kursrichtung zu erteilen, während es in der Natur des andern liegt, jedem auf seiner Reise angetroffenen Federpunkte einen Geschwindigkeitsstoß entgegen der eigenen Fahrtrichtung mitzugeben. Der Treffpunkt beider Läufer liegt an dem Endpunkte der reellen Feder; da jeder Impuls sein Spiel unabhängig vom andern treibt, so muß dieser Endpunkt einen Stoß von doppelter Wirkung erleiden. Hieraus ist nun zu schließen, daß ein in $\frac{l}{n}$ befindlicher Federpunkt nur so lange Zeit in fortwährender Bewegung bleibt, als der Läufer zum Durcheilen der Strecke $\frac{2 \cdot l}{n}$ benötigt, das wären also $\frac{2 \cdot l}{n \cdot \alpha} = \frac{T}{2 \cdot n}$ Sekunden; die Ruhezeit beträgt $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{T}{2}$ Sekunden.

9. Prüfung der Eigenschwingungen durch den Oszillographen.

Die Einrichtung des Oszillographen, welcher zur Untersuchung der Eigenbewegungen der Feder diente, ist folgende. Ein mit Ruß angeschwärzter Papierstreifen ist über eine vertikale drehbare Trommel und über eine mit Schwungrad versehene Walze gespannt, welche, durch eine Handkurbel in Drehung versetzt, dem Streifen eine gleichförmige Bewegung erteilt. Senkreckt zur Translationsrichtung des Papierstreifens bewegen sich die drei Stifte des Schreibapparates, welche an dem Endpunkte je eines Drahthebels befestigt sind. Die von verschiedenen

Punkten der Feder abgeleiteten Bewegungen werden durch Fäden den Schreibhebeln mitgeteilt, welche vermöge feiner Torsionsspiralen einen sanften Zug auf die Fäden ausüben und so deren Bewegungen folgen können. Durch die Wahl verhältnismäßig langer Hebel wurde eine wenigstens angenäherte Geradführung realisiert; die Masse des Schreibzeuges war so gering, daß sie auf die Federschwingungen keinen Einfluß ausüben konnte. Wenn nun die Kurbel gedreht wird, während die Feder Schwingungen ausführt, so zeichnen die Schreibstifte die Bewegungen der Feder in der Koordinatensprache auf und führen sie dem Beobachter weiß auf schwarz vor Augen.

Um nun die im vorigen Abschnitte entwickelten Theorien einer Prüfung zu unterziehen, wurde die Feder mittels eines axial am Endpunkte angreifenden Fadens gespannt. Nachdem der Papierstreifen in Bewegung versetzt war, wurde der Faden plötzlich durchschnitten, und auf diese Weise der gewünschte Anfangszustand herbeigeführt. Nach beendigtem Versuche wurde das Ergebnis durch eine Lösung von Schellack in Spiritus fixiert. Tafel I enthält das Resultat von fünf verschiedenen Versuchen. Fig. 1 zeigt die Bewegungen des Endpunktes; deutlich sind besonders zu Beginn des Versuchs die Spitzen an den Umkehrpunkten zu erkennen. Infolge der Unvollkommenheit des Schreibapparates erschienen nicht Linien gleichen Anstiegs sondern ein Komplex von schwach gekrümmten Kurven. In den Fig. 2 und 3 nehmen wir außer dem Diagramm des Endpunktes die gleichzeitigen Schwingungen des mittleren Federpunktes wahr. Die Züge (4) und (5) wurden eingepflügt durch einen Schreibstift, welcher die Bewegungen des in $\frac{l}{5}$ befindlichen Punktes mitmachte; die kleinen Schwingungen, welche die Ruheperiode stören, führe ich auf Resonanzerscheinungen am Aufhängepunkte zurück. Trotzdem ist der Charakter der Kurven unverkennbar.

10. Gedämpfte Federschwingungen.

Die ideelle Feder, welche Gegenstand der voraufgehenden Untersuchungen war, schwingt unaufhörlich, denn die Energiewandlungen, welche in einem Austausch zwischen potentieller und kinetischer Energie bestehen, finden nur innerhalb der Feder statt. Die unvermeidliche Luftdämpfung bildet nun die Hauptursache des Abklingens der Federschwingungen und läßt eine Aufnahme in die Rechnung als wünschenswert erscheinen. Sie führt sich ein in die Rechnung durch das Gesetz

$$dP = k \cdot v \cdot dx,$$

worin P der Luftwiderstand in kg,

v die Geschwindigkeit in m/sec,

dx die Länge eines Federelementes, in Achsrichtung gemessen, bezeichnen.

Auf ein Element dx wirken unter den gemachten Annahmen in der $(+x)$-Richtung die Kräfte: Spannkraft, Bremskraft und Zusatzkraft (Coriolis), so daß sich die Gleichgewichtsbedingung ergibt:

$$c \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx - k \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dx - \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot dx = 0;$$

demnach lautet die Differentialgleichung der gedämpften Federschwingungen:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{45}$$

Wir erforschen, unter welchen Bedingungen durch die Kombination

$$y = \Phi(t)[A \cdot \sin(\gamma t) + B \cdot \cos(\gamma t)][C \cdot \sin(\delta x) + D \cdot \cos(\delta x)] \tag{46}$$

eine partikuläre Lösung, nämlich diejenige geschaffen werden könnte, welche der harmonischen Bewegung entspricht. Durch eine physikalische Betrachtung läßt sich für die Dämpfungsfunktion eine Funktionalgleichung anschreiben, aus der sich $\Phi(t)$ als Exponentialfunktion zu erkennen gibt. Die Konstanten der so entstandenen Gleichung

$$y = e^{\beta t}[A \cdot \sin(\gamma t) + B \cdot \cos(\gamma t)][C \cdot \sin(\delta x) + D \cdot \cos(\delta x)] \tag{47}$$

sind nun der Differentialgleichung (45) anzupassen; als Bedingungsgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}&[-B \cdot k \cdot \gamma - 2 \cdot B \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \mu + A \cdot k \cdot \beta + A \cdot \mu \cdot \beta^2 - A \cdot \mu \cdot \gamma^2 - A \cdot c \cdot \delta^2] \cdot \sin(\gamma t)\\ &+ [A \cdot k \cdot \gamma + 2 \cdot A \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \mu + B \cdot k \cdot \beta + B \cdot \mu \cdot \beta^2 - B \cdot \mu \cdot \gamma^2 + B \cdot c \cdot \delta^2] \cdot \cos(\gamma t)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dieser Forderung wird jederzeit genügt werden, wenn die Klammerausdrücke verschwinden, und dazu ist nur notwendig:

$$k + 2 \cdot \beta \cdot \mu = 0, \qquad \beta = -\frac{k}{2 \cdot \mu}, \tag{48}$$

$$k \cdot \beta + \mu \cdot \beta^2 - \mu \cdot \gamma^2 + c \cdot \delta^2 = 0, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 \cdot \delta^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\mu}\right)^2}. \tag{49}$$

Eine mögliche Schwingung von praktischer Bedeutung ist diejenige, welche aus der allgemeinen Lösung (47) hervorgeht durch die Spezialisierung

$$B = 0, \quad D = 0, \quad C = 1,$$

also:

$$y = A \cdot e^{-\frac{k}{2\mu} \cdot t} \cdot \sin(\gamma t) \cdot \sin(\delta x). \tag{50}$$

Die Dämpfung wird ganz besonders dann zu berücksichtigen sein, wenn es sich um die Untersuchungen von Eigenschwingungen handelt; diese sind dadurch charakterisiert, daß die Kraft $c \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$ am freien Endpunkte verschwindet. Demnach muß für die harmonische Eigenschwingung (50) $\delta = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2l}$ sein, so daß nach Formel (49) wird

(51) $$\gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 - \left(\frac{k}{\mu}\right)^2}.$$

Ist die Feder frei von Knotenpunkten, also $n = 0$, so befolgt sie das Bewegungsgesetz

(52) $$y = A \cdot e^{-\frac{k}{2\mu} \cdot t} \cdot \sin\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 - \left(\frac{k}{\mu}\right)^2} \cdot t\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2l} \cdot x\right)$$

und benötigt zum Durchlaufen aller Phasen eine Zeit

(53) $$T = \frac{4\pi}{\sqrt{\pi^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 - \left(\frac{k}{\mu}\right)^2}};$$

also auch die gedämpften harmonischen Schwingungen sind isochron, jedoch hängt die Schwingungszeit vom Dämpfungsfaktor ab.

Wenn $\frac{k}{\mu} \gtreqless \pi \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)$ wird, so wird T imaginär; die Bewegung hört auf, eine oszillatorische zu sein. Um auch für diesen Fall zu einem brauchbaren Ergebnis zu gelangen, greifen wir zurück auf die Gleichung (47), setzen darin

$$\gamma = i \cdot \gamma', \quad \gamma' = \sqrt{\left(\frac{k}{\mu}\right)^2 - \pi^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2}, \quad \beta_1 = -\frac{k}{2\mu}, \quad D = 0, \quad C = 1,$$

$$A = \frac{k}{2 \cdot \mu \cdot \gamma' \cdot i} \cdot B$$

und bekommen unter Berücksichtigung der Eulerschen Relationen

(54) $$y = B \cdot e^{-\frac{k}{2\mu} \cdot t}\left[\frac{k}{4 \cdot \mu \cdot \gamma'}\left(e^{\gamma' t} - e^{-\gamma' t}\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^{\gamma' t} - e^{-\gamma' t}\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2l} \cdot x\right);$$

dem Zeitpunkte $t = 0$ entspricht dann nämlich der Zustand

(55) $$y_{t=0} = B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2l} \cdot x\right), \quad \left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} = 0,$$

der uns von der harmonischen Schwingung her bekannt ist. Mit der Gleichung (54) sind wir zu einem Ergebnis gelangt, das uns in ähnlicher Form schon in der Elektrizitätslehre gelegentlich der Entladung von Kondensatoren begegnete: Ist die Dämpfung gering, nämlich

$\frac{k}{\mu} < \pi \cdot \frac{\alpha}{l}$, so findet eine oszillatorische Energieentfaltung statt, während bei starker Dämpfung, d. i. $\frac{k}{\mu} \geqq \pi \cdot \frac{\alpha}{l}$ die Energieabfuhr durch einen kontinuierlichen Energiestrom bewerkstelligt wird.

Der durch die Gleichungen (55) gegebene Anfangszustand wird nun bei Eigenschwingungen kaum vorkommen; vielmehr ist es die auf den Zeitnullpunkt angewendete Gleichung (43)

$$(y)_{t=0} = \frac{8 \cdot f}{\pi^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sin\left\{\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2\cdot l} \cdot x\right\},$$

welche im Verein mit der Beziehung $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$ den Zustand einer statisch gespannten Feder im Augenblicke der Freilassung ausspricht. Nun können gedämpfte Schwingungen, deren Dämpfungswiderstand der Geschwindigkeit proportional ist, superponiert werden, denn die Bremskraft ist gleich $k \cdot \sum\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$. Demnach würde eine mögliche Eigenschwingung unter dem Einflusse der Dämpfung das Gesetz befolgen:

$$y = e^{-\frac{k}{2\mu}\cdot t} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_{2n+1} \cdot \sin\left[\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2l} \cdot x\right] \times$$
$$\times \sin\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 - \left(\frac{k}{\mu}\right)^2} \cdot t\right];$$

statt der Funktionen sin können auch die mit willkürlichen Koeffizienten behafteten Komplementärfunktionen gesetzt oder in beliebiger, durch Addition vermittelter Kombination hinzugefügt werden. Unter diese Kategorie zählt auch die Funktion:

$$(56) \qquad y = \frac{8 \cdot f}{\pi^2} \cdot e^{-\frac{k}{2\mu}\cdot t} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \cdot x\right] \times$$
$$\times \left[\frac{k}{2 \cdot \mu \cdot \gamma_n} \cdot \sin(\gamma_n \cdot t) + \cos(\gamma_n \cdot t)\right],$$
$$\left\{\gamma_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 - \left(\frac{k}{\mu}\right)^2}\right\},$$

welche die wünschenswerte Eigenschaft besitzt, daß zur Zeit $t = 0$ alle Differentialquotienten nach t verschwinden und daß durch y eine statische Durchfederung ausgesprochen wird. Die Feder wird also die Bewegungsstadien durchlaufen, die durch Gl. (56) vorgezeichnet sind; jeder Bewegungszustand wird durch eine Fouriersche Reihe mit dem Argumente x repräsentiert, kann aber — selbst abgesehen von dem Einflusse des Dämpfungsgliedes — nur einmal und nie wieder erreicht

werden, weil die Koeffizienten γ_n, mit denen die Zeitargumente behaftet sind, n nicht als Faktor enthalten, also keine arithmetische Progression bilden.

Wenn die Dämpfung gering ist, so kann in (56) das Sinusglied vernachlässigt werden; entwickelt man ferner γ_n nach dem binomischen Lehrsatze und vernachlässigt die kleinen Größen höherer Ordnung, so bekommt man:

$$(57)\qquad y = \frac{8f}{\pi^2} \cdot e^{-\frac{k}{2\mu} \cdot t} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \cdot x\right] \times$$
$$\times \cos\left\{\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{l} - \frac{\left(\frac{k}{2\mu}\right)^2}{(2n+1)\pi \cdot \frac{\alpha}{l}}\right] \cdot t\right\}.$$

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, daß die Dämpfung eine Phasenverschiebung der einzelnen Wellen gegenüber denen der ungedämpften Feder mit sich bringt, um so mehr, je niedriger die Ordnungsziffer n der Grundschwingungen ist. Nun kann der Knick in dem Federdiagramm nur durch die Grundkurven höchster Ordnung gebildet und demnach erst nach geraumer Zeit verwischt werden. Im Vergleich zur widerstandsfreien Schwingung werden die gedämpften Wellen nacheilen, um so mehr, je niedriger ihre Ordnung ist. Die Folge davon wird ein Wandern der Spitze relativ zur Hauptwelle sein; der Knick wird zeitlich in der Bewegungsrichtung des Papierstreifens fortschreiten.

11. Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß der Dämpfung.

Aus Tafel II Abb. 1 ist das Gesetz zu entnehmen, nach welchem die Schwingungen einer realen Feder in der Luft abklingen, welche aus dem Zwange einer statischen Durchfederung plötzlich befreit wurde. Da das Dämpfungsglied $\frac{k}{2\mu}$ außerordentlich gering war, so konnte eine wesentliche Änderung in dem Charakter der Bewegungen nicht wahrgenommen werden; wenn trotzdem die letzten Wellenzüge ein verändertes Gepräge zeigen, so hat sich wohl bei den geringen Kraftwirkungen der kleinen Schwingungen die Schreibstiftreibung geltend gemacht. Die Eigenschwingungsdauer betrug $60 : 232 = 0{,}259$ Sekunden. Durch die Kulminationspunkte der ersten und hundertsten Welle ließ sich eine Exponentialkurve $f = f_0 \cdot e^{-0{,}0442\,t}$ hindurchlegen. Es war

bei der ersten Schwingung $f_0 = 25$ m/m
nach 50 Schwingungen, $t = 12{,}95$ sec, $f_{50} = 14{,}1$ berechnet, beob. 14,0
„ 100 „ , $t = 25{,}90$ sec, $f_{100} = 8{,}0$ m/m „ , „ 8,0
„ 150 „ , $t = 38{,}85$ sec, $f_{150} = 8{,}9$ m/m „ , „ 8,5

von hier ab verursachte die Schreibstiftreibung erhebliche Fehler.

Um auch das Wandern der Spitze experimentell zu prüfen, wurden die Schwingungen der unter Wasser aufgehängten Feder aufgenommen. Abb. 2 auf Tafel II zeigt das Ergebnis zweier Versuche. Die Kurven, welche infolge der Kreisbewegung des Schreibstiftes nach links zu konvex sind, werden im Verlaufe der Zeit flacher, um schon nach der fünften Schwingung unverkennbar ihre Hohlseite nach links zu kehren, eine notwendige Folge der Wanderungen, welche die Spitze in der Bewegungsrichtung des Papierstreifens unternimmt.

Ich schließe meine Betrachtungen mit dem Wunsche, daß ich dem technischen Physiker mit dem ersten Teile der Arbeit ein brauchbares Werkzeug in die Hand gebe, daß der Theoretiker beim Studium der unstetigen Schwingungen einige Anregung finden möge.

Genauigkeitsuntersuchung über Messungen an einer Dampfturbine.

Von R. Schumann in Aachen.

1. Herr Rötscher teilt in seiner Dissertation: „Versuche an einer 2000-pferdigen Riedler-Stumpf-Dampfturbine"[1]) u. a. auch Zahlentabellen aus einer Reihe von Versuchen mit, durch die die Wirkung hydraulischer Bremsen auf Gang und Leistung einer solchen Turbine ziffernmäßig dargestellt wird. Als Beziehung zwischen der minutlichen Umlaufzahl n, dem Durchmesser D der Bremsscheibe einerseits und der Anzahl N der erzielten Pferdestärken (PSe) andererseits wird angenommen

$$N = C \cdot n^x;$$

durch graphischen Ausgleich wird für den als konstant angenommenen Exponenten x der Zahlenwert $2 \cdot 66$ gewonnen, während der Faktor C noch weiter in der Form $\frac{D^y}{A}$ angesetzt wird, wo nun y und A als Konstante angesehen werden, die ähnlich wie oben zu ermitteln sind.

Inbezug auf die Ergebnisse sei verwiesen auf S. 33—36 und S. 56—59 der genannten Arbeit, und inbezug auf die Wirkungsweise solcher Bremsen außerdem auf die beiden weiter unten angegebenen Aufsätze in der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure.

Es sei erlaubt, im folgenden auf *rein rechnerischem* Wege jener Beziehung zwischen n und N nachzugehen, und zwar so, daß für ver-

1) Vergleiche auch die ausführlichere Veröffentlichung desselben Verfassers unter dem gleichen Titel in Band 51 der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Hefte 16, 17, 18. Die Dissertation ist 1906 in Berlin erschienen.

schiedene Bremsscheibendurchmesser, Dampfdrucke und Stellungen des den Wasserzufluß im Bremsgehäuse regulierenden Schiebers solche Werte von C und x ermittelt werden, für die die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung so klein als möglich wird; dabei gilt n als fehlerlos gemessen, N als beobachtet und darzustellen.

2. Um in Kürze den Gang der Rechnung zu kennzeichnen, sei folgendes bemerkt.

Ist m die Anzahl der Messungen einer Gruppe, so lauten die Beziehungen zwischen n und N

$$N_i = C \cdot n_i^x, \qquad i = 1 \ldots m.$$

Diese m verschiedenen Gleichungen mit zwei Unbekannten C und x können im allgemeinen nicht nebeneinander bestehen; drückt man die Fehlerhaftigkeit der darzustellenden, beobachteten Größen N_i dadurch aus, daß man ihnen vorläufig unbekannte Verbesserungen v_i zufügt, so erhält man das System sogenannter *Fehlergleichungen*

$$C \cdot n_i^x = N_i + v_i, \qquad i = 1 \ldots m;$$

es ist also: Rechnung minus Beobachtung $= C \cdot n_i^x - N_i = v_i$. Im allgemeinen ist es zweckmäßig, solche transzendenten Gleichungen zum Zwecke der Ausgleichung auf lineare Form zu bringen, indem man sich Näherungen C_0 und x_0 verschafft und Verbesserungen dC und dx berechnet, so daß für die definitiven Werte $C = C_0 + dC$ und $x = x_0 + dx$ die Quadratsumme $v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_m^2 = [vv]$[1]) ein Minimum wird (Ausgleichung A). Im vorliegenden Falle ist diese Art nicht vorteilhaft wegen der starken Änderung der Größe n^x bei Änderung von x selbst; die Ausgleichung müßte mehrmals wiederholt werden, bis die Rechnung zum stehen kommt.

Es ist bequemer, die allgemeine Gleichung zunächst zu logarithmieren:

$$+ z + x \cdot \lg n_i - \lg N_i = v'_i,$$

wo $z = \lg C$ und v'_i eine Verbesserung von $\lg N_i$ bedeutet; verlangt man dann, daß $[v'v'] =$ Minimum wird, so erhält man für z und x die *Normalgleichungen*

$$\frac{\partial [v'v']}{\partial z} = 0 = + m \cdot z + [\lg n] \cdot x - [\lg N],$$

$$\frac{\partial [v'v']}{\partial x} = 0 = + [\lg n] \cdot z + [\lg n \lg n] \cdot x - [\lg N \lg n].$$

1) Die eckige Klammer soll, wie üblich in der Ausgleichungsrechnung, auch im folgenden zur Abkürzung bedeuten: Summation über sämtliche Indices; also $[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$.

Hieraus ergeben sich x und z, damit C und aus den Fehlergleichungen v'_1 bis v'_m (Ausgleichung B).

Drittens kann man die Fehlergleichung in der Form logarithmieren

$$C \cdot n_i^x = N_i + v_i;$$

beachtet man, daß die v kleine Größen den N gegenüber werden, so erhält man durch Entwicklung der rechten Seite nach Taylor:

$$+ z + x \cdot \lg n_i = \lg N_i + \frac{M}{N_i} \cdot v_i, \qquad \text{wo } M = 0.43429\ldots$$

der Modul des natürlichen Logarithmensystems ist. Aus der Forderung $[vv]$ = Minimum erhält man jetzt die Normalgleichungen (Ausgleichung C):

$$+ [NN] \cdot z + [N^2 \lg n] \cdot x - [N^2 \lg N] = 0,$$
$$+ [N^2 \lg n] \cdot z + [N^2 (\lg n)^2] \cdot x - [N^2 \lg N \lg n] = 0.$$

Die Ableitungen der Rechenkontrollen, der „Gewichte" und der „mittleren Fehler" von C und x mögen hier übergangen werden, ebenso einige unwesentliche rechnerische Umformungen der Fehlergleichungen, die man zweckmäßiger Weise vor Beginn der Rechnungen vornehmen wird, um auf kleinere Koëffizienten und kleinere absolute Glieder zu kommen; dies betrifft namentlich die rechnerisch zunächst recht unbequemen Normalgleichungen C.

Die Messungen mit den Scheiben $D = 800$ mm und 900 mm wurden nach Ausgleichung B, die für $D = 910$ nach C und die für $D = 1000$ nach B und C vorgenommen; mit Rücksicht auf die Größe der mittleren Fehler von C und x können die geringfügigen Verschiedenheiten infolge anderer Ausgleichung hier übergangen werden.

Die vereinzelt stehenden Versuche Nr. 34, 35, 58, 85, 138, 153—56, 172, 173 konnten vorläufig noch nicht mit verwendet werden; dies geschieht besser erst dann, wenn die eine oder andere Unbekannte schon anderweit gefunden worden ist.

3. *Scheibe $D = 800$ mm.* Der Anblick der Spalten n und PSe auf S. 56 der Rötscherschen Dissertation lehrt, daß erst für die Schieberstellungen $3 - 8\frac{1}{2}$ Gang sich allenfalls gleiches N für gleiches n ergeben werde, für weniger Gänge sicher nicht. Demgemäß wurde zunächst für die Versuche Nr. 26 — 57 *ein* x und *ein* C angenommen und berechnet, nachher aber versucht, auch Nr. 1 — 25 durch die so gewonnene Formel darzustellen; es fand sich

$$C = + 0.00079, \qquad x = \pm 1.783$$
$$\pm \quad 13, \qquad \pm \quad 24$$

während die (der Einfachheit wegen gruppenweise gemittelten) Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung lauten:

Tabelle 1.

Nr. des Versuchs	Öffnung des Wasserschiebers	$N_{beob.} - N_{berechn.}$	
1— 6	$1\frac{3}{4}$ Gang	-295 *PSe*	
7—12	2	-203	
13—18	$2\frac{1}{4}$	-119	
19—25	$2\frac{1}{2}$	-66	
26—33	$2\frac{3}{4}$	-13	ausgeglichen
36—43	3	$+5$	ausgeglichen
44—51	$3\frac{1}{2}$	$+12$	ausgeglichen
52—57	4	$+26$	ausgeglichen

Dem gesetzmäßigen Verhalten dieser Unterschiede nach ist entweder die Form des Gesetzes für N unzureichend, oder es äußert sich der Einfluß einer oder mehrerer nicht mit angesetzter Veränderlicher; deshalb wurde weiter für jede Schieberstellung je *ein* C und *ein* x ermittelt. Die konstante Gangzahl jeder Gruppe, die Drucke p in Atmosphären, Umlaufzahlen n, Anzahl der abgelesenen Pferdestärken $N_{beob.}$, die der (mit Hilfe der durch Ausgleichungen gewonnenen C und x) berechneten Pferdestärken $N_{ber.}$, sowie die Unterschiede im Sinne eines Überschusses der *beobachteten* über die *berechneten* Pferdestärken findet man in folgender Zusammenstellung:

Tabelle 2.

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Rest
1		3.5	1820	343 *PSe*	345 *PSe*	-2 *PSe*
2		4.0	2160	464	459	$+5$
3	$1\frac{3}{4}$	4.0	2200	479	473	$+6$
4		4.5	2585	603	620	-17
5		5.0	2785	692	703	-11
6		5.5	2985	809	789	$+20$
7		4.5	2010	483	491	-8
8		4.2	1840	428	428	0
9	2	5.0	2280	605	596	$+9$
10		5.5	2540	716	704	$+12$
11		6.0	2920	864	873	-9
12		6.4	3035	923	927	-4

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Rest
13		4.5	1835	486	488	− 2
14		5.0	2110	594	599	− 5
15	$2\frac{1}{4}$	5.5	2320	687	690	− 3
16		6.0	2515	793	777	+ 16
17		6.5	2715	886	869	+ 17
18		7.0	3060	1012	1037	− 25
19		5.0	1900	541	541	0
20		5.5	2070	627	620	+ 7
21		6.0	2270	715	718	− 3
22	$2\frac{1}{2}$	6.5	2485	813	830	− 17
23		7.0	2685	942	939	+ 3
24		7.5	2870	1050	1045	+ 5
25		8.0	3010	1133	1127	+ 6
26		5.0	1890	543	549	− 6
27		5.5	2050	634	630	+ 4
28		6.0	2180	705	698	+ 7
29	$2\frac{3}{4}$	6.5	2360	797	798	− 1
30		7.0	2525	902	894	+ 8
31		7.5	2710	998	1007	− 9
32		8.0	2900	1109	1128	− 19
33		8.5	3045	1240	1225	+ 15
36		5.0	1845	518	527	− 9
37		5.5	1990	597	602	− 5
38		6.0	2145	683	686	− 3
39	3	6.5	2300	795	776	+ 19
40		7.0	2485	915	888	+ 27
41		7.5	2635	1002	984	+ 18
42		8.0	2860	1118	1136	− 18
43		8.5	3035	1230	1261	− 31
44		5.0	1840	511	526	− 15
45		5.5	1970	588	593	− 5
46		6.0	2120	701	676	+ 25
47	$3\frac{1}{2}$	6.5	2295	788	778	+ 10
48		7.0	2450	883	875	+ 8
49		7.5	2645	1002	1001	+ 1
50		8.0	2825	1120	1126	− 6
51		8.5	3000	1231	1252	− 21

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Rest
52		5.0	1845	525	536	− 11
53		6.0	2125	700	688	+ 12
54	4	7.0	2445	895	882	+ 13
55		8.0	2780	1114	1107	+ 7
56		8.5	2950	1228	1229	− 1
57		8.8	3035	1272	1293	− 21

Die C (in Einheiten der 5. Dezimale) und x der acht Gruppen nebst ihren mittleren Fehlern sind:

Tabelle 3.

Gang	C	x
$1\frac{3}{4}$	$+ 119 \pm 49$	$+ 1.675 \pm 0.053$
2	$+ 392 \pm 105$	$+ 1.543 \pm 0.034$
$2\frac{1}{4}$	$+ 758 \pm 281$	$+ 1.473 \pm 0.047$
$2\frac{1}{2}$	$+ 313 \pm 67$	$+ 1.598 \pm 0.027$
$2\frac{3}{4}$	$+ 170 \pm 36$	$+ 1.682 \pm 0.027$
3	$+ 101 \pm 39$	$+ 1.750 \pm 0.049$
$3\frac{1}{2}$	$+ 84 \pm 30$	$+ 1.776 \pm 0.047$
4	$+ 88 \pm 27$	$+ 1.772 \pm 0.040$

Der mittlere *relative* Fehler eines C ist durchschnittlich $\pm 0{,}3$, also recht groß; vorwegnehmend sei hier schon bemerkt, daß C sich durchweg als recht unsicher ergibt. Wie nachher näher gezeigt wird, besteht bei dem vorliegenden Problem eine Besonderheit; infolgedessen ist auf die Bestimmung von C wenig Wert zu legen, während die übrig bleibenden Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung gar nicht oder doch sehr wenig von jener Besonderheit betroffen werden, hierüber vergleiche den 4. Abschnitt. Der mittlere Fehler einer Messung, oder der der Bestimmung eines $N_{beob.}$ ergibt sich zu $\sqrt{\frac{8975}{55-16}}\, PSe = \pm 15\, PSe$; hier ist 8975 die Quadratsumme der 55 Reste der Tabelle 2, und $16 = 2 \times 8$ die Anzahl der ermittelten Unbekannten C und x.

Während die Reste für die Gänge $1\frac{3}{4}$ bis $2\frac{3}{4}$ regellos verlaufen, zeigen sie bei den drei letzten Gängen gesetzmäßiges Verhalten, das vielleicht mit der Druckänderung (Spalte p) zusammenhängt.

C und x zeigen Änderungen nach dem Gang; indessen ist auch zu beachten, daß sich gleichzeitig zeilenweise das Druckgebiet verschiebt, denn es wachsen die Drucke

für	Gang	$1\frac{3}{4}$	von $p =$	3.5	bis	5.5
„	„	2	„	4.5	„	6.4
„	„	$2\frac{1}{4}$	„	4.5	„	7.0
„	„	$2\frac{1}{2}$	„	5.0	„	8.0
„	„	$2\frac{3}{4}$	„	5.0	„	8.5
„	„	3	„	5.0	„	8.5
„	„	$3\frac{1}{2}$	„	5.0	„	8.5
„	„	4	„	5.0	„	8.8;

eine solche äußerliche Verquickung ist der Bestimmung ungünstig. Sie könnte übrigens wohl durch entsprechende Anordnung der Messungen beseitigt werden.

Es wurde sodann noch der Versuch gemacht, x für alle Gruppen konstant, C allein als veränderlich anzusehen. Man findet $x = +1.665 \pm 0.020$, während die 8 C sind

für Gang $1\frac{3}{4}$:	0.00129,	für Gang $2\frac{3}{4}$:	0.00194,
2 :	153,	3 :	197,
$2\frac{1}{4}$:	171,	$3\frac{1}{2}$:	199,
$2\frac{1}{2}$:	185,	4 :	203.

Die mittleren Fehler der C sind hier wenig von einander verschieden; der relative mittlere Fehler ist gleich $\pm\frac{1}{6}$. Der mittlere Fehler *einer* Messung wird $\sqrt{\frac{17606}{55-(1+8)}}\,PSe = \pm 20\,PSe$; da also die Darstellung schlechter geworden ist, so muß man die Verschiedenheit der x unter den Gruppen als begründet ansehen. Es wird deshalb hier wie weiterhin davon abgesehen, auf die Ergebnisse der Rechnungen mit gleichen x für alle Gruppen einer Scheibe im einzelnen einzugehen; nur erwähnt sei, daß die Reste der Gruppen: Gang $1\frac{3}{4}$ bis $2\frac{3}{4}$ und die der Gruppen: Gang 3, $3\frac{1}{2}$, 4 dieselbe Verschiedenheit in ihrem Verhalten zeigen wie vorhin.

Scheibe $D = 900$ mm. Die Rechnung verläuft wie vorhin; nur ergeben sich die Resultate unsicherer, da weniger Beobachtungen auf die einzelnen Gruppen entfallen. Dabei ändern sich auch hier die Bereiche des Druckes zugleich mit denen der Schieberstellungen, was wie oben schon erwähnt, die Trennung von Fehlerquellen erschwert. Die folgende Tabelle entspricht Tabelle 2.

Tabelle 4.

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Reste
59		3.0	1335	238 PSe	235 PSe	+ 3 PSe
60	$1\frac{1}{2}$	3.5	1480	293	297	− 4
61		4.0	1620	357	365	− 8
62		4.5	1710	421	412	+ 9

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Reste
63		4.5	1590	397	396	+ 1
64	$1\frac{3}{4}$	5.0	1700	479	481	− 2
65		5.5	1790	560	558	+ 2
66		6.0	1860	623	623	0
67		6.0	1780	602	602	0
68	2	6.5	1860	675	672	+ 3
69		7.0	1942	740	748	− 8
70		7.5	2005	814	809	+ 5
71		7.5	1940	790	789	+ 1
72	$2\frac{1}{2}$	8.0	2002	850	852	− 2
73		8.6	2095	960	953	+ 7
74		9.0	2160	1023	1028	− 5
75		9.0	2120	1010	1007	+ 3
76	3	9.5	2195	1090	1095	− 5
77		10.0	2260	1177	1176	+ 1
78		10.5	2330	1269	1267	+ 2
79		10.5	2315	1262	1260	+ 2
80		11.0	2385	1332	1339	− 7
81	4	11.5	2460	1435	1426	+ 9
82		12.0	2555	1528	1540	− 12
83		12.5	2615	1618	1614	+ 4
84		13.0	2710	1740	1737	+ 3
86		8.0	2075	886	889	− 3
87	4	6.0	1740	598	595	+ 3
88		3.0	1062	193	193	0

Die C (hier in Einheiten der 8. Dezimale) und die x sind:

Tabelle 5.

Gang	C	x
$1\frac{1}{2}$	+ 1938	+ 2.267 ± 0.132
$1\frac{3}{4}$	+ 23	+ 2.888 ± 0.030
2	+ 509	+ 2.484 ± 0.100
$2\frac{1}{2}$	+ 715	+ 2.446 ± 0.076
3	+ 847	+ 2.428 ± 0.063
4	+ 17169	+ 2.041 ± 0.046
4	+ 2398	+ 2.282 ± 0.014

Der durchschnittliche *relative* Fehler eines C ist ± 0.4; der mittlere Fehler einer Messung ist $\sqrt{\frac{716}{29-14}}\,PSe$, also hier nur $\pm 7\,PSe$.

Scheibe D = 1000 mm. Hierbei ist günstig, daß die Drucke sich über ein großes Gebiet erstrecken; allerdings sind nur Messungen bei 2 Schieberstellungen vorhanden. Die Ergebnisse (nach Ausgleichung C) sind:

Tabelle 6.

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Reste
89		3.0	930	171 *PSe*	180 *PSe*	− 9 *PSe*
90		3.5	1005	212	219	− 7
91		4.0	1110	273	281	− 8
92		4.5	1165	312	318	− 6
93		5.0	1250	380	379	+ 1
94		5.5	1315	429	431	− 2
95		6.0	1380	485	486	− 1
96		6.5	1450	547	550	− 3
97	$1\frac{1}{2}$	7.0	1500	603	599	+ 4
98		7.5	1560	671	661	+ 10
99		8.0	1630	742	738	+ 4
100		8.5	1695	810	814	− 4
101		9.0	1745	877	875	+ 2
102		9.5	1800	946	946	0
103		10.0	1835	1010	993	+ 17
104		10.5	1885	1063	1063	0
105		11.0	1945	1150	1149	+ 1
106		11.5	1985	1213	1210	+ 3
107		12.0	2065	1314	1336	− 22
108	4	5.0	1180	359	365	− 6
109		6.0	1305	473	474	− 1
110		7.0	1405	577	574	+ 3
111		8.0	1510	700	692	+ 8
112		9.0	1610	814	818	− 4
113		10.0	1695	937	936	+ 1
114		11.0	1780	1070	1062	+ 8
115		11.5	1835	1143	1150	− 7
116		12.0	1870	1211	1207	+ 4

Die Unbekannten C (in Einheiten der 7. Dezimale) und x sind:

Tabelle 7.

Gang	C	x
$1\frac{1}{2}$	$+ 64 \pm 20$	$+ 2.509 \pm 0.041$
4	$+ 37 \pm 14$	$+ 2.602 \pm 0.050$

Der mittlere Fehler einer Messung ist $\sqrt{\frac{1436}{28-4}}\, PSe = \pm 8\, PSe$.

Scheibe D = 810 mm. Die Messungen dieser Reihe bieten ein besonderes Interesse dar, weil hier, im Gegensatz zu den drei früheren Scheiben, der Druck konstant gehalten und die Schieberstellung geändert wurde. Um aber doch mit den früheren Scheiben vergleichen zu können, habe ich die Reihe 810 zweimal, und zwar in verschiedener Anordnung ausgeglichen.

Erstens wurden die Beobachtungen gleicher Schieberstellung aus den verschiedenen Gruppen zusammengenommen; es ergibt sich die den früheren Tabellen 2, 4, 6 analoge

Tabelle 8.

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Reste
117		3.0	1687	288 *PSe*	323 *PSe*	−35 *PSe*
123		4.0	2067	433	454	−21
129	$1\frac{3}{4}$	5.0	2488	625	622	+ 3
136		6.0	2880	837	794	+43
143		7.0	3340	1033	1020	+13
157		8.0	3840	1263	1289	−26
118		3.0	1434	236	250	−14
124		4.0	1873	382	405	−23
130	2	5.0	2240	557	557	0
137		6.0	2670	780	765	+15
144		7.0	3020	995	957	+38
158		8.0	3500	1218	1247	−29
119		3.0	1380	225	237	−12
125		4.0	1660	338	336	+ 2
131		5.0	2173	552	559	− 7
138	$2\frac{1}{2}$	6.6	2560	758	766	− 8
145		7.0	2920	978	979	− 1
159		8.0	3134	1162	1123	+39
164		9.0	3514	1372	1393	−21
120		3.0	1360	220	236	−16
126		4.0	1653	342	343	− 1
132		5.0	2093	538	534	+ 4
139	3	6.0	2570	760	789	−29
146		7.0	2870	977	970	+ 7
160		8.0	3080	1141	1107	+34
165		9.0	3460	1360	1381	−21

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Reste
121		3.0	1327	215	217	− 2
127		4.0	1680	352	343	+ 9
133		5.0	2100	528	529	− 1
140	$3\frac{1}{2}$	6.0	2550	747	773	− 26
147		7.0	2870	968	973	− 5
161		8.0	3080	1151	1114	+ 37
166		9.0	3420	1354	1370	− 16
122		3.0	1340	217	224	− 7
128		4.0	1620	334	323	+ 11
134		5.0	2087	530	525	+ 5
141	4	6.0	2548	740	774	− 34
148		7.0	2880	972	979	− 7
162		8.0	3060	1142	1101	+ 41
167		9.0	3440	1362	1379	− 17
135		5.0	2120	538	532	+ 6
142	$4\frac{1}{2}$	6.0	2560	758	772	− 14
149		7.0	2880	972	968	+ 4
150		10.0	3600	1545	1587	− 42
151	$8\frac{1}{2}$	7.0	2840	984	996	− 12
152		10.0	3450	1510	1458	+ 52

Die Unbekannten C (in Einheiten der 6. Dezimale) und x sind:

Tabelle 9.

Gang	C	x
$1\frac{3}{4}$	+ 1193	+ 1.683
2	+ 520.0	+ 1.800
$2\frac{1}{2}$	+ 262.6	+ 1.897
3	+ 285.7	+ 1.889
$3\frac{1}{2}$	+ 180.4	+ 1.947
4	+ 211.1	+ 1.927
$4\frac{1}{2}$	+ 183.5	+ 1.943
$8\frac{1}{2}$	+ 173.4	+ 1.958

Man erkennt, daß die Reste größer sind als früher, der mittlere Fehler einer Messung ist $\sqrt{\frac{23230}{46-16}}\,PSe = \pm 28\,PSe$; demgemäß werden auch die mittleren Fehler der Unbekannten größer, der rechnungsmäßige mittlere Fehler eines C ist durchschnittlich ebenso groß wie C selbst;

der relative mittlere Fehler eines x ist hier im Durchschnitt $\pm\frac{1}{8}$, dabei stimmen aber die x der vier letzten Schieberstellungen gut unter sich.

Zweitens wurde bei Scheibe 810 jede Gruppe konstanten Druckes für sich ausgeglichen, also in der Folge und Zusammenfassung, wie beobachtet ist. Die Ergebnisse sind:

Tabelle 10.

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Reste
117	$1\frac{3}{4}$		1687	288 *PSe*	288.0 *PSe*	0.0 *PSe*
118	2		1434	236	235.8	+ 0.2
119	$2\frac{1}{2}$	3.0	1380	225	224.9	+ 0.1
120	3		1360	220	221.0	− 1.0
121	$3\frac{1}{2}$		1327	215	214.3	+ 0.7
122	4		1340	217	217.0	0.0
123	$1\frac{3}{4}$		2067	433	430.3	+ 2.8
124	2		1873	382	388.2	− 6.2
125	$2\frac{1}{2}$	4.0	1660	338	342.2	− 4.2
126	3		1653	342	340.7	+ 1.3
127	$3\frac{1}{2}$		1680	352	346.5	+ 5.5
128	4		1620	334	333.6	+ 0.4
129	$1\frac{3}{4}$		2488	625	622.7	+ 2.3
130	2		2240	557	565.3	− 8.3
131	$2\frac{1}{2}$		2173	552	549.8	+ 2.2
132	3	5.0	2093	538	531.1	+ 6.9
133	$3\frac{1}{2}$		2100	528	532.8	− 4.8
134	4		2087	530	529.8	+ 0.2
135	$4\frac{1}{2}$		2120	538	537.4	+ 0.6
136	$1\frac{3}{4}$		2880	837	837.1	− 0.1
137	2		2670	780	781.1	− 1.1
139	3	6.0	2570	760	754.4	+ 5.6
140	$3\frac{1}{2}$		2550	747	749.1	− 2.1
141	4		2548	740	748.5	− 8.5
142	$4\frac{1}{2}$		2560	758	751.8	+ 6.2
143	$1\frac{3}{4}$		3340	1043	1043.0	0.0
144	2		3020	995	994.5	+ 0.5
145	$2\frac{1}{2}$	7.0	2920	978	978.8	− 0.8
146	3		2870	977	970.9	+ 6.1
147	$3\frac{1}{2}$		2870	968	970.9	− 2.9
148	4		2880	972	972.5	− 0.5
149	$4\frac{1}{2}$		2880	972	972.5	− 0.5

Nr.	Gang	p	n	$N_{beob.}$	$N_{ber.}$	Reste
157	$1\frac{3}{4}$		3840	1263	1265.3	— 2.3
158	2		3500	1218	1214.5	+ 3.5
159	$2\frac{1}{2}$	8.0	3134	1162	1156.6	+ 5.4
160	3		3080	1141	1147.9	— 6.9
161	$3\frac{1}{2}$		3080	1151	1147.9	+ 3.1
162	4		3060	1142	1144.5	— 2.5
163	$2\frac{1}{8}$		3610	1390	1389.5	+ 0.5
164	$2\frac{1}{2}$		3514	1372	1372.3	— 0.3
165	3	9.0	3460	1360	1362.3	— 2.3
166	$3\frac{1}{2}$		3420	1354	1355.1	— 1.1
167	4		3440	1362	1358.7	+ 3.3
168			3390	1346	1350	— 4
169	$8\frac{1}{2}$	9.0	3300	1334	1334	0
170			3130	1309	1304	+ 5
171			2920	1261	1267	— 6
174			3300	1767	1765	+ 2
175			3330	1792	1774	+ 18
176	ganz	12.0	3620	1837	1853	— 16
177	auf		3660	1851	1865	— 14
178			3800	1913	1903	+ 10
179			3810	1917	1905	+ 12
180			3590	1672	1677	— 5
181			3600	1678	1680	— 2
182	ganz auf	11.0	3740	1720	1710	+ 10
183			3130	1564	1572	— 18
184			3140	1592	1575	+ 17

Die Unbekannten C und x sind:

Tabelle 11.

p	C	x
3.0	+ 0.0308	+ 1.230 ± 0.027
4.0	+ 0.148	+ 1.044 ± 0.132
5.0	+ 0.469	+ 0.920 ± 0.136
6.0	+ 0.583	+ 0.913 ± 0.159
7.0	+ 23.1	+ 0.469 ± 0.051
8.0	+ 33.1	+ 0.441 ± 0.047
9.0	+ 31.0	+ 0.464 ± 0.094
9.0	+ 42.4	+ 0.426 ± 0.093
10.0	—	—
11.0	+ 34.3	+ 0.475 ± 0.133
12.0	+ 24.6	+ 0.528 ± 0.143

Der mittlere Fehler einer Messung ist $\sqrt{\frac{2414}{58-20}}\,PSe = \pm 8\,PSe$; dabei überschreiten die Reste zwischen $p = 3.0$ bis 9.0 nicht $8.5\,PSe$. Dies spricht für exaktes Verhalten der Turbine und der die Leistungen messenden Instrumente, für Zweckmäßigkeit in der Anordnung der Versuche und auch für die Güte der Messung.

Trotz dieser besseren Darstellung gegenüber Tabelle 8 sind die mittleren Fehler der C im Durchschnitt noch so groß wie die Unbekannte selbst; der Grund hierfür liegt darin, daß bei Tabelle 10 die n innerhalb einer Gruppe einen 3—4 mal kleineren Spielraum haben als bei Tabelle 8, wodurch kleine Gewichte und infolgedessen große mittlere Fehler der C bedingt sind; dieser Übelstand ließe sich wohl durch besondere Anordnung und durch Ausdehnung der Beobachtung bessern.

Ungeachtet dessen geht aus Tabelle 11 hervor, daß die C und x bei konstantem Druck und veränderlicher Schieberstellung eine ganz andere Größe und anderes Verhalten zeigen als in den Tabellen 3, 5, 7 und 9, wo, umgekehrt, die Schieberstellung konstant gehalten und der Druck geändert wurde; auffällig erscheint ferner der Sprung zwischen $p = 6.0$ und 7.0 bei x sowohl als bei C.

Zur besseren Übersicht seien die C und x für Gruppen gleicher Schieberstellung zusammengestellt; die C sind hier durchweg in Einheiten der 6. Dezimale gegeben.

Tabelle 12.

Gang	C				x			
	$D = 800$	810	900	1000	800	810	900	1000
$1\frac{1}{2}$	—	—	19.4	6.42	—	—	2.267	2.509
$1\frac{3}{4}$	1192	1193	0.23	—	1.675	1.683	2.888	—
2	3919	520	5.09	—	1.543	1.800	2.484	—
$2\frac{1}{4}$	7575	—	—	—	1.473	—	—	—
$2\frac{1}{2}$	3133	263	7.15	—	1.598	1.897	2.446	—
$2\frac{3}{4}$	1703	—	—	—	1.682	—	—	—
3	1014	286	8.47	—	1.750	1.889	2.428	—
$3\frac{1}{2}$	838	180	—	—	1.776	1.947	—	—
4	875	211	11.69	3.71	1.772	1.927	2.383	2.602
$4\frac{1}{2}$	—	184	—	—	—	1.943	—	—
$8\frac{1}{2}$	—	173	—	—	—	1.958	—	—

Bei den C sei nur auf ihre große Veränderlichkeit, den x gegenüber, hingewiesen; man erkennt ferner, daß auch die x als mit D und mit der Schieberstellung veränderlich angenommen werden müssen, wenn man die beste Darstellung erreichen will, während Herr Rötscher mit

einer für seine Zwecke ausreichenden Genauigkeit x als konstant annehmen konnte.

Ferner folgt aus Tabelle 12 (wie auch aus anderen Zusammenstellungen), daß von Schieberstellung 3 (einschließlich) an aufwärts ein ruhigeres Verhalten bei Änderung der Wassermenge eintritt; man sehe z. B. die bessere Übereinstimmung der x unterhalb der punktierten Linie.

Bei allen Schlüssen über C und x, namentlich über die ersteren, sei nochmals besonders hervorgehoben, daß bei dem vorliegenden Problem, im besonderen bei dem hier gegebenen Bereiche der Größen n und N in Verbindung mit der hier angenommenen Form einer Beziehung zwischen ihnen, eine Besonderheit besteht. Die Größe C hat sich durchweg als mit einer großen Unsicherheit behaftet ergeben, trotzdem daß die übrigbleibenden Fehler gebietweise recht klein sind. Dies näher zu erläutern, diene folgender Versuch, zu dem willkürlich die Beobachtungsgruppe: Scheibe 900, Gang $1\frac{1}{2}$ gewählt wurde.

Nach Ausgleich B gehören zusammen (s. Tab. 4 u. 5):

x	C	v_{59}	v_{60}	v_{61}	v_{62}
2.2665	0.00001938	+ 3	− 4	− 8	+ 9 *PSe.*

Ändert man x nacheinander um einzelne Einheiten der dritten geltenden Ziffer (oder der 2. Dezimale), bestimmt ebenfalls nach Ausgleich B die zugehörigen C und v, so erhält man folgendes System:

Tabelle 13.

Annahme	Ausgleichung				
x	C (Einh. d. 8. Dez.)	v_{59}	v_{60}	v_{61}	v_{62}
2.2165	2796	+ 1	− 5	− 7	+ 11 *PSe*
2.2265	2598	+ 2	− 5	− 7	+ 11
2.2365	2414	+ 2	− 4	− 7	+ 10
2.2465	2244	+ 2	− 4	− 7	+ 10
2.2565	2085	+ 3	− 4	− 7	+ 9
2.2665	1938	+ 3	− 4	− 8	+ 9
—	—	—	—	—	—
2.3165	1343	+ 4	− 4	− 9	+ 7
2.3265	1248	+ 5	− 3	− 9	+ 6
2.3365	1160	+ 5	− 3	− 9	+ 6
2.3465	1078	+ 6	− 3	− 9	+ 5
2.3565	1001	+ 6	− 3	− 9	+ 5
2.3665	931	+ 6	− 3	− 9	+ 4
2.3765	865	+ 6	− 3	− 10	+ 4
2.3865	804	+ 7	− 3	− 10	+ 3

woraus die rasche Änderung von C ersichtlich ist; die Reste v sind dagegen mehrfach die gleichen in benachbarten Zeilen.

Wollte man zur Reduktion eines beobachteten N aber an Stelle des zu einem x gehörigen C ein benachbartes benutzen, so folgte beispielsweise:

	Annahme	$N_{beob.} - N_{ber.}$			
$x = 2.3265,$	$C = 0.00001343$ (anstatt 1248)	-13	-26	-37	$-25\,PSe$;

bei einem durchschnittlichen mittleren Fehler eines $N_{beob.}$ von $\pm 7.5\,PSe$ ist bereits die *Größe* dieser Reste auffällig, abgesehen von dem gemeinsamen Vorzeichen.

Wenn demnach auch die erste geltende Ziffer von C meist schon unsicher erscheint, so ist trotzdem nötig gewesen, zur Reduktion der Größen $N_{beob.}$ sämtliche vier aus einer der obigen Ausgleichungen folgenden Dezimalen beizubehalten; andernfalls würde aus den Resten eine größere Unregelmäßigkeit hervorgehen, als der Gang dieser Turbine tatsächlich zuläßt.

Umgekehrt haben kleine Störungen der beobachteten N (etwa durch äußere Beeinflussungen wie beispielsweise: Eigenheiten der Meßinstrumente im Betrage von einigen PSe) Änderungen in C um wesentliche Bruchteile seiner Größe zur Folge; dies ist bei weiteren Schlüssen zu beachten.

Hier soll davon abgesehen werden, näher auf die Abhängigkeit der C und x von D, p und Schieberstellung einzugehen; Herr Rötscher läßt die Frage offen, ob die von ihm auf graphischem Wege gefundene, numerische Formel (S. 35 der Dissertation) für N allgemein gültig ist. Dem Verhalten der C und x nach erscheint es nicht unmöglich, daß ein strenger mathematischer Zusammenhang zwischen diesen Größen und somit auch zwischen Umlaufzahl und Leistung besteht, und durch seine Auffindung würde auch eine genaue Lösung der von Herrn Rötscher gestellten Aufgabe ermöglicht: Ableitung einer Formel für die Abmessungen der umlaufenden Scheiben, Dissertation S. 35 und 55; die Formel für N als Funktion von D (S. 35) ist noch zu unsicher.

5. Sehr wenig werden von dem mehrfach erwähnten Übelstande betroffen die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler, wie z. B. die geringen Unterschiede der v benachbarter Zeilen in Tabelle 13 zeigen, und hierauf fußend, sei zum Schlusse Folgendes zusammengefaßt.

1. Das einfache Gesetz $N = C \cdot n^x$ ist nicht ausreichend, um durchweg den beobachteten Zusammenhang zwischen n und N befriedigend darzustellen; es dient hier nur als eine Interpolationsformel und voraus-

sichtlich ließen sich mit anderen Formeln gleichwertige Darstellungen erreichen. Behält man es bei, so muß man, um die beste Darstellung zu erhalten, *C und x* als vom Scheibendurchmesser *und* vom Dampfdruck abhängig ansehen.

2. Die Darstellung selbst gelingt, falls man bei gruppenweiser Ausgleichung stehen bleibt, gebietweise so gut, daß die übrig bleibenden Fehler innerhalb der Beobachtungsungenauigkeit liegen; vergleiche im besonderen Tabelle 4: Nr. 59—78, Tabelle 6: Nr. 108—116; Tabelle 10: $p = 3.0$ bis 9.0.[1])

3. Genauer als auf graphischem Wege lassen sich durch numerische Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate Beeinflussungen nachweisen, zudem erhält man dabei ungesucht Aufschluß über die Unsicherheit der Messung, der Unbekannten und der aus ihnen zu berechnenden Größen. Ein gewisser Aufwand an Rechnung darf allerdings nicht gescheut werden; er wird wieder aufgewogen durch den Vorteil bester Ausnutzung wertvoller Beobachtungsreihen.

Aachen, Sommer 1907.

Über graphische Zusammensetzung von Kräften im Raume.[2])

Von K. Th. Vahlen in Greifswald.

Damit ein räumliches Kräftesystem im Gleichgewicht ist, genügt es nicht, worauf mich Herr Henneberg hinweist, daß Grund- und Aufriß Gleichgewichtssysteme sind; es muß vielmehr auch der Seitenriß ein Gleichgewichtssystem sein. Die Konstruktion ist demgemäß, wie folgt zu vervollständigen. Man wähle den Drehpunkt P_1'' von $\mathfrak{S}_0''$ beliebig auf $\mathfrak{S}_0''$, dann ergibt sich der Drehpunkt A'' von $\mathfrak{S}_n''$ durch die angegebene Konstruktion. Ebenso liefert im Seitenriß der Punkt P_1''' von $\mathfrak{S}_0'''$ einen Drehpunkt B''' von $\mathfrak{S}_n'''$. Der zu B''' gehörige Aufrißpunkt B'' ist ein zweiter Punkt von $\mathfrak{S}_n''$. Durch A'', B'' ist $\mathfrak{S}_n''$ bestimmt, dadurch auch der Pol des Kräfteplans im Aufriß und dadurch Länge und Richtung der Kraft $\mathfrak{S}_0''$, deren Wirkungslinie hierdurch und durch den Punkt P_1'' gegeben ist.

1) In diesen Fällen wird in Zahlen festgelegt, was Herr Lasche mit den Worten schildert: „die Regelung zeigte sich als sehr feinfühlig und gehorsam. Bei festeingestellter Leistung der Turbine hielt sich die Umlaufzahl auf lange Zeit völlig unveränderlich. . .“ Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Band 50, Nr. 33 und 34, S. 1355.

2) Zusatz zu S. 315/316.

Bücherschau.

Carl Burrau. Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- und Hyperbelfunktionen). Berlin 1907, Verlag von Georg Reimer.

Die erste Tafel enthält die natürlichen Werte der Kreisfunktionen Cosinus und Sinus; sie unterscheidet sich von andern Tafeln ähnlicher Art dadurch, daß als Argument nicht wie sonst üblich der Winkel in Gradmaß, sondern in analytischem Maß angegeben ist. Um die Tafel auf einem kleinen Raum unterzubringen, hat der Verfasser das Intervall des Arguments möglichst groß, jedoch so gewählt, daß noch linear interpoliert werden kann; das Intervall beträgt 0,01, entsprechend rund 35′ in Gradmaß. Ausgedehnt ist die Tafel im Argument bis zu 1,60, also rund 92°.

Die zweite Tafel, enthaltend die natürlichen Werte der Hyperbelfunktionen Cosinus und Sinus, geht im Argument ebenfalls von 0,01 zu 0,01; die Interpolation kann auch hier linear ausgeführt werden.

Bei beiden Tafeln wird das Interpolieren durch Beigabe der üblichen Interpolationstäfelchen vereinfacht; mit Rücksicht auf die, infolge des großen Argumentintervalls rasch wechselnde Tafeldifferenz sind diese Täfelchen jedoch nicht in der Tafel selbst, sondern in einer „einmal dreistelligen Rechentafel“ untergebracht.

Der bei Logarithmentafeln schon gemachte Versuch, die Unsicherheit in der letzten, durch Ab- bzw. Aufrundung entstandenen Tafelstelle zu verringern, ist bei beiden Tafeln in gelungener Weise dadurch bewirkt, daß die letzte Tafelstelle mit einem Punkte versehen ist, wenn die folgenden Stellen einen Wert zwischen 0,25 und 0,75 der Einheit der letzten Tafelstelle haben; der Punkt kann bei der Rechnung durch die Ziffer 5 der ersten weggelassenen Tafelstelle ersetzt werden. Durch die Einführung dieser einfachen Verbesserung, die von Herrn F. N. Thiele ausgeht, wird die Genauigkeit einer Tafel derart gesteigert, daß eine zunächst 5stellige Tafel in bezug auf Genauigkeit zwischen einer 5- und 6stelligen liegt; die beiden — 6- bzw. 5stelligen — Tafeln des vorliegenden Buches werden deshalb als „$6\frac{1}{2}$-“ bzw. „$5\frac{1}{2}$stellig“ bezeichnet.

Der Raum, der auf einigen Seiten zwischen den einzelnen Tafeln zur Verfügung stand, wurde zu einer „$3\frac{1}{2}$“stelligen Tafel der Funktion e^{φ} benützt.

Straßburg i. E. P. Werkmeister.

C. Metz. Fünfstellige Logarithmen der Zahlen von 1—10800 und der trigonometrischen Funktionen. Ausgabe A mit vollständigem Rand-Index. Berlin 1908, Polytechnische Buchhandlung A. Seydel. Preis geb. ℳ 4.—. (Ausgabe B ohne Rand-Index, Preis ℳ 3.—.)

Das Buch enthält nur eine Tafel der Logarithmen der natürlichen Zahlen, und eine solche der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen; andere, für viele Zwecke — auch des praktischen Rechnens — wertvolle Dienste leistende Tafeln, wie Quadrattafel und Tafel der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen sind als „schwerfälliger Ballast“ weggelassen.

Die Tafel der Logarithmen der natürlichen Zahlen hat ebenso wie die fünfstellige Tafel von Albrecht nur einen Eingang; ihre eigenartige Verteilung auf die einzelnen Seiten ermöglicht in Verbindung mit den übersichtlich angegebenen Werten von S und T eine sehr bequeme Bestimmung der Logarithmen des Sinus bezw. der Tangens kleiner Winkel mit Hilfe der Maskelyneschen Regel.

Die zweite Tafel enthält die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen in der üblichen Anordnung von Minute zu Minute; eine Tafel enthaltend die Logarithmen kleiner Winkel von Sekunde zu Sekunde ist mit Rücksicht auf die erwähnte Einrichtung der Tafel I unnötig. Zur Unterscheidung sind die beiden, log tg und log ctg enthaltenden Vertikalspalten rot umrändert, und noch überflüssigerweise durch einen — beim Eingehen störend wirkenden — Zwischenraum von den Nachbarspalten getrennt.

Ein Einteilen der Ziffern in Gruppen ist bei beiden Tafeln nicht vorgenommen. Die in der Rechenpraxis ziemlich verbreitete Unterscheidung der Logarithmen durch einen Punkt als Trennungszeichen zwischen Kennziffer und Mantisse ist nicht beibehalten.

Der bei der Ausgabe A angebrachte Rand-Index kann nicht übersichtlich genug angeordnet werden, und bringt deshalb keinen nennenswerten Vorteil; an seiner Stelle wäre mit Rücksicht auf die durch die eigenartige Seiteneinteilung der Tafel I bedingte Unübersichtlichkeit eine Seitenüberschrift — jedoch mit größeren Ziffern als bei Tafel II — erwünscht.

Von den beiden, auf das Äußere einer Zahlentafel sich beziehenden Anforderungen, Anwendung der altenglischen Ziffern, und Verwendung von glanzlosem Papier, ist die erstere erfüllt.

Straßburg i. E. P. Werkmeister.

Neue Bücher.

Arithmetik und Analysis.

1. Dolinski, Myron, Algebra und politische Arithmetik. Wien und Leipzig, Fromme. K. 5.—
2. Girndt, M., Leitfaden der bautechnischen Algebra. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 25.) Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. Kart. ℳ 1.50.

2a. —— Aufgabensammlung zur bautechnischen Algebra. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 28.). Ebenda. Kart. ℳ 1.50.

3. Henry, Charles, La loi des petits nombres. Recherches sur le sens de l'écart probable dans les chances simples, à la roulette, au trente-et-quarante, etc., en général, dans les phénomènes dépendant de causes purement accidentelles, suivies d'une instruction pratique pour le joueur. Paris, Laboratoire d'Energétique d'Ernest Solvay. Broché Frs. 4.—; relié Frs. 5.—
4. Kozák, Josef, Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. II. Bd. 1. Tl. Theorie des Schießwesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie. Wien, Fromme. ℳ 16.—
5. Krüger, L., Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. (Veröffentlichung des Königl. preußischen geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 34.) Potsdam. (Leipzig, Teubner). ℳ 4.—
6. Sarrette, Henri, Précis arithmétique des calculs d'emprunts à long terme et de valeurs mobilières. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 10.—
7. Smith, Robert H., The Calculus for Engineers and Physicists. 2nd ed., revisid and enlarged. London, Griffin. 8 s. 6 d.

Astronomie und Geodäsie.

8. Günther, Ludwig, Die Mechanik des Weltalls. Eine volkstümliche Darstellung der Lebensarbeit Johannes Keplers, besonders seiner Gesetze und Probleme. Leipzig 1909, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 2.50.
9. Hegemann, Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. 3., verb. u. erweit. Aufl. Berlin, Parey. Geb. ℳ 5.40.
10. Jahresbericht, astronomischer, begründet von Walter F. Wislicenus. Mit Unterstützung der astronomischen Gesellsch. hrsg. v. A. Berberich. 9. Bd. Die Literatur des J. 1907. Berlin, Reimer. ℳ 21.—
11. Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. Fortgesetzt v. C. Reinherz. Zweiter Band. Feld- und Landmessung. Siebente erweiterte Aufl., bearb. v. O. Eggert. ℳ 20.—
12. Müller, Max, Exakte Beweise für die Erdrotation, elementar dargestellt. Wien u. Leipzig, Hölder. ℳ 1.—
13. Nölke, Friedrich, Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems. Aufstellung einer neuen Theorie nach vorhergehender Kritik der Theorien von Kant, Laplace, Poincaré, Moulton, Arrhenius u. a. Berlin, Springer. ℳ 6.—
14. Tapla, Theodor, Grundzüge der niederen Geodäsie. II. Instrumentenkunde. Leipzig u. Wien, Deuticke. ℳ 9.—

S. auch 2, 22, 29a, 81, 82, 89, 90, 95.

Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

15. Lesser, Oskar, Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht der höheren Schulen. Eine Sammlung von Materialien für die Hand des Lehrers. Leipzig, Freytag. — Wien, Tempsky. ℳ 5.—
16. Meisel, Ferdinand, Lehrbuch der Perspektive zum Gebrauche an mittleren und höheren technischen Lehranstalten, Kunstgewerbe- und Kunstschulen sowie bei eigenem Studium. Leipzig, Seemann & Co. ℳ 9.60.
17. Müller, Emil, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Erster Band. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 12.—
18. Richter, Otto, Kreis und Kugel in senkrechter Projektion, für den Unterricht und zum Selbststudium. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 4.40; geb. ℳ 4.80
19. Schönflies, Artur, Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 2.20; geb. in Leinw. ℳ 2.80.
20. Schütz, R., Beiträge zur zeichnerischen Massenermittlung, Massenverteilung und Förderkostenbestimmung der Erdarbeiten. Berlin, Ernst & Sohn. ℳ 2.40.
21. Wildt, Josef, Praktische Beispiele aus der darstellenden Geometrie für Lehranstalten mit bau- oder kunstgewerblicher Richtung. 3. Lieferung. Wien, Pichlers Wittwe & Sohn. ℳ 17.—
22. Zöppritz, Karl, Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer. In zweiter neubearbeiteter und erweiterter Aufl. Hrsg. von Alois Bludau. Zweiter Teil: Kartographie und Kartometrie. Leipzig, Teubner. ℳ 3.60; geb. in Leinw. ℳ 4.40.

Geometrie.

23. Kepler, Johannes, Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierrute. Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes (1615). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausg. von R. Klug. (Ostwalds Klassiker Nr. 165.) Leipzig, Engelmann. Geb. ℳ 2.60.

Geschichte.

24. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers. Hrsg. vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft. (Abhandlgn. zur Gesch. der mathem. Wiss. XXV. Heft.) Leipzig u. Berlin 1907, Teubner. ℳ 5.—; Geb. ℳ 5.80.

Logikrechnung.

25. Schröder, Ernst, Abriß der Algebra der Logik. Bearb. im Auftrag der deutschen Mathematiker-Vereinigung von Eugen Müller. In 3 Teilen. Erster Teil: Elementarlehre. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. ℳ 1.60.

Mechanik.

26. Bolduan, Otto, Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkmechanismen. Inaugural-Dissertation. Halle a. S. Druck von B. G. Teubner in Dresden.
27. Bonneau, J.-A., Instruments de pesage à systèmes articulés. 1ère partie. Balances Roberval. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 4.—
28. Buchholz, Hugo, Das mechanische Potential, nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeitet, und die Theorie der Figur der Erde zur Einführung in die höhere Geodäsie (angewandte Mathematik). I. Leipzig, Barth. ℳ 15.—; geb. ℳ 16.—
29. Enzyklopädie der mathem. Wissensch. mit Einschluß ihrer Anwendungen. IV. Bd. Mechanik. 1. Tl. 1. Abtlg. 4. Heft. Leipzig, Teubner. ℳ 7.80.
29a. —— IV. Bd. 2. Tl. 1. Abtlg. 4. Heft. Ebenda. ℳ 4.—
29b. —— der mathem. Wissensch. mit Einschluß ihrer Anwendungen. VI. Bd. 2. Tl. Astronomie. 2. Heft. Leipzig, Teubner. ℳ 4.—
30. —— IV. Bd. 3. Teilb. Ebenda. 1901—1908. ℳ 17.60; geb. in Halbfrz. ℳ 20.60.
31. Keck, Wilh., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. 2. Tl.: Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper. 3. Aufl., bearb. von Ludwig Hotopp. Hannover 1909, Helwing. ℳ 12.—; geb. ℳ 13.50.
32. Lecornu, Léon, Dynamique appliquée. (Encyclopédie scientifique, Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie Nr. 5.) Paris, Doin. Frs. 5.—
33. Mach, Ernst, Die Mechanik, in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. 6. verb. und verm. Aufl. Leipzig, Brockhaus. ℳ 8.—; geb. ℳ 9.—
34. Perry, John, Angewandte Mechanik. Ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen und numerische und graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Berechtigte deutsche Übersetzung von Rudolf Schick. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 18.—
35. Strasser, H., Lehrbuch der Muskel- und Gelenkmechanik. I. Band: Allgemeiner Teil. Berlin, Springer
36. Timerding, H. E., Geometrie der Kräfte. (Teubners Sammlung, 1. Bd.) Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 16.—

Physik, Astrophysik, mathematische Chemie.

37. Abraham, M., Theorie der Elektrizität. II. Bd. Elektromagnetische Theorie der Strahlung. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 10.—
38. Barkhausen, H., Das Problem der Schwingungserzeugung, mit besonderer Berücksichtigung schneller elastischer Schwingungen. Leipzig 1907, Hirzel. ℳ 4.—
39. Curie, Pierre, Oeuvres, publiées par les soins de la Société française de Physique. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 22.—
40. Darwin, Sir George Howard, Scientific Papers. Vol. II. Tidal friction and Cosmogony. Cambridge, University Press. 15 s.
41. Donle, Wilh., Grundriß der Experimentalphysik für höhere Lehranstalten. 3. verb. Aufl. Stuttgart, Grub. Geb. ℳ 3.—
42. Duhem, Pierre, Ziel und Struktur der physikalischen Theorien. Autorisierte Übersetzung von Friedrich Adler. Mit einem Vorwort von Ernst Mach. Leipzig, Barth. ℳ 8.—; geb. ℳ 9.—
43. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. VI. 1. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. ℳ 2.60.
44. Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1907. Dargestellt von der deutschen physikalischen Gesellschaft. 63. Jahrg. 2. Abtg. Elektrizität und Magnetismus, Optik des gesamten Spektrums, Wärme. Braunschweig, Vieweg & Sohn. ℳ 32.—
45. Fournier d'Albe, E. E., Die Elektronentheorie. Gemeinverständliche Einführung in die moderne Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Autorisierte Übersetzung von J. Herweg. Leipzig, Barth. ℳ 4.80; geb. ℳ 5.60.
46. Fuss, Konr. und Hensold, Georg, Lehrbuch der Physik für den Schul- und Selbstunterricht. Achte, verb. und verm. Aufl. Allgemeine Ausgabe. Freiburg i. B. Herder. ℳ 5.30; geb. in Halbleder ℳ 6.—

47. Fürstenau, Rob., Über das Verhältnis der spezifischen Wärme der Gase und seine Abhängigkeit von der Temperatur. Berlin, Trenkel. ℳ 2.—
48. Gans, R., Einführung in die Theorie des Magnetismus. (Mathem.-physikal. Schriften für Ingenieure und Studierende 1.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Kart. ℳ 2.40.
49. Gerard, Éric, Mesures électriques. Leçons données à l'Institut électrotechnique Montefiore de l'Université de Liège. 3ᵉ éd. refondue et complétée. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.—
50. Gockel, Alb., Die Luftelektrizität. Methoden und Resultate der neueren Forschung. Leipzig, Hirzel. ℳ 6.—; geb. ℳ 7.—
51. Graetz, L., Kurzer Abriß der Elektrizität. 5. verm. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. Geb. ℳ 3.50.
52. Himmel, P., Bautechnische Physik. Leitfaden für den Unterricht an Baugewerkschulen und verwandten technischen Lehranstalten. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 3.60.
53. Hinrichsen, F. Willy, Vorlesungen über chemische Atomistik. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 7.—
54. Hochheim, Franz, Elementare Theorie der Wechselströme. Ein Beitrag zur Behandlung der Wechselströme in der Oberstufe der Realanstalten. I. Teil. Leipzig, Teubner. ℳ 1.50.
55. Jacob, Emil, Der Flug, ein auf der Wirkung strahlenden Luftdrucks beruhender Vorgang. Bad Kreuznach, Druck von Jung & Co.
56. Jäger, Gustav, Theoretische Physik. IV. Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. (Sammlung Göschen Nr. 374.) Leipzig, Göschen. Geb. ℳ —.80.
57. Kayser, H., Lehrbuch der Physik für Studierende. Vierte verb. Aufl. Stuttgart, Enke. ℳ 10.—
58. Knott, Cargill Gilston, The Physics of Earthquake Phenomena. Oxford, Clarendon Press. 14 s.
59. Leathem, J. G., The elementary theory of the symmetrical optical instrument. (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics No. 8.) Cambridge, University Press. 2 s. 6 d.
60. Maclaurin, Richard, C., The theory of light. A treatise on physical Optics. In three parts. Part I. Cambridge, University Press. 9 s.
61. Messerschmitt, Joh. Bapt., Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche. („Die Wissenschaft“, 27. Heft.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. ℳ 5.—; geb. ℳ 5.80.
62. Pellat, H., Cours d'électricité. Tome III. Électrolyse. Électrocapillarité. Jons et électrons. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 10.—
63. Planck, Max, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt. („Wissenschaft und Hypothese“ VI.) 2. Aufl. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 6.—
64. Poincaré, L., Die moderne Physik. Übertragen von M. Brahn und B. Brahn. Leipzig, Quelle & Meyer. ℳ 3.80; geb. ℳ 4.40.
65. Poynting, J. H., and Thomson, J. J., A textbook of Physics. Heat. 3rd ed. Revised. London, Griffin. 15 s.
66. Reina, V., Teoria degli strumenti diottrici: lezioni dettate nell'università di Roma. Milano, Hoepli. L. 3.—
67. Riecke, Eduard, Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen. 2 Bde. 4., verb. und verm. Aufl. Leipzig, Veit & Co. ℳ 26.—; geb. in Leinw. ℳ 28.—.
68. Rinkel, R., Einführung in die Elektrotechnik. Physikalische Grundlagen und technische Ausführungen. (Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe.) Leipzig, Teubner. ℳ 11.20; geb. in Leinw. ℳ 12.—
69. Rosenberg, Karl, Experimentierbuch für den Unterricht in der Naturlehre. 2., vollkommen umgearb. und bedeutend verm. Aufl. I. Bd. Wien u. Leipzig, Hölder. ℳ 6.—; geb. ℳ 6.60.
70. Schäfer, Clemens, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. (Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende 3.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Kart. ℳ 3.40.
71. Scheiner, J., Populäre Astrophysik. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. ℳ 12.—
72. Schwaiger, A., Das Regulierproblem in der Elektrotechnik. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. ℳ 2.80; geb. in Leinw. ℳ 3.60.

73. THOMSON, J. J., Die Korpuskulartheorie der Materie. Übersetzt von G. Siebert. („Die Wissenschaft", 25. Heft.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. ℳ 5.—; geb. in Leinw. ℳ 5.80.
74. VILLARD, P., Les rayons cathodiques. (Scientia No. 10.) 2ᵉ éd. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 2.—
75. VOIGT, WOLDEMAR, Magneto- und Elektrooptik. (Mathem. Vorlesungen an der Universität Göttingen: III.) Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 14.—
76. WAALS, J. D. VAN DER, Lehrbuch der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf das Gleichgewicht von Systemen mit gasförmig-flüssigen Phasen. Nach Vorlesungen bearb. von Ph. Kohnstamm. 1. Tl. Leipzig, Maas & van Suchtelen. Geb. in Leinw. ℳ 12.—
77. WAGNER, KARL WILLY, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. (Mathem.-physikal. Schriften für Ingenieure und Studierende 2.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Kart. ℳ 2.40.
78. WEHNER, HEINR., Das Innere der Erde und der Planeten. Mathem.-physikal. Untersuchung. Freiberg, Craz & Gerlach. ℳ 2.50.
79. WHEATSTONE, BREWSTER, RIDDELL, HELMHOLTZ, WENHAM, D'ALMEIDA und HARMER, Abhandlungen zur Geschichte des Stereoskops. Hrsg. von M. von Rohr. (Ostwalds Klassiker Nr. 168.) Leipzig, Engelmann. Geb. ℳ 2.20.

Statistik, Versicherungs-Mathematik.

80. CZUBER, EM., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 1. Bd. Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmaßlehre. 2., sorgfältig durchgesehene und erweit. Aufl. (Teubners Sammlung IX, 1.) Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 12.—

Tafeln, Rechenapparate, Rechenmaschinen.

81. AL-BATTĀNĪ sive Albatenii opus astronomicum. Ad fidem codicis Escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a Carolo Alphonso Nallino. (Pubblicazioni del reale osservatorio di Brera in Milano.) Pars II. Versio tabularum omnium cum animadversionibus, glossario, indicibus. Mailand 1907, Hoepli. ℳ 20.—
82. ALBRECHT, TH., Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Vierte Aufl. Leipzig, Engelmann.
83. ANNUAIRE pour l'an 1909, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars Frs. 1.50.
84. BÖRGEN, C., Logarithmisch-trigonometrische Tafel auf 11 (bezw 10) Stellen. (Publikationen der astronomischen Gesellschaft XXII.) Leipzig, Engelmann. ℳ 5.—
85. CENTMAIER, CONR. J., Rechenschieberstreifen für Elektrotechniker. Mit Erläuterungen. Zürich, Rascher & Co. ℳ 1.—
86. GIRNDT M., und LIEBMANN A., Mathematische und technische Tabellen für den Gebrauch an bautechnischen Fachschulen und in der Baupraxis. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 27.) Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. Kart. ℳ 1.20.
87. HAMMER, E., Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Eine elementare Anleitung zur Verwendung des Instruments für Studierende und für Praktiker. Vierte, durchgesehene Aufl. Stuttgart, Wittwer. ℳ 1.—
88. HOLL, Der Turbinenrechenschieber und seine Anwendung zur Projektierung von Wasserkraftanlagen. Berlin W 35, Lützowstr. 3, Selbstverlag.
89. JADANZA, N., Tachymeter-Tafeln für zentesimale Winkelteilung. Deutsche Ausgabe, nach der 2. Aufl. (Turin 1904) besorgt von E. Hammer. Stuttgart 1909, Wittwer.
90. JORDAN, W., Hilfstafeln für Tachymetrie. 4. Aufl. Stuttgart, Metzler. ℳ 8.—
91. KÜSTER, F. W. Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Im Einverständnis mit der Atomgewichtskommission der deutschen chemischen Gesellschaft für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. 8. Aufl. Leipzig, Veit & Co. Geb. in Leinw. ℳ 2.40.

92. Mayer, J. E., Das mechanische Rechnen des Ingenieurs (Rechenschieber, Rechenmaschinen, Planimeter, Integrator, Integraph). Hannover, Jänecke. Geb. in Leinw. ℳ 2.20.

93. Metz, C., Fünfstellige Logarithmen der Zahlen von 1—10 800 und der trigonometrischen Funktionen. Berlin, Seydel. Ausgabe A, mit vollständigem Rand-Index, geb. ℳ 4.—; Ausgabe B, ohne Rand-Index, geb. ℳ 3.—

94. Nell, A. M., Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen, nebst den Logarithmen für Summe und Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind, sowie einigen anderen Tafeln, mit einer neuen, die Rechnung erleichternden Anordnung der Proportionalteile. 12. Aufl. Gießen, Roth. Geb. in Leinw. ℳ 2.—

95. Orlandi, G., Tavola grafica tacheopantometrica per determinare colla stessa precisione delle tavole numeriche e con maggior rapidità le distanze orizzontali, le differenze di livello, le coordinate planimetriche e le curve: instruzioni sul modo d'usare la tavola. Roma, Istituto geografico De Agostino.

96. Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen. 5. Aufl. Gotha, Thienemann. Geb. ℳ 1.—

97. Rozé, P., Théorie et usage de la règle à calculs. (Règle des écoles. — Règle Mannheim.) Paris, Gauthier-Villars Frs. 3.50.

98. Sachs, Joseph, Tafeln zum mathematischen Unterricht. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 6.—

99. Schumacher, Joh., Ein Rechenschieber mit Teilung in gleiche Intervalle auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes. (D. R. G. M. S. Nr. 344 576). Für den Unterricht konstruiert. München 1909, Lindauer.

100. Stück, E., Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Auf Veranstaltung des nautischen Departements des Reichs-Marineamts. Wilhelmshaven, Lohse Nachf. Geb. in Leinw. ℳ 1.25.

101. Thiele, W., Tafel der Wolframschen hyperbolischen 48 stelligen Logarithmen. Bearb. und erw. (Neue Ausg.) Dessau, Dünnhaupt. Geb. ℳ 6.—

Verschiedenes.

102. Ball, W. Rouse, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. 2ème éd. française, traduite d'après la quatrième éd. anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick. 2ème partie. Questions de géométrie. Questions de mécanique. Questions diverses. Carrés magiques. Problèmes des tracés continus. Trois problèmes de géométrie. Equation du 3e degré. Paris, Hermann. Frs. 5.—

103. Fabry, E., Traité de Mathématiques générales à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des facultés des sciences. Avec une préface de G. Darboux. Paris 1909, Hermann & Fils.

104. Fenkner, Hugo, Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie, sowie von Aufgaben über graphische Darstellungen. Ausgabe A. Teil I. 6. verb. und verm. Aufl. Berlin 1909, Salle. ℳ 2.20.

105. Günther, Siegmund, Geschichte der Mathematik. I. Teil. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. (Sammlung Schubert XVIII.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. ℳ 9.60.

106. Ihering, Albrecht von, Die Wasserkraftmaschinen und die Ausnutzung der Wasserkräfte. („Aus Natur und Geisteswelt", 228. Bändchen.) Leipzig, Teubner.

107. Mensing, Fr., Bautechnisches Rechnen. Teil II: Die bürgerlichen Rechnungsarten und deren Anwendung auf baugewerbliche Aufgaben (technisches, geschäftliches und volkswirtschaftliches Rechnen). („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 29.) Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. Kart. ℳ 1.25.

108. — Dasselbe, Teil III: Technisches, geschäftliches und volkswirtschaftliches Rechnen (Kalkulationen). („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 30.) Ebenda. Kart. ℳ 1.50.

109. Müller, Felix, Führer durch die mathematische Literatur, mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. (Abh. zur Gesch. der mathem. Wiss. XXVII. Heft.) Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. ℳ 7.—; geb. in Leinw. ℳ 8.—

110. Pascal, Blaise, Oeuvres complètes, publiées suivant l'ordre chronologique avec documents complémentaires, introductions et notes (Collection des Grands Écrivains de la France). Première série. Oeuvres jusqu'au Mémorial de 1654. par Léon Brunschvigg et Pierre Boutroux. Paris, Hachette & Cie. 3 volumes. brochés Frs. 22.50.

111. Rey, Abel, Die Theorie der Physik bei den modernen Physikern. Deutsch von Rudolf Eisler. (Philosophisch-soziologische Bücherei Bd. XII.) Leipzig 1909, Klinkhardt. ℳ 8.50; geb. ℳ 10.—

112. Schäffer, C., Natur-Paradoxe. Ein Buch für die Jugend zur Erklärung von Erscheinungen, die mit der täglichen Erfahrung im Widerspruch zu stehen scheinen. Nach W. Hampsons „Paradoxes of nature and science". Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 3.—

113. Sylvester, James Joseph, Collected mathematical papers. Vol. II (1854—1873). Cambridge, University Press. 18 s.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Abraham, M., Theorie der Elektrizität, II, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 37.

C. Alauda, Die theoretische Ermittlung der Sonnen- und Mondparallaxe nebst einem Anhang über die astronomische Ermittlung dieser Parallaxen. Wien, Teschen, Leipzig; Prochaska. Geb. ℳ 1.50.

——, Über das Prinzip der allgemeinen Gravitation und die vollständige analytische Lösung des Problems der drei Körper. Auszug aus einer Studie über Probleme der theoretischen Astronomie und theoretischen Physik. Wien, Teschen, Leipzig; Prochaska. Geb. ℳ 5.—

Albrecht, Th., Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, s. N. B. 82.

Amodeo, Federico, Albrecht Dürer precursore di Monge. Napoli 1907.

Annuaire pour l'an 1909, s. N. B. 83.

Archiv für Photogrammetrie, internationales, Organ der „Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie" in Wien, redigiert von Eduard Doležal. Band I, Heft 1. März 1908. Wien u. Leipzig, Fromme.

Arnoux, Gabriel, Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques, leurs transformations. (Essais de psychologie et métaphysique positives). Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.—

Arrhenius, Svante, Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten. (Das Werden der Welten, neue Folge). Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft. ℳ 5.—; geb. ℳ 6.—

Astronomischer Kalender für 1908. Hrsg. von der k. k. Sternwarte zu Wien. Neue Folge. 27. Jahrgang. Wien, Gerolds Sohn.

Aus Natur und Geisteswelt. Sammlung wissenschaftlich gemeinverständlicher Darstellungen. Illustrierter Katalog 1908. Leipzig, Teubner.

Atti della Società italiana per il progresso delle scienze. Prima riunione. Parma, Settembre 1907. Roma 1908.

Ball, W. Rouse, Récréations mathématiques, s. N. B. 102.

Bardey, Ernst, Algebraische Gleichungen, nebst den Resultaten und den Methoden zu ihren Auflösungen. 6. Aufl., bearbeitet von Fr. Pietzker. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 8.—

——, Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Bearbeitet von H. Hartenstein. II. Teil (für die Oberklassen neunstufiger Anstalten). Leipzig u. Berlin 1907, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 2.60.

Barkhausen, H., Das Problem der Schwingungserzeugung, s. N. B. 38.

Behrendsen, O., und Götting, E., Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. A. Unterstufe. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. Geb. ℳ 2.80.

Blume, G., Das Veranschlagen für Hochbauten. („Der Unterricht an Baugewerkschulen Nr. 26.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Kart. ℳ 1.80.

Böhm, Karl, Elliptische Funktionen. Erster Teil. Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. (Sammlung Schubert XXX.) Leipzig, Göschen. Geb. M 8.60.

Börsch, A., Bericht über Lotabweichungen (1906). Aus dem II. Band der Abh der XV. Allgemeinen Konferenz der Erdmessung in Budapest 1906. Leiden 1908, Brill.

Bolduan, O., Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkmechanismen, s. N. B. 26.

Bolza, Oskar, Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the calculus of Variations" desselben Verfassers. In drei Lieferungen. Erste Lieferung. Leipzig und Berlin, Teubner. M 8.—.

Bonneau, J. A., Instruments de pesage, s. N. B. 27.

Bonola, Roberto, Die nichteuklidische Geometrie, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autorisierte deutsche Ausgabe, besorgt von Heinrich Liebmann. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. M 5.—.

Borel, Émile, Die Elemente der Mathematik. Vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe, besorgt von Paul Stäckel. Erster Band. Arithmetik und Algebra. Leipzig u. Berlin, Teubner. M 8.60.

Bothas, Ludwig, Massen-Destillation von Wasser, insbesondere zur Erzeugung von Trinkwasser und Lokomotiv-Speisewasser. Berlin. Springer. M 2.—.

Branfort, Benchara, A study of mathematical education, including the teaching of Arithmetic. Oxford, Clarendon Press.

Brass, A., An der Grenze des Lebens. (Naturwissenschaftliche Zeitfragen, Heft 3.) Hamburg, Schloessmann. M 1.50.

Breitfeld u. Wohlgeboren, Abbildungen zur Naturlehre (Physik und Chemie). Leipzig, Degener. M 1.—.

Breitfeld, Leitfaden für den Unterricht in der Naturlehre. Leipzig, Degener. Ausgabe A. Ohne Abbildungen. Geb. M 1.50.

Buchholz, H., Das mechanische Potential, s. N. B. 28.

Carslaw, H. S., Introduction to the theory of Fourier's series and integrals and the mathematical theory of the conduction of heat. London 1906, Macmillan and Co.

Contributions from the Jefferson Physical Laboratory of Harvard University for the year 1907. Vol. V. Cambridge, Mass.

Couturat, Louis, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch von Carl Siegel. (Philosophisch-soziologische Bücherei, Band VII.) Leipzig, Klinkhardt. M 8.50; geb. M 10.—.

Crantz, P., Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. II. („Aus Natur und Geisteswelt" 205.) Leipzig, Teubner. M 1.—; geb. M 1.25.

Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe, besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. Berlin 1907, Reimer Geb. M 15.—.

Curie, Pierre, Oeuvres, s. N. B. 39.

Cyon, E. von, Das Ohrlabyrinth als Organ der mathematischen Sinne für Raum und Zeit. Berlin, Springer. M 14.—.

Czuber, Emanuel, Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. Geb. in Leinw. M. 12.—.

——, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. Auflage, s. N. B. 80.

Darwin, Sir George Howard, Scientific Papers, s. N. B. 40.

Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik. Bibliothek-Katalog. Leipzig 1907, Teubner. M 5.—.

——, Führer durch die Sammlungen. Leipzig, Teubner. M 1.—.

Delègue, Louis, Essai sur les principes des sciences mathématiques. Paris, Vuibert et Nony. Frs. 4.—.

Doehlemann, Karl, Geometrische Transformationen. II. Teil. Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen. (Sammlung Schubert XXVIII.) Leipzig, Göschen. Geb. M 10.—.

Dolinski, M., Algebra und politische Arithmetik, s. N. B. 1.

Donle, W., Grundriß der Experimentalphysik, s. N. B. 41.

Düsing, K., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode. Ausgabe A. Hannover, Jänecke. ℳ 1.—; geb. ℳ 1.30.
Duhem, P., Ziel und Struktur der physikalischen Theorien, s. N. B. 42.
Dumesnil, Georges, De la forme des chiffres usuels. Grenoble 1907, Allier Frères.
Durège, H., Theorie der elliptischen Funktionen. In der fünften Auflage neu bearbeitet von Ludwig Maurer. Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 11.—.
Egerer, Heinz, Repetitorium der höheren Mathematik. (Lehrsätze, Formeln, Tabellen.) München u. Berlin, Oldenburg.
Fabry, E., Traité de Mathématiques générales, s. N. B. 103.
Fenkner, Hugo, Arithmetische Aufgaben, s. N. B. 104.
Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, s. N. B. 24.
Fischer, Paul B., Determinanten. (Sammlung Göschen Nr. 402.) Leipzig, Göschen. Geb. ℳ —.80.
Fournier d'Albe, E. E., Elektronentheorie, s. N. B. 45.
Friedrichs, H., Feldmessen. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 14.) Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 3.20.
Fuss, K., u. Hensold, G., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 46.
Gans, R., Theorie des Magnetismus, s. N. B. 48.
Geistbeck, Michael, Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie für höhere Schulen und Lehrerbildungs-Anstalten. 30., durchgesehene und 31. Auflage. Freiburg i. B., Herder. ℳ 1.60; geb. ℳ 2.—.
Gérard, E., Mesures électriques, s. N. B. 49.
Gerdien, H., Untersuchungen über die atmosphärischen radioaktiven Induktionen. (Abh. der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse. Neue Folge. Bd. V, Nr. 5.) Berlin 1907, Weidmann. ℳ 7.—
Girndt, M., Leitfaden der bautechnischen Algebra, s N. B. 2.
—, Aufgaben dazu, s. N. B. 2a.
Girndt-Liebmann, Mathematische und technische Tabellen, s. N. B. 86.
Girndt, M., Raumlehre I. Lehre von den ebenen Figuren. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 20.) 3. Auflage. Leipzig u. Berlin 1907, Teubner. Kart. ℳ 2.20.
Gruner, P., Die Wandlung in den Anschauungen über das Wesen der Elektrizität. Hamburg, Schloessmann. Brosch. ℳ —.80.
—, Die Welt des Unendlich Kleinen. (Naturwissenschaftliche Zeitfragen Heft 2.) Hamburg, Schloessmann. ℳ —.60.
—, Über die Verwertung von Theorien und Hyothesen im physikalischen Unterricht. Referat, gehalten in der mathem.-naturw. Sektion der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Basel am 26. September 1907. (Sonderabdruck aus: Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen.) Leipzig und Berlin, Teubner. ℳ —.80.
Günther, L., Die Mechanik des Weltalls, s. N. B. 8.
Günther, S., Geschichte der Mathematik, s. N. B. 105.
Gutzmer, A., Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht, enthaltend die Vorverhandlungen auf den Versammlungen in Cassel und Breslau, sowie die seitens der Kommission den Versammlungen in Meran, Stuttgart und Dresden unterbreiteten Reformvorschläge, im Auftrage der Kommission herausgegeben. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 7.—.
Häring, Georg, Lehrbuch der Geometrie für die Oberstufe der höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. München u. Berlin, Oldenbourg. ℳ 1.30.
Hammer, E. Der logarithmische Rechenschieber, s. N. B. 87.
Hardy, G. H., A course of pure Mathematics. Cambridge, University Press. 12 s.
Hayford, John F., The earth a failing structure. Annual presidential address, read before the Philosophical Society of Washington, Dez. 7, 1907. (Phil. Soc. Wash. Bulletin, vol. XV, pp. 57–74.) Washington 1907, Philosophical Society.
Hecker, O., Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1907. (Veröffentlichungen des Königl. preußischen geodätischen Instituts. Neue Folge Nr. 35.) Berlin, Reichsdruckerei.
Heger, Richard, Analytische Geometrie auf der Kugel. (Sammlung Schubert LIV.) Leipzig, Göschen. Geb. ℳ 4.40.

HENSEL, KURT, Theorie der algebrischen Zahlen. Erster Band. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 14.—.

HENRY, CH., La loi des petits nombres, s. N. B. 3.

HERMITE, CHARLES, Oeuvres, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Tome II. Paris, Gauthiers-Villars. Frs. 18.—.

HILBERT, DAVID, Grundlagen der Geometrie. Dritte, durch Zusätze und Literatur-Hinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. („Wissenschaft und Hypothese" VII.) Geb. in Leinw. ℳ 7.—.

HILTON, HAROLD, An introduction to the theory of groups of finite order. Oxford, Clarendon Press. 14 s.

HIMMEL, P., Bautechnische Physik, s. N. B. 52.

HINRICHSEN, F. W., Chemische Atomistik, s. N. B. 53.

HOČEVAR, FRANZ, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. 8. Aufl. Wien 1907, Tempsky.

HOCHHEIM, ADOLF, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. B. Auflösungen. 3. vermehrte Auflage bearbeitet von Oswald Jahn und Franz Hochheim. Leipzig u. Berlin, Teubner, ℳ 1.80; geb. ℳ 2.20.

HOCHHEIM, FR., Elementare Theorie der Wechselströme, s. N. B. 54.

HOLL, Der Turbinenrechenschieber, s. N. B. 88.

HOLM, RAGNAR, Experimentelle Untersuchungen über die geschichtete positive Glimmlichtsäule, insbesondere über das Schichtenpotential in H_2, N_2, He. (Abh. der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Mathem.-physikal. Klasse. Neue Folge Bd. VI. Nr. 2.) Berlin, Weidmann. ℳ 4.—

JACOB, E., Der Flug, s. N. B. 55.

JADANZA, N., Tachymeter-Tafeln für zentesimale Winkelteilung, s. N. B. 89.

JÄGER, G., Theoretische Physik, IV. s. N. B. 56.

IHERING, A. v., Die Wasserkraftmaschinen, s. N. B. 106.

INDEX du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Nouvelle édition. Amsterdam, Delsman et Paris, Gauthier-Villars.

JORDAN, W., Hilfstafeln für Tachymetrie, s. N. B. 90.

——, Handbuch der Vermessungskunde, s. N. B. 11.

JUNKER, FR., Höhere Analysis. II. Teil. Integralrechnung. (Sammlung Göschen 88.) Leipzig, Göschen. Geb. ℳ —.80.

KAMBLY-LANGGUTH, Arithmetik und Algebra. Nach den preußischen Lehrplänen von 1901 umgearbeitet von A. Thaer. Ausgabe B: Für Oberrealschulen, Realgymnasien und Gymnasien mit mathematischem Reformunterricht. 39. Aufl. Breslau, Hirt. Geb. ℳ 2.50.

KAYSER, H., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 57.

KEPLER, J., Neue Stereometrie der Fässer, s. N. B. 23.

KLEIN, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1907—08. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig, Teubner. ℳ 7.50.

KLEINSCHMIDT, MAX, Grammatik und Wissenschaft, eine psychiatrische Studie. Hannover, Jänecke. ℳ 1.50.

KNOCHE, H., Theoretisch-praktische Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehrunterrichtes für Lehrerbildungsanstalten und Volksschullehrer. Ein neuer Versuch zur Lösung der Frage: „Wie wirkt der Rechenunterricht sittliche Bildung?" Arnsberg, Stahl.

KNOTT, C. G., The Physik of earthquake phenomena, s. N. B. 58.

KOPPE-DIEKMANN, Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten (24. Aufl.) Ausgabe für Realanstalten. I. Teil der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. 8. Auflage der neuen Bearbeitung von Karl Knops. Essen, Bädecker. Geb. ℳ 2.40.

——, Dasselbe. II. Teil der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie (20. Aufl.) 4. Auflage der neuen Bearbeitung. Ebenda.

KOWALEWSKI, GERHARD, Einführung in die Infinitesimalrechnung, mit einer historischen Übersicht. („Aus Natur u. Geisteswelt", 197. Bändchen.) Leipzig, Teubner. ℳ 1.—; geb. ℳ 1.25.

Kowalewski, Gerhard, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 12.—

Krüger, L., Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte, s. N. B. 5.

Kübel, Karl G. I., Anwendung einer anschaulichen Darstellung des Imaginären. Diss. Giesen 1907. Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Leathem, J. G., Symmetrial optical instrument, s. N. B. 59.

Lecornu, L., Dynamique appliquée, s. N. B. 32.

Lehmann, O., Flüssige Kristalle, ihre Entdeckung, Bedeutung und Ähnlichkeit mit Lebewesen. Vortrag, gehalten im Physikalischen Verein zu Frankfurt a. M. am 16. November 1907. Mit nachträglichen Ergänzungen. (Sonderabdruck aus dem Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. 1906/07). Frankfart a. M, 1908, Naumanns Druckerei.

—, Flüssige Kristalle und mechanische Technologie. Vortrag, gehalten im Karlsruher Bezirksverein Deutscher Ingenieure am 28. Oktober 1907 unter Benutzung des gleichnamigen Aufsatzes in der physikal. Zeitschr. 8, 386, 1907.

—, Verzeichnis sämtlicher Publikationen. Ebenda.

Leon, Alfons und Basch, Alfred, Über die Temperaturspannungen in einer Hohlkugel bei stationärer Wärmeströmung. (Sonderabdruck aus der Zeitschr. des österr. Ingen.- und Architekten-Vereines, 1907, Nr. 41). Wien 1907, Selbstverlag.

Lilienthal, R. v., Vorlesungen über Differentialgeometrie. I. Bd. Kurventheorie. (Teubners Sammlung Bd. XXVIII, 1.) Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 12.—

Lodge, Sir Oliver, Leben und Materie. Häckels Welträtsel kritisiert. Berlin, Curtius.

Lummer, O., On the temperature and structure of the sun. Address delivered by invitation before the Philosophical Society of Washington, March 21, 1907. (Philosoph. Soc. of Washington, Bull. vol. XV pp. 75—101.) Washington 1908.

Maclaurin, R. C., Theory of light, s. N. B. 60.

Maier, Wilhelm, Wärmekraftmaschinen. Ein Rückblick auf deren Entwicklung seit Anfang der neunziger Jahre. Antrittsrede. Stuttgart, Wittwer. ℳ 1.—

Mayer, Adolf, Das Wesen der Gärung und der Fermentwirkung, nach den neuesten Ergebnissen der Forschung dargestellt. (Naturwissenschaftl. Zeitfragen Heft 5.) Hamburg, Schloessmann. ℳ —.60.

Meisel, F., Lehrbuch der Perspektive, s. N. B. 16.

Mensing, Fr., Bautechnisches Rechnen I. Die Grundlagen des gewerblichen Rechnens. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 19.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Kart. ℳ 1.60.

—, Bautechnisches Rechnen, II und III, s. N. B. 107, 108.

Metz, C., Fünfstellige Logarithmen, s. N. B. 93.

Meyer, Julius, Die Bedeutung der Lehre von der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit für die angewandte Chemie. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.

Milla, Karl, Wie fliegt der Vogel? (Sonderabdruck aus dem 1. Bande der Monatshefte für den naturwissenschaftl. Unterricht aller Schulgattungen.) Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 1.—

Močnik, Lehrbuch der Arithmetik für Unter-Gymnasien, bearb. v. Anton Neumann. I. Abt. für die I. und II. Klasse. 39. Aufl. Wien 1907, Tempsky.

—, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die oberen Klassen der Gymnasien, bearb. v. Anton Neumann. 30. Aufl. Wien 1907, Tempsky.

Möller, M., Exakte Beweise für die Erdrotation, s. N. B. 12.

Müller, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie, s. N. B. 17.

Müller, Ernst, Über den Bau der Knochen (Naturwissenschaftl. Zeitfragen Heft 4.) Hamburg, Schloessmann. ℳ —.50.

Müller, F., Führer durch die mathematische Literatur, s. N. B. 109.

Nelson, Leonhard, Ist metaphysikfreie Naturwissenschaft möglich? Sonderabdruck aus den „Abhandlungen der Friesschen Schule", II. Band, 3. Heft. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. ℳ 1.60.

Netto, Eugen, Gruppen und Substitutionentheorie. (Sammlung Schubert LV.) Leipzig, Göschen. Geb. ℳ 5.20.

Newton, Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. (Ostwalds Klassiker Nr. 164.) Leipzig, Engelmann. geb. ℳ 1.50.

Nielsen, Niels, Lehrbuch der unendlichen Reihen. Vorlesungen, gehalten an der Universität Kopenhagen. Leipzig u. Berlin 1909. ℳ 11.—; geb. in Leinw. ℳ 12.—

Nölke, Fr., Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems, s. N. B. 13.

Onoranze al Prof. Alfonso Sella. Roma, Bertero e C.

Ostwald, Wilhelm, Grundriß der Naturphilosophie. (Bücher der Naturwissenschaft, herausgegeben von Siegmund Günther, 1. Bd.) Leipzig, Reclam, jun.

Pädagogische Jahresschau, II. Bd. 1907, Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 6.—; geb. ℳ 7.—

Pascal, Blaise. Oeuvres, s. N. B. 110.

Pasch, Moritz, Grundlagen der Analysis. Ausgearbeitet unter Mitwirkung von Clemens Thaer. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 3.60; geb. in Leinw. ℳ 4.—

Pellat, H., Cours d'électricité, s. N. B. 62.

Perry, E. D., Die amerikanische Universität. („Aus Natur u. Geisteswelt", 206. Bändchen.) Leipzig, Teubner. ℳ 1.—; geb. ℳ 1.25.

Perry, J., Angewandte Mechanik, s. N. B. 34.

Pfaundler, L., Das chinesisch-japanische Go-Spiel. Eine systematische Darstellung und Anleitung zum Spielen desselben. Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 3.—

Pietzker, F., Lehrgang der Elementar-Mathematik in zwei Stufen. Teil II, Lehrgang der Oberstufe (enthaltend den Lehrstoff für die oberen Klassen der Vollanstalten mit Ausschluß der Kegelschnittslehre). Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 4.40.

Planck, M., Das Prinzip der Erhaltung der Energie, s. N. B. 63.

Poincaré, L., Moderne Physik, s. N. B. 64.

Präzisions-Winkellineal von Hugo Stoyka. Berlin, Ashelm. ℳ —.50.

Pütter, August, Studien zur vergleichenden Physiologie des Stoffwechsels. (Abh. der Königl. Ges der Wiss. zu Göttingen. Mathem.-physikal. Klasse. Neue Folge Bd. VI. Nr. 1.) Berlin, Weidmann. ℳ 5.—

Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Hrsg. v. der Direktion des mathem.-physikal. Seminars. Neue Aufl. Herbst 1907. Mit einem Anhang: Statuten des mathem. Lesezimmers. Leipzig 1907, Teubner. ℳ 1.—

Rauber, A., Der Pythagoräische Lehrsatz und seine Bedeutung in der Körperwelt. Leipzig 1907, Thieme.

Rey, A., Theorie der Physik, s. N. B. 111.

Reye, Theodor, Die Geometrie der Lage, Vorträge. Erste Abteilung. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig, Kröner. ℳ 8.—; geb. ℳ 10.—

Richter, O., Kreis und Kugel in senkrechter Projektion, s. N. B. 18.

Riem, Johannes, Unsere Weltinsel, ihr Werden und Vergehen. (Naturwissenschaftl. Zeitfragen Heft 1.) Hamburg, Schloessmann. ℳ 1.50.

Rinkel, R., Elektrotechnik, s. N. B. 68.

Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. 96.

Rosenberg, K., Experimentierbuch, s. N. B. 69.

Rühl, Heinrich, Elementarer Beweis des Fermatschen Satzes. Darmstadt, Müller & Rühle.

Runge, C. Analytische Geometrie der Ebene. Leipzig u. Berlin. Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 6.—.

Sachs, J., Tafeln zum mathematischen Unterricht, s. N. B. 98.

Sarrette, H., Calculs d'emprunts, s. N. B. 6.

Schäfer, Cl., Maxwellsche Theorie, s. N. B. 70.

Schäffer, C., Natur-Paradoxe, s. N. B. 112.

Schafheitlin, Paul, Die Theorie der Besselschen Funktionen. (Mathem.-physikalische Schriften für Ingenieure u. Studierende, herausgegeben von E. Jahnke, 4.) Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 2.80; geb. in Leinw. ℳ 3.20.

Schau, A., Der Eisenbahnbau. I. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 15.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Kart. ℳ 3.60.

—, Dasselbe, II. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 16.) Ebenda. Kart. ℳ 2.80.

Scheibner, W., Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen. Als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. Leipzig 1907, Teubner. ℳ 10.—.

Scheiner, J., Populäre Astrophysik, s. N. B. 71.

Schlesinger, Ludwig, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 10.—; geb. in Leinw. ℳ 11.—.

Schmehl, Chr., Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung. II. Teil. Ausgabe A. Für die Obersekunda und Prima der Gymnasien. Gießen, Roth. ℳ 1.60; geb. ℳ 2.—.

—, Dasselbe, Ausgabe B. Für die Obersekunda der realistischen Anstalten. Ebenda. ℳ 1.60; geb. ℳ 2.—.

—, Sammlung von Aufgaben aus der Algebra und algebraischen Analysis im Anschluß an das Lehrbuch: Die Algebra und algebraische Analysis mit Einschluß einer elementaren Theorie der Determinanten. Für die Prima der realistischen Anstalten. Gießen 1909, Roth. ℳ 1.60; geb. ℳ 2.—.

Schönflies, A., Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden, s. N. B. 19.

Schröder, E., Abriß der Algebra der Logik, s. N. B. 25.

Schubert, Herm., Niedere Analysis. I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche u. diophantische Gleichungen. (Sammlung Schubert V.) 2. Auflage. Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. ℳ 3.60.

—, Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen, in zwei Farben zusammengestellt. (Sammlung Göschen 81.) Dritte, verbesserte Auflage. Leipzig, Göschen. Geb. ℳ —.80.

Schubert, Hermann, u. Schumpelick, Adolf, Arithmetik für Gymnasien. Zugleich fünfte Auflage von Schuberts Sammlung von Aufgaben usw. Zweites Heft: Für obere Klassen. Leipzig, Göschen. ℳ 2.80; geb. in Leinw. ℳ 3.25.

—, Ausgewählte Resultate zur Arithmetik für Gymnasien. Zweites Heft. Ebenda. ℳ 1.—.

Schwab, Karl, u. Lesser, Oskar, Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, im Sinne der Meraner Lehrpläne bearbeitet. I. Band: Arithmetik und Algebra. I. Teil: Für die mittleren Klassen sämtlicher höheren Lehranstalten. Wien 1909, Tempsky. Geb. ℳ 2.80.

Schwaiger, A., Das Regulierproblem in der Elektrotechnik, s. N. B. 72.

Schwering, Karl, u. Krimphoff, Wilhelm, Ebene Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. 6. Auflage. Freiburg i. B., Herder. ℳ 1.70; geb. ℳ 2.20.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. Vierte und fünfte Auflage, bearbeitet von Georg Scheffers. I. Band. Differentialrechnung. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ 11.—; geb. in Leinw. ℳ 13.—.

Sieberg, August, Der Erdball, seine Entwicklung und seine Kräfte. Lieferung 1. Esslingen u. München, Schreiber. ℳ —.75.

Stäckel, Paul, u. Ahrens, Wilhelm, Der Briefwechsel zwischen C. G. J Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fußschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. Leipzig, Teubner. ℳ 8.—.

Strasser, H., Muskel- und Gelenkmechanik, s. N. B. 35

Studte, Herm., Über Beziehungen der Thermo- und Tribo-Elektrizität zur Elektrophysiologie. Berlin-Charlottenburg, Kurtzig. ℳ 1.20.

Sturm, Rudolf, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. I. Band. Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. (Teubners Sammlung Bd. XXVII, 1.) Leipzig und Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 16.—.

—, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. II. Band. Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. (Teubners Sammlung Bd. XXVII, 2.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. ℳ 16.—.

Stuyvaert, M., Cinq études de géometrie analytique. Applications diverses de la théorie des matrices et de l'élimination. Ouvrage couronné par l'Academie Royale de Belgique (Prix François Deruyts). Extrait des Mémoires de la Société des Sciences de Liége. Gent, van Goethem. Frs. 6.—.

Sylvester, J. J., Mathematical papers vol. II, s. N. B. 113.

Tapla, Th., Grundzüge der niederen Geodäsie, s. N. B. 14.

Technik und Schule, Beiträge zum gesamten Unterricht an technischen Lehranstalten. Herausgegeben von M. Girndt. I. Band, 5. Heft. Leipzig u. Berlin. Teubner. M. 1.60.

B. G. Teubner's Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften. 101. Ausgabe. Mit einem Gedenktagebuche für Mathematiker und den Bildnissen von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Kräpelin, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllner, sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend. Leipzig u. Berlin, Teubner.

Théodoroff, P., Démonstration de la grande proposition de Fermat, $x^n + y^n = z^n$ est impossible en nombres entiers si $n > 2$. Sofia, Imprimerie de P. M. Basaïtoff.

Thomae, J., Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. M. 7.80.

Timerding, H. E., Geometrie der Kräfte, s. N. B. 36.

Vater, R., Hebezeuge. Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper. („Aus Natur und Geisteswelt" 196.) Leipzig, Teubner. M. 1.—; geb. M. 1.25.

Villard, P., Les rayons cathodiques. s. N. B. 74.

Voigt, W., Magneto- und Elektrooptik, s. N. B. 75.

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik. Rede, gehalten am 11. März 1908 in der Kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. Leipzig u. Berlin, Teubner. M. 3.60.

Young, G. C., u. Young, W. H., Der kleine Geometer. Deutsche Ausgabe, besorgt von S. und F. Bernstein. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. M. 3.—.

Wagner, K. W., Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge, s. N. B. 77.

Wedding, H., Das Eisenhüttenwesen, erläutert in acht Vorträgen. („Aus Natur u. Geisteswelt", 20. Bdchen.) 3. Auflage. Leipzig, Teubner.

Wheatstone, Brewster, ..., Abhandlungen zur Geschichte des Stereoskops, s. N. B. 79.

Weiske P., Die Berechnung von Eisenbetonbauten. („Der Unterricht an Baugewerkschulen" 17.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Kart. M. 1.50.

Weitzenböck, Roland, Komplex-Symbolik. Eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume. (Sammlung Schubert LVII.) Leipzig, Göschen Geb. M. 4.80.

Wieleitner, Heinrich, Spezielle ebene Kurven. (Sammlung Schubert LVI.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. M. 12.—.

Wildt, J., Praktische Beispiele aus der darstellenden Geometrie, s. N. B. 21.

Wolf, Karl, Grundzüge der Elektrotechnik zum Gebrauche an gewerblichen Lehranstalten. Wien 1909, Hölder. M. 1.20.

Worms de Romilly, P., Sur les premiers principes des sciences mathématiques. Paris, Hermann. Frs. 2.50.

Wright, Edmund, Invariants of quadratic differential forms. (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics No. 9.) Cambridge University Press. 2 s. 6 d.

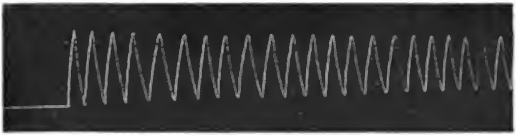
Zeitschriftenschau, umfassend die bedeutendsten mechanisch-technischen Zeitschriften Deutschlands, Österreich-Ungarns, der Schweiz, Englands, Frankreichs und Nordamerikas, bearbeitet von der Redaktion der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. — Bücherschau, umfassend die wichtigsten, in den oben genannten Ländern erschienenen technischen Bücher, zusammengestellt von der Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin. Elfter Band 1908. Zweites Vierteljahr. Berlin, Verein deutscher Ingenieure.

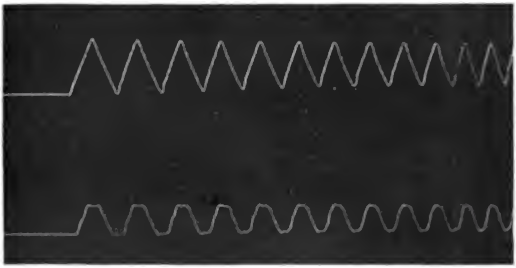
Zöppritz, K., Kartenentwurfslehre, s. N. B. 22.

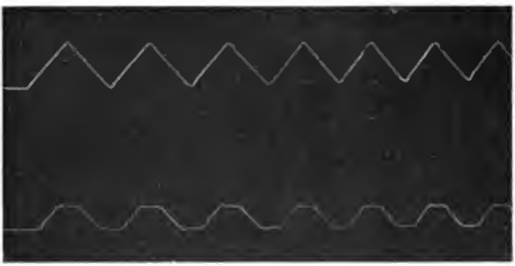
Berichtigungen zu Heft 3 dieses Bandes.

S. 282, Z. 7 v. u. ist „einem Titelbild und" zu streichen.

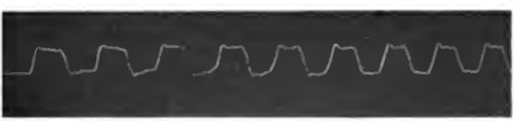
S. 327, letzte Zeile, muß es (im zweiten Glied der Klammer) statt ϑ heißen $\frac{1}{2}\vartheta$, wodurch der Fehler in der Näherungsformel für k auf S. 328, Z. 3 v. o. auf die Hälfte verringert wird.

1


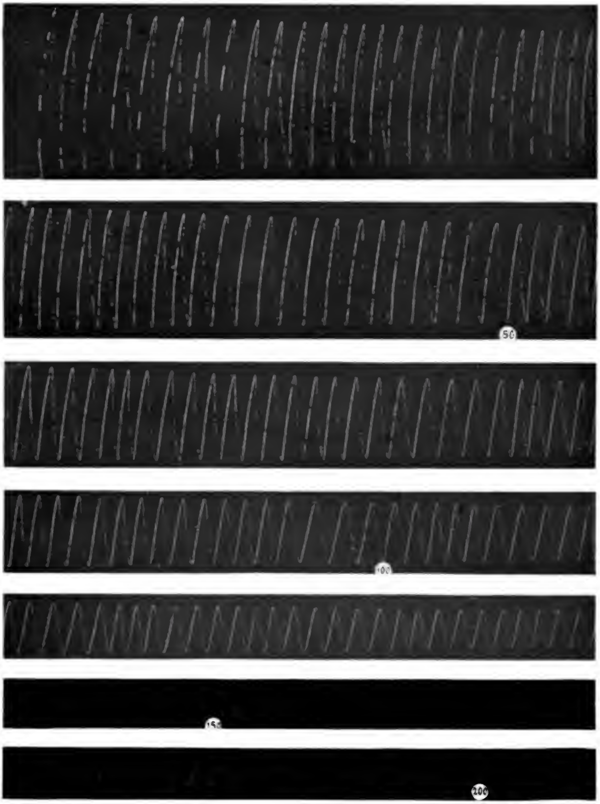
2


3


4


5


1



2

